Contents

3. Técnicas de Recuento

3.1. Principios de la suma y el producto

Principio de la suma

Si una tarea A tiene m resultados posibles y otra tarea B tiene n resultados posibles, todos diferentes, entonces el experimento de realizar **exclusivamente una** de las dos tareas, A o B, tiene $n + m$ posibles resultados.

Podemos enunciar este principio del siguiente modo:

Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, $|A \cup B| = |A| + |B|$

Principio del producto

Si una tarea A tiene m resultados posibles y otra tarea B tiene n resultados posibles, entonces el experimento de realizar **las dos** tareas, A y B, tiene $n \cdot m$ posibles resultados.

Podemos enunciar este principio del siguiente modo:

Si A y B son conjuntos finitos, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Ejercicio 1 *Los alumnos del primer curso se encuentran distribuidos en tres grupos, A, B y C; con 130, 125 y 150 alumnos respectivamente.*

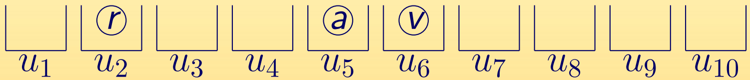
1. *Calcule el número de formas diferentes en que se puede nombrar un delegado para cada curso.*
2. *Calcule el número de formas diferentes en que se puede nombrar un representante de primero.*

Ejercicio 2 *Un comité de seis personas, A, B, C, D, E y F; debe escoger un presidente, un secretario y un tesorero. Calcule el número de formas diferentes de hacer la elección si:*

1. *No hay restricciones.*
2. *El presidente debe ser A o B.*
3. *E debe ocupar alguno de los cargos.*
4. *A y F deben ocupar cargos.*

3.2. Permutaciones

Ejercicio 3 *Deseamos repartir tres bolas de colores rojo, verde y azul, en diez urnas con capacidad para una única bola. Las urnas están numeradas del uno al diez. ¿De cuántas formas distintas se puede llevar a cabo este experimento?*



Ejercicio 4 *Sean* A *y* B *conjuntos finitos de cardinales* 3 *y* 10 *respectivamente. ¿Cuántas funciones inyectivas se pueden definir de* A *en* B*?*

Ejercicio 5 *Si* A *es un conjunto con cardinal 10 y queremos construir una lista de tres elementos distintos de* A*, ¿de cuántas formas lo podemos hacer?*

En esta sección trabajamos con sucesiones ordenadas que llamamos listas y que representaremos entre los símbolos $\langle$ y $\rangle$.

Dado un conjunto A de n elementos.

- Llamamos **permutación** de A a toda lista formada por sus n elementos.
- Llamamos r-**permutación** de A a cualquier lista formada por r elementos de A diferentes.

Ejemplo 6 *Consideramos el conjunto* $A = \{a, b, c, d, e\}$.

- $\langle a, c, d, b, e\rangle$ *es una permutación de* A.
- $\langle d, b, a\rangle$ *es una* 3*-permutación de* A.

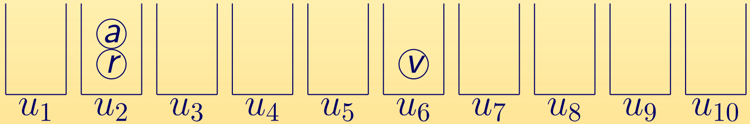
Denotaremos por $P(n, r)$ al número de r-permutaciones de n elementos.

Teorema 7 *Sean* n *y* r *números naturales. Si* $r \leq n$ *entonces*

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejercicio 8 *¿Cuántas funciones biyectivas se pueden definir entre dos conjuntos de cardinal* n*?*

Ejercicio 9 *Disponemos de diez urnas diferentes, numeradas del uno al diez. Tenemos, por otro lado, una bola roja, una verde y una azul. Si en cada urna podemos colocar más de una bola, ¿de cuántas formas diferentes podemos repartir las bolas entre las urnas? Generalize el resultado a n urnas diferentes y r bolas diferentes también.*



Dado un conjunto A de n elementos. Llamamos **r-permutación con repetición** de A a cualquier lista de r elementos de A iguales o diferentes.

Ejemplo 10 *Consideramos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$. $\langle d, d, a, b, a, b, c, a\rangle$ es una 8-permutación con repetición de A.*

Denotaremos por $PR(n, r)$ al número de r-permutaciones con repetición de n elementos.

Teorema 11 *Sean n, y r números naturales.*

$$PR(n, r) = n^r$$

Ejercicio 12 *¿Cuántas funciones se pueden definir entre dos conjuntos finitos?*

Llamamos $(n_1, n_2, \ldots, n_t)$-**permutación con objetos repetidos** de $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ a cualquier lista de elementos del conjunto donde, para cada $i \in \mathbb{N}_t^+$, el elemento x_i está repetido n_i veces.

Ejemplo 13 *Consideramos el conjunto* $A = \{a, b, c, d, e\}$. $\langle d, d, a, b, a, b, c, a\rangle$ *es una* $(3, 2, 1, 2, 0)$-*permutación con objetos repetidos de* A.

Denotaremos por $POR(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ al número de $(n_1, n_2, \ldots, n_t)$-permutaciones con objetos repetidos.

Teorema 14 *Sean* n *y* $n_1, n_2, \ldots, n_t$ *números naturales. Si* $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ *entonces*

$$POR(n_1, n_2, \ldots, n_t) = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_t} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_t!}$$

3.3. Combinaciones

Ejercicio 15 *Deseamos repartir entre diez urnas numeradas tres bolas iguales. Si las urnas tienen capacidad para una única bola, ¿de cuántas formas podremos hacer el reparto?*

Dado un conjunto X de n elementos. Llamamos r-**combinación** de X a cualquier selección no ordenada de r elementos de X, es decir, cualquier subconjunto de X de cardinal r.

Ejemplo 16 *Consideramos el conjunto* $A = \{a, b, c, d, e\}$. *El conjunto* $\{a, b, e\}$ *es una* 3-*combinación de* A. *En las combinaciones, el orden no es importante con lo que, por ejemplo,* $\{e, b, a\} = \{a, b, e\}$.

El número de r-combinaciones de n elementos lo denotamos por $C(n, r)$.

Teorema 17 *Sean* n *y* r *números naturales. Si* $r \leq n$ *entonces*

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

1. Si $n < r$, entonces $\binom{n}{r} = 0$.

2. Para todo número natural n, $\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$.

3. Si $0 \leq r \leq n$, entonces $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

4. Para todo $0 < r \leq n$, se cumple $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

$$
\begin{array}{cc|cccccc}
\multicolumn{2}{c|}{\binom{n}{r}} & & & r & & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
\hline
 & 0 & 1 & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & 2 & 1 & 2 & 1 & & & \\
n & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & \vdots & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Teorema 18 (Binomio de Newton) *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y n un número natural, entonces:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

Ejercicio 19 *Disponemos de 10 urnas diferentes con capacidad para más de una bola, y tres bolas iguales que se desean repartir entre las urnas. ¿De cuántas formas diferentes se puede realizar este reparto?*

Dado un conjunto X de n elementos. Llamamos **r-combinación con repetición** de X es una selección no ordenada de r elementos de X donde estos elementos pueden estar repetidos. Las r-combinaciones con repetición las notaremos entre los símbolos $\lceil$ y $\rceil$.

Ejemplo 20 *Consideramos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$. $\lceil a, a, a, b, b, d, d\rceil$ es una 7-combinación con repetición de A donde, de nuevo, el orden no es importante.*

El número de r-combinaciones con repetición de n elementos lo denotamos por $CR(n, r)$.

Teorema 21 *Sean n y r números naturales.*

$$CR(n, r) = \binom{n + r - 1}{r}$$

Ejercicio 22 *Disponemos de 10 urnas diferentes con capacidad para una única bola. Deseamos colocar en las urnas tres bolas rojas, dos azules y una verde. ¿Cuántos resultados diferentes podremos obtener?*

r	r	a		a	v		r		
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}

El siguiente teorema justifica que los números del tipo $\begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_t \end{pmatrix}$ reciban el nombre de **números multinomiales**.

Teorema 23 *Dados* $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \mathbb{R}$ *y* n *un número natural, entonces*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_t)^n = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_t) \in A} \begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_t \end{pmatrix} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_t^{n_t}$$

donde $A = \{(n_1, n_2, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t \text{ tal que } n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n\}$

Ejemplo 24

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= \binom{3}{3,0,0}a^3+\binom{3}{0,3,0}b^3+\binom{3}{0,0,3}c^3+\\ &+\binom{3}{2,1,0}a^2b+\binom{3}{2,0,1}a^2c+\binom{3}{1,2,0}ab^2+\\ &+\binom{3}{0,2,1}b^2c+\binom{3}{1,0,2}ac^2+\binom{3}{0,1,2}bc^2+\binom{3}{1,1,1}abc\\ &= a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2+6abc\end{aligned}$$

3.4. Principio de inclusión y exclusión

Sean $A_1, A_2, ...A_n$ conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 ... + (-1)^{n+1}\alpha_n$$

donde α_i es la suma de los cardinales de todas las intersecciones posibles de i conjuntos $(1 \leq i \leq n)$.

Ejercicio 25 *Una secretaria algo distraída debe colocar cinco cartas en cinco sobres. Las cartas y los sobres tienen la dirección impresa. ¿De cuántas formas distintas puede lograr la hazaña de no acertar ninguna?*

Teorema 26 *El número de aplicaciones sobreyectivas diferentes que se pueden establecer de un conjunto A de cardinal n en otro conjunto B de cardinal r con $r \leq n$ es*

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (r-i)^n$$

3.5. Particiones

Dado un conjunto A, se dice que una familia de subconjuntos de éste, $A_1, A_2, ...A_k$ forman una **partición** de A si cumple las siguientes restricciones:

i. $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_k = A$

ii. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1..k\} \quad i \neq j$

Llamaremos **partes** de la partición a cada uno de los subconjuntos A_i

Cada elemento del conjunto A debe estar en una y solo una de las partes.

El número de particiones 'diferentes' que se pueden establecer de un conjunto A de cardinal n en k partes $(1 \leq k \leq n)$ será representado por $S(n, k)$ y reciben el nombre de **números de Stirling de segunda especie**. A la hora de calcularlos es importante tener en cuenta que el orden de las partes es irrelevante.

Teorema 27 *El número de particiones diferentes de un conjunto de cardinal n en k partes es:*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

Teorema 28 *Sea $S(n,k)$ el número de particiones de un conjunto A de cardinal n en k partes ($1 \le k \le n$). Entonces:*

i. $S(n,1) = 1$

ii. $S(n,n) = 1$

iii. $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$

Utilizando este teorema se construye fácilmente el siguiente triángulo:

$S(n,k)$		k					
		1	2	3	4	5	...
n	1	1					
	2	1	1				
	3	1	3	1			
	4	1	7	6	1		
	5	1	15	25	10	1	
	...			...			...

3.6. Principio del palomar

El último principio básico que presentamos en este tema afirma que, si consideramos dos conjuntos finitos, A y B, y una aplicación $f : A \to B$,

$$|A| > |B| \text{ implica que } f \text{ no es inyectiva.}$$

Este principio, que se conoce como principio del palomar, puede ayudar a resolver problemas aparentemente complejos. Otro forma usual de enunciar este principio, que resulta mucho más fácil de recordar y que le da nombre, es la siguiente:

Principio del palomar
Si en un palomar hay más palomas que nidos, al menos en un nido debe encontrarse más de una paloma.