Ejercicios del tema 3

Técnicas de Recuento

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.

E.T.S.I. de Telecomunicación.

Ej. 1 — ¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEF$ contienen las letras DEF juntas en cualquier orden?

Ej. 2 — Un comité de seis personas A, B, C, D, E, F debe escoger un presidente, un secretario y un tesorero. ¿De cuántas formas se puede hacer la elección? ¿De cuántas si el presidente debe ser A ó B?
¿De cuántas si E debe ocupar uno de los cargos? ¿De cuántas si A y F deben ocupar un cargo?

Ej. 3 — Se ha recibido un paquete de 100 discos compactos con cinco discos defectuosos. ¿De cuántas maneras se puede elegir una muestra de cuatro discos que contenga más discos defectuosos que no defectuosos?

Ej. 4 — Un autobús de 32 plazas numeradas (16 a la derecha y 16 a la izquierda) transporta a 28 alumnos de la E.T.S. Ingeniería Informática en su viaje de fin de carrera. ¿De cúantas formas pueden sentarse si tres de ellos sólo pueden ir a la derecha y cinco de ellos sólo a la izquierda?

Ej. 5 — ¿Cuántas cadenas de ocho bits hay? ¿Cuántas de ellas comienzan por 101? ¿Cuántas de ellas comienzan por 101 o tienen el cuarto bit igual a 1?

Ej. 6 — ¿Cuántos números de teléfono (de 9 cifras) tienen al menos un dígito repetido?

Ej. 7 — ¿Cuántas soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots x_6 = 20$ satisfacen $1 \leq x_i \leq 9$? (Utiliza incl. y excl.)

Ej. 8 — (Feb. 2012) Se tienen 6 alumnos de 1^{er} curso, 5 de 2º, 4 de 3º, 3 de 4º, 2 de 5º y 1 de 6º, como candidatos a recibir 5 premios de la Facultad de Medicina, uno al alumno menos charlatán, otro al más atento, otro al de mejor letra, otro al que más asiste a tutorías y otro al que mejor aparca el coche. Suponiendo que ningún alumno puede recibir más de un premio, se pide:

1. ¿De cuántas formas se pueden distribuir los premios?
2. A la persona encargada se le olvidó de grabar el nombre del premio en las copas. ¿De cuántas formas se pueden repartir ahora las copas si cada alumno puede recibir más de una?

Ej. 9 — (Dic. 2012) Se quieren formar cadenas de longitud 10 con los números 0, 1, 2 y 3. Se pide:

1. ¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar?
2. ¿Cuántas cadenas tienen peso 3 (es decir, la suma de sus cifras es 3)?

Ej. 10 — Calcula el número de formas en que pueden ordenarse los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$ de modo que el primer dígito es mayor que 1, el último es menor que 8 y el tercero es distinto de 5. (Usa inclusión y exclusión)

Ej. 11 — Se ha producido un robo y la policía interroga a dos testigos sobre la matrícula del vehículo utilizado para la huida (cuatro dígitos y dos letras de un alfabeto de 26). El primer testigo asegura que la segunda letra de la matrícula era una O o una Q y que el último dígito era un 3 o un 8. El segundo testigo asegura que la primera letra era una C o una G y el primer dígito era definitivamente un 7.

1. ¿Cuántas placas diferentes tendrá que verificar la policía?
2. Si en investigaciones posteriores la policía obtiene además que la matrícula no termina en 53 ni empieza en 78, ¿cuántas comprobaciones se tendrán que hacer en este caso?

Ej. 12 — Calcula cuántos números enteros hay entre 1000 y 9999 que cumplan las siguientes condiciones (independientes entre ellas):

1. La suma de sus dígitos es exactamente 9.
2. La suma de sus dígitos es exactamente 9 y son todos distintos de 0.
3. Ser impar y tener todos los dígitos diferentes.
4. Alguno de sus dígitos es 9.

Ej. 13 — Supongamos 7 pelotas de distintos colores y 4 recipientes numerados 1,2,3,4. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las pelotas para que no haya ningún recipiente vacío? Siendo una de las pelotas azul, ¿De cuántas formas la podemos distribuir si obligamos a la pelota azul a estar en el recipiente número 2, y que no haya ninguno vacío?

Ej. 14 — Los Reyes Magos traen n juguetes diferentes a n niños. En el camino deciden dejar a exactamente un niño sin juguete y repartir todos los juguetes entre los restantes niños. ¿De cuántas formas pueden hacerlo?

Ej. 15 — Completa la tabla siguiente indicando el número de maneras de distribuir nueve objetos en cinco recipientes:

Objetos (9)	Recipientes (5)	Posibilidad recipientes vacíos	Número de distribuciones
Indistinguibles	Distinguibles	Si	
Distinguibles	Distinguibles	No	
Distinguibles	Indistinguibles	No	

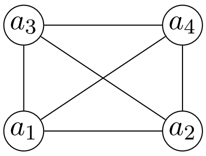
Ej. 16 — (Dic. 2011) Calcula el número de formas en que pueden ordenarse los dígitos $0, 1, 2, \ldots 9$ de modo que el primer dígito es mayor que 1, el último es menor que 8 y el tercero es distinto de 5. (Usa inclusión y exclusión).

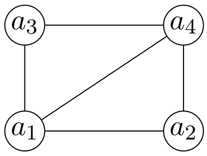
Ej. 17 — (Sept. 2012) Se tienen 4 bolas de golf y 10 cajas distintas. Determine de cuántas maneras diferentes pueden distribuirse las bolas en las cajas si:

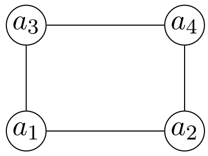
1. Todas las bolas son distintas y en ninguna caja cabe más de una bola.
2. Todas las bolas son iguales y en ninguna caja cabe más de una bola.
3. Todas las bolas son iguales y en cada caja caben cuantas bolas se quieran poner.

4. Todas las bolas son distintas y en cada caja caben cuantas bolas se quieran poner.

Ej. 18 — Para cada uno de los siguientes grafos: ¿De cuantas formas puede asignarse un color a cada vértice a_i de la figura, con n colores, de modo que dos vértices con una arista común deben tener necesariamente colores distintos?

1. 

2. 

3. 

Ej. 19 — Resuelve las siguientes ecuaciones de recurrencia

1. $a_{n+2} = a_n$ con $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.
2. $a_n = a_{n-1} + (n-1)$ con $a_0 = 1$.
3. $a_n = 2a_{n-1} + 2$ con $a_1 = 1$.
4. $a_n = a_{n-1} + (-1)^{n+1}$ con $a_1 = 1$.
5. $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n$ con $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
6. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 7a_n$ con $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
7. $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = n^2$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.
8. $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n$ con $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Ej. 20 — Resuelve las ecuaciones de recurrencia:

1. $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0$, con $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$.
2. $a_{n+1} + 4a_{n-1} = 2(a_n + 4a_{n-2})$ con $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$

Ej. 21 — Una pareja de conejos se reproduce mensualmente. Los meses pares tienen dos conejos y los impares uno. Encuentra un modelo de recurrencia para el número de conejos hijos a_n habidos hasta el n-ésimo mes. Resuélvela.

Ej. 22 — El número a_n de euros de activo de una compañía se incrementa cada año cinco veces lo que se incrementó el año anterior. Si $a_0 = 3$ y $a_1 = 7$ calcula a_n.

Ej. 23 — Un rumor se difunde vía telefónica entre n personas. El rumor está totalmente difundido cuando todas las personas han hablado entre sí. Sea u_n el número de llamadas realizadas con n personas ($n \geq 2$).

1. Define recursivamente la sucesión $\{u_n\}$.
2. Da una fórmula general de dicha sucesión.

Ej. 24 — Halla y resuelve la relación de recurrencia de la sucesión a_n que da el número de sucesiones ternarias (los términos de la sucesión pertenecen al conjunto $\{0, 1, 2\}$) de longitud n que no tienen dos ceros consecutivos.

Ej. 25 — Cada partícula en un reactor nuclear produce, sin destruirse, dos nuevas partículas cada segundo. Además cada segundo (desde $t = 0$) es inyectado al reactor una nueva partícula.

1. ¿Cuántas partículas hay en el reactor en el n-ésimo segundo?
2. Si el reactor estalla a partir de 10^{24} partículas ¿cuánto tiempo tarda en estallar?

Ej. 26 —
En un supermercado, las naranjas se encuentran apiladas en una pirámide de base cuadrada de forma que cada naranja está en contacto con cuatro naranjas de la capa inferior. Si la pirámide tiene n capas, ¿cuántas naranjas la forman?