Ejercicios del tema 2

Estructuras Algebraicas

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.
E.T.S.I. de Telecomunicación.

Conjuntos, Relaciones, Funciones

Ej. 1 — Sea $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ el conjunto universal en el que se definen los siguientes conjuntos: $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Escribe los siguientes conjuntos:

a) $\overline{A} \cap (C - A)$ *b)* $A \cap (B \cup C)$ *c)* $\overline{(A \cap B)} \cup \overline{C}$ *d)* $(A \times A) \cap (B \times B)$

Ej. 2 — Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos $A_i = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \dfrac{1}{i+1} \right\}$. Calcular $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Ej. 3 — Si el conjunto X tiene 10 elementos ¿cuántos subconjuntos propios de X hay en $\mathcal{P}(X)$?

Ej. 4 — Dado $A = \{a, b, c\}$, si $\mathcal{P}(A)$ representa el conjunto de las partes de A, indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) $\emptyset \subseteq A$ *c)* $a \subseteq A$ *e)* $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ *g)* $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$

b) $\emptyset \in A$ *d)* $a \in \mathcal{P}(A)$ *f)* $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ *h)* $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

Ej. 5 — De los 100 alumnos de una clase 60 han aprobado física, 48 matemáticas y 30 las dos. Halla el número de alumnos que no han aprobado ninguna de las dos.

Ej. 6 — Dados los conjuntos $X = \{2, 3, 4\}$ e $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ definimos la relación de X en Y: "$x \,\mathcal{R}\, y$ *si y sólo si* x *divide a* y". Escribe los elementos del grafo de la relación y una representación gráfica de la misma.

Ej. 7 — Verificar si las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto de los números enteros cumplen las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

1. $a \,\mathcal{R}_1\, b \Leftrightarrow a = b^2$
2. $a \,\mathcal{R}_2\, b \Leftrightarrow a > b$
3. $a \,\mathcal{R}_3\, b \Leftrightarrow 3$ divide a $a - b$

Ej. 8 — (Feb. 2012) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se considera la relación $\mathcal{R}$ sobre A, tal que, para todo $a, b \in A$, $a \,\mathcal{R}\, b$ si, y sólo si, $a + b$ es divisible por 6.

1. Calcula los pares de la relación $\mathcal{R}$. Justifica por qué $\mathcal{R}$ no es una relación de equivalencia.
2. Añade los pares necesarios para que sea una relación de equivalencia.

3. Define el conjunto cociente.

Ej. 9 — En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se define la relación binaria:

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Justifica que $\mathcal{R}$ es una relación binaria de equivalencia y halla el conjunto cociente. Dibuja una representación gráfica de la relación.

Ej. 10 — Demuestra que la relación de divisibilidad en $\mathbb{N} - \{0\}$:

$$a \mid b \text{ si y sólo si } b = na \text{ para algún } n \in \mathbb{N}$$

es una relación de orden e indica si es total o parcial. Representa gráficamente la relación restringida al subconjunto $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Ej. 11 — En $\mathbb{Z}$ se define la relación "$x \,\mathcal{R}\, y$ si y sólo si $x^2 - y^2 = x - y$" ¿es $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia? En caso afirmativo, calcular los elementos de la clase $[a]$.

Ej. 12 — (Sept. 2012) Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{6, 7, 8, 9\}$, encuentra, si es posible, elementos $a, d \in A$ y $b, c \in B$ tales que la relación $\mathcal{R}_f = \{(1, 8), (2, 6), (2, b), (4, 7), (a, c), (d, 8)\} \subseteq A \times B$ cumpla que:

1. $\mathcal{R}_f$ no sea una función.
2. $\mathcal{R}_f$ sea una función inyectiva.
3. $\mathcal{R}_f$ sea una función, pero no sea sobreyectiva.

Ej. 13 — (Dic. 2012)

1. Considérese $\leq$ una relación de orden parcial en un conjunto A. Definimos una nueva relación binaria $\sim$ en el mismo conjunto A del siguiente modo:

$$a \sim b \iff a = b \text{ o bien } (a \not\leq b \text{ y } b \not\leq a)$$

   Comprueba las propiedades de $\sim$ como relación: reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva, probando las que son ciertas y poniendo un contraejemplo en las que no son ciertas. ¿Es $\sim$ una relación de equivalencia?

2. Pon, si es posible, un ejemplo de una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (reales de variable real) en cada uno de los siguientes casos:
   a) Inyectiva pero no sobreyectiva.
   b) Sobreyectiva pero no inyectiva.
   c) Ni inyectiva ni sobreyectiva.

Ej. 14 — Representa gráficamente, en un sistema cartesiano, las siguientes relaciones. Calcula su dominio e imagen. Indica cuáles son funciones en su dominio.

a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 3), (2, 2), (1, 5), (3, 5)\} \subseteq E \times F$, siendo $E = \{1, 2, 3\}$ y $F = \{2, 3, 4, 5\}$.

b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \cos x\}$.

c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 1\}$.

d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^2 = 1\}$.

e) $\mathcal{R}_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 = 4\}$.

f) $\mathcal{R}_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

g) $\mathcal{R}_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x = 2\}$.

Ej. 15 — Si consideramos las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuyas gráficas sean rectas, ¿son todas aplicaciones biyectivas?

Ej. 16 — Prueba que la función $f\colon [0,\infty) \to (0,1]$ definida $f(x) = \frac{1}{x+1}$ es inyectiva. ¿Es sobreyectiva?

Ej. 17 — Clasifica por el tipo las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida $f(x) = |x-1|$.

b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida $f(z) = \overline{z}$.

c) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, definida $f(z) = z\overline{z}$.

d) $t : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida

$$t(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Estructuras algebraicas

Ej. 18 — En el conjunto de los números naturales se definen las siguientes leyes de composición. Determina si son leyes de composición interna y en el caso que lo sean estudiar si cumplen la propiedad asociativa, conmutativa y poseen elemento neutro.

1. $a * b = a^b$
2. $a * b = a$

Ej. 19 — Sea $E = \{a,b,c,d\}$ y $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de las partes de E. Determina los elementos regulares de $\mathcal{P}(E)$ respecto de la operación unión $\cup$. Igual respecto de la intersección $\cap$.

Ej. 20 — En el conjunto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ se define la operación:

$$(a,b) * (c,d) = (ac, ad + bc)$$

Comprueba que $(E,*)$ es un grupo.

Ej. 21 — Encuentra los inversos de cada uno de los elementos del grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_{11}{}^*$.

Ej. 22 — Resuelve en el cuerpo $\mathbb{Z}_{11}$ el siguiente sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 7y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{array}\right\}$$

Nota: Todos los números pertenecen al cuerpo $\mathbb{Z}_{11}$.

Ej. 23 — Comprobar que el subconjunto de las matrices 3×3 siguiente

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

es un anillo unitario. ¿Es conmutativo? ¿Es cuerpo?

Números complejos

Ej. 24 — Prueba que las raíces n-simas de la unidad (complejas), es decir, las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, con $z \in \mathbb{C}$, forman un grupo abeliano con la operación producto.

Ej. 25 — Escribe en forma polar:

a) $2i$.

b) $1+i$.

c) $-3+\sqrt{3}i$.

d) $-i$.

e) $(2-i)^2$.

f) $|3-4i|$.

g) $\sqrt{5}-i$.

h) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)^4$.

Ej. 26 — Encuentra todas las soluciones (en forma rectangular) de las ecuaciones:

a) $z^6=1$.

b) $z^4=-16$.

c) $z^6=-9$.

d) $z^6-z^3-2=0$.

Ej. 27 — Dibuja los siguientes conjuntos en el plano complejo:

1. $\{z\in\mathbb{C}:|z-1+i|=2\}$.
2. $\{z\in\mathbb{C}:|z-1+i|\leq 2\}$.
3. $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(z+2-2i)=3\}$.
4. $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z+2-2i)=3\}$.
5. $\{z\in\mathbb{C}:|z-i|+|z+i|=3\}$.
6. $\{z\in\mathbb{C}:|z|=|z+1|\}$.

Ej. 28 — Prueba que $\overline{\operatorname{sen} z}=\operatorname{sen}(\overline{z})$ y $\overline{\cos z}=\cos(\overline{z})$.

Ej. 29 — Sea $z=x+iy$. Prueba que

1. $\operatorname{sen} z=\operatorname{sen} x\cosh y+i\cos x\operatorname{senh} y$.
2. $\cos z=\cos x\cosh y-i\operatorname{sen} x\operatorname{senh} y$.

Ej. 30 — Determina la imagen de la cinta $\{z\in\mathbb{C}:-\pi/2<\operatorname{Re} z<\pi/2\}$ bajo la función $f(z)=\operatorname{sen} z$.

Ej. 31 — ¿Hay alguna diferecia entre $\log\left(z^2\right)$ y $2\log z$?

Ej. 32 — Halla la imagen del anillo $1<|z|<e$ bajo el logaritmo principal.

Ej. 33 — Encuentra los valores principales de

a) $\log i$.

b) $(-1)^i$.

c) $\log(1+i)$.

Ej. 34 — Prueba que $|a^z|=a^{\operatorname{Re} z}$ si a es una constante real positiva.

Ej. 35 — Encuentra todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\mathsf{Log}(z)=\frac{\pi}{2}i$.

b) $\exp(z)=\pi i$.

c) $z^{1/2}=1+i$.