Ejercicios del tema 2

Estructuras Algebraicas

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.
E.T.S.I. de Telecomunicación.

Soluciones a los ejercicios.

Conjuntos, Relaciones, Funciones

Solución (Ej. 1) — (a) $\{2,6,8\}$, (b) $\{1,4\}$, (c) $U-\{4\}$, (d) $\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4)\}$

Solución (Ej. 2) — $[0,1)$ y $\{0\}$

Solución (Ej. 3) — 1.022

Solución (Ej. 4) —

a) V *b)* F *c)* F *d)* F *e)* F *f)* V *g)* V *h)* V

Solución (Ej. 5) — 22

Solución (Ej. 6) — $G_{\mathcal{R}} = \{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\}$

Solución (Ej. 7) —

1. Ninguna
2. $\left\{\begin{array}{l}\text{Antisimétrica}\\ \text{Transitiva}\end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l}\text{Reflexiva}\\ \text{Simétrica}\\ \text{Transitiva}\end{array}\right.$

Solución (Ej. 8) —

1. No es reflexiva, por ejemplo $2\not\mathcal{R}2$ y no es transitiva, por ejemplo $1\mathcal{R}5$ y $5\mathcal{R}$, pero $1\not\mathcal{R}1$.
2. $G_{\mathcal{R}} \cup \{(1,1),(2,2),(4,4),(5,5)\}$, la relación S resultante es de equivencia (la menor posible).
3. $A/S = \{[1] = \{1,5\}, [2] = \{2,4\}, [3] = \{3\}, [6] = \{6\}\}$

Solución (Ej. 9) — $A/\mathcal{R} = \{[1],[2]\}$

Solución (Ej. 10) — Es un orden parcial.

La gráfica que nos piden es un diagrama de Hasse:
$$\begin{tikzcd}
12 \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
6 \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & 4 \arrow[d, dash] \\
3 \arrow[dr, dash] & & 2 \arrow[dl, dash] \\
& 1 &
\end{tikzcd}$$

Solución (Ej. 11) — $[a] = \{a, 1-a\}$

Solución (Ej. 14) — Los dominios e imagen:

a) $\mathrm{Dom}\, R_1 = E, \quad \mathrm{Im}\, R_1 = \{2, 3, 5\}$.
b) $\mathrm{Dom}\, R_2 = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}\, R_2 = [-1, 1]$.
c) $\mathrm{Dom}\, R_3 = [-1, \infty), \quad \mathrm{Im}\, R_3 = \mathbb{R}$.
d) $\mathrm{Dom}\, R_4 = [1, \infty), \quad \mathrm{Im}\, R_4 = \mathbb{R}$.
e) $\mathrm{Dom}\, R_5 = \mathrm{Im}\, R_5 = [-2, 2]$
f) Igual.
g) $\mathrm{Dom}\, R_7 = \mathrm{Im}\, R_7 = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Solución (Ej. 15) — No, las funciones constantes no son inyectivas ni sobreyectivas.

Solución (Ej. 17) —

a) Sobreyectiva.
b) Biyectiva.
c) No inyectiva, no sobreyectiva.
d) Biyectiva.

Estructuras algebraicas

Solución (Ej. 20) — Neutro $e = (1, 0)$, simétrico $(a, b)' = (1/a, -b/a^2)$.

Solución (Ej. 21) — Algunos inversos son: $[2]^{-1} = [6]$ y $[5]^{-1} = [9]$

Solución (Ej. 22) — $x = 9, \; y = 4$

Solución (Ej. 23) — Sí, es anillo unitario conmutativo. No es cuerpo.

Números complejos

Solución (Ej. 24) — Basta expresar las soluciones de la forma $G = \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{n}} : 0 \leq k < n, \; k \in \mathbb{Z} \right\}$ y comprobar las propiedades de grupo abeliano.

Solución (Ej. 25) —

a) $2\, e^{\frac{i\pi}{2}}$
b) —
c) $2\sqrt{3}\, e^{\frac{i\,5\pi}{6}}$
d) —
e) $5\, e^{-2\, i\, \mathrm{atan}\left(\frac{1}{2}\right)}$
f) —
g) —
h) $4/9$

Solución (Ej. 26) —

a) $z = 1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, -1, -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, -\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
b) —
c) —
d) —

Solución (Ej. 31) — Si.

Solución (Ej. 32) —