TEMA 4

ESPACIOS VECTORIALES

Índice

4.1. Definición y propiedades

Llamaremos espacio vectorial a una estructura algebraica $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ formada por un conjunto no vacío V junto con un cuerpo $\mathbb{K}$ dotados de dos operaciones: una interna en V llamada suma $(+)$ y un producto externo $(\mathbb{K} \times V \to V)$ que verifican:

A los elementos de V se les llama *vectores* y a los del cuerpo se les llama *escalares* o números.

- $(V, +)$ es un grupo abeliano.
- El producto externo verifica

  1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V \quad (\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \lambda(\vec{v}+\vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V \quad \lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
4. $\forall \vec{v} \in V \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Nota. A lo largo de este curso el cuerpo de escalares será, salvo que se diga lo contrario, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (números reales) o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (números complejos).

Ejercicio 4.1. *¿El conjunto de todas las funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ es un espacio vectorial real? Y el conjunto de las funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ ¿lo es?*

Proposición 4.2. *Las principales propiedades de un espacio vectorial son:*

1. $\forall \vec{v} \in V \quad 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Demostración. $\lambda\vec{v} = (\lambda + 0) \cdot \vec{v}$ y por la hipótesis 1 del producto externo, $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v} + 0 \cdot \vec{v}$ y por ser $(V, +)$ grupo tenemos $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$. □

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Demostración. $\lambda\vec{v} = \lambda(\vec{v} + \vec{0})$ y por la hipótesis 2 del producto externo, $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v} + \lambda \cdot \vec{0}$ y por ser $(V, +)$ grupo tenemos $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$. □

3. $\lambda\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ *o* $\vec{v} = \vec{0}$

Demostración. Supongamos $\lambda\vec{v} = \vec{0}$. Si $\lambda = 0$ ya estaría probado y si $\lambda \neq 0$, por ser un elemento del cuerpo, existe λ^{-1}, luego $\lambda^{-1}(\lambda\vec{v}) = \vec{0}$ como acabamos de probar. Aplicando las hipótesis 3 y 4 del producto externo tenemos $\vec{v} = \vec{0}$. □

4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V \quad (-\lambda)\vec{v} = \lambda(-\vec{v}) = -(\lambda\vec{v})$

Demostración. Como $(V, +)$ es un grupo abeliano, el opuesto de $\lambda\vec{v}$ es único, por tanto únicamente tenemos que probar

$$\lambda\vec{v} + (-\lambda)\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad \lambda\vec{v} + \lambda(-\vec{v}) = \vec{0}$$

Dejamos los detalles para el alumno. □

Ejemplos 4.3. Los siguientes conjuntos con las operaciones correspondientes son espacios vectoriales reales:

1. Los vectores libres del plano (o del espacio).
2. $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$.
3. El cuerpo $\mathbb{R}$ es espacio vectorial sobre el propio cuerpo. En este espacio vectorial, los elementos del cuerpo son vectores y escalares.
4. En general, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

5. $\mathbb{C}^n$ es también un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Este espacio vectorial es distinto al también espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

6. Los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ forman también un espacio vectorial real.

7. Las matrices reales $m \times n$.

4.1.1. Dependencia e independencia lineal

Dado un espacio vectorial V, llamaremos sistema de vectores a un conjunto finitode vectores $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de V.

Definición 4.4. Decimos que $\vec{v}$ es *combinación lineal* del sistema $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ si, y sólo si, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots \lambda_k\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\vec{v}_i$$

Definición 4.5. Un sistema de vectores $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ se dice que es:

- *Linealmente Dependiente* (L.D.) si existe una combinación lineal de los vectores de X nula, $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ con algún escalar λ_i no nulo.

- En caso contrario se dice que es *Linealmente Independiente* (L.I.), es decir,

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Ejercicio 4.6. *Aplica la anterior definición para comprobar si los vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes*

$$\{(0,-1,2,-1), (-1,1,0,1), (-1,-1,4,-1)\}$$

forman un sistema linealmente dependiente o independiente.

Ejercicio 4.7. *Comprueba que los vectores de $V = P[x]$ (polinomios de variable x) siguientes*

$$\{2, x-1, x^2\}$$

forman un sistema linealmente independiente.

A continuación exponemos propiedades de la dependencia e independiencia lineal. Demostramos una de ellas y dejamos las demás como ejercicio para el alumno.

Propiedades:

Probamos la primera y dejamos la demostración de las demás como ejercicio.

1. Un sistema de vectores es linealmente dependiente si y solo si alguno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los restantes.

   Demostración. Supongamos que el sistema es L.D., es decir

   $$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0} \text{ y algún } \lambda_i \neq 0$$

   podemos despejar $\vec{v}_i = \sum_{j\neq i} \frac{-\lambda_j}{\lambda_i}\vec{v}_j$, es decir, $\vec{v}_i$ es combinación lineal de los restantes.

   Veamos la implicación contraria. Sea un vector combinación lineal de los restantes, supongamos, sin pérdida de generalidad, que es $\vec{v}_n$. Entonces $\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\vec{v}_i$ y, por tanto,

   $$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\vec{v}_{n-1} + (-1)\vec{v}_n = \vec{0}$$

   de donde el sistema de vectores es L.D. □

2. Un sistema de vectores que contenga al vector $\vec{0}$ siempre es linealmente dependiente.

3. Un sistema con *un único vector no nulo* siempre es linealmente independiente.

4. Todo sistema de vectores *contenido* en otro linealmente independiente, también es linealmente independiente.

5. Si un sistema de vectores *contiene* otro que es linealmente dependiente, entonces también es linealmente dependiente.

Independencia de vectores y sistemas de ecuaciones homogéneos

Si igualamos a $\vec{0}$ una combinación lineal de un sistema de vectores X de $\mathbb{K}^n$, es decir

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

expresados los vectores $\vec{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})$, obtenemos

$$\lambda_1(v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) + \lambda_2(v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) + \ldots$$
$$\cdots + \lambda_k(v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{kn}) = (0, 0, \ldots, 0)$$

que se traduce como un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} v_{11}\lambda_1 + v_{21}\lambda_2 + \cdots + v_{k1}\lambda_k = 0 \\ v_{12}\lambda_1 + v_{22}\lambda_2 + \cdots + v_{k2}\lambda_k = 0 \\ \vdots \\ v_{1n}\lambda_1 + v_{2n}\lambda_2 + \cdots + v_{kn}\lambda_k = 0 \end{array}\right\}$$

Entonces, el sistema X de vectores será linealmente independiente si y solo si el sistema de ecuaciones es compatible determinado (tiene solución única, $\lambda_i = 0$). Podemos enunciar, entonces, el siguiente resultado:

Teorema 4.8. *Un sistema de k vectores de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente si y solo si $k \leq n$ y la matriz real (compleja) formada por los vectores de X puestos en filas o columnas tiene rango k.*

Así, si v_{ij} es la coordenada j del vector $\vec{v}_i$, la matriz de los vectores, puestos en columnas, es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \ldots & v_{k1} \\ v_{12} & v_{22} & \ldots & v_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \ldots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

Corolario 4.9. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el* número máximo de vectores *de $\mathbb{K}^n$ linealmente independientes en un sistema X,* es el rango *de la matriz formada por sus vectores columna (o fila).*

Ejemplo 4.10. El sistema de vectores de $\mathbb{R}^4$ expresados en el ejercicio 4.6 es *linealmente dependiente*. Calculamos el rango de la matriz de vectores (columnas)

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

puesto que $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y los únicos menores (orlados) de orden 3 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

4.2. Subespacios vectoriales

Definición 4.11. Diremos que un subconjunto $S \neq \emptyset$ de un espacio vectorial V es un *subespacio vectorial* si tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones heredadas de V.

Nota. Los subconjuntos $S = V$ y $S = \{\vec{0}\}$ son siempre subespacios vectoriales de V llamados *subespacios triviales*.

Para ver si un subconjunto no vacío de un espacio vectorial es un subespacio, no es necesario comprobar que se cumplen todas las hipótesis descritas en la página 102, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 4.12 (de caracterización)**.** *Dado $S \neq \emptyset$ subconjunto de un espacio vectorial V. La condición necesaria y suficiente para que S sea subespacio de V, es que se verifique:*

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in S \text{ para cada } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ y para cada } \vec{v}, \vec{w} \in S$$

Demostración. La primera implicación es trivial, es decir si S es subespacio vectorial entonces, claramente, se cumple que cualquier combinación de vectores de S es de S.

Veamos la implicación contraria.

- Para ver que $(S, +)$ es grupo abeliano, observamos que si $\vec{v}, \vec{w} \in S$, para $\lambda = \mu = 1$, tenemos que $\vec{v} + \vec{w} \in S$. Además el opuesto de un vector de S también está en S, con más que hacer $\lambda = 1$ y $\mu = 0$ (o al revés). El resto de las propiedades de grupo se obtienen fácilmente.
- Observamos que para cualquier $\vec{v} \in S$ y para cualquier escalar λ se tiene que $\lambda\vec{v} \in S$ (basta considerar $\mu = 0$). De aquí, las cuatro hipótesis del producto escalar por vector, se verifican trivialmente en S porque se verifican en V.

□

Ejemplo 4.13.

1. En el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, el conjunto de las funciones continuas es un subespacio vectorial.
2. Si consideramos el espacio de las matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de orden 2×2, el siguiente subconjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4.14. *De los siguentes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ cuáles son subespacios vectoriales y cuáles no (y por qué).*

1. $S = \{(1, a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
2. $S = \{(0, a^2, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
3. $S = \{(0, a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Sistemas generadores

Proposición 4.15. *Si $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ es un sistema de vectores, el* conjunto de todas las combinaciones lineales *de X posibles forman un subespacio vectorial que se representa por $L(X)$.*

Demostración. Sean $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i$ y $\vec{w} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \vec{v}_i$ combinaciones lineales de X, entonces, dados λ y μ escalares tenemos:

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \lambda \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i + \mu \sum_{i=1}^{k} \mu_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\lambda\lambda_i + \mu\mu_i)}_{=\gamma_i} \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{v}_i$$

que es una nueva combinación lineal. □

Definición 4.16. Al conjunto $L(X)$ de la proposición 4.15 anterior se le denomina *subespacio generado* por el sistema de vectores X y al sistema de vectores X se le llama *sistema generador* del subespacio.

Ejercicio 4.17. *Da varias funciones del subespacio generado por las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$ en el espacio de las funciones reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.*

4.2.1. Ecuaciones de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Cuando el espacio vectorial en el que trabajamos es $V = \mathbb{R}^n$ existen dos formas clásicas de expresar un subespacio vectorial S de V.

Todo lo que sigue en esta subsección se puede extender a subespacios vectorials de $\mathbb{C}^n$.

Ecuaciones paramétricas o explícitas

Supongamos el subespacio $S = L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\})$ generado por k vectores linealmente independientes. Entonces, cualquier vector $\vec{x} \in S$ es de la forma

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k$$

que, por coordenadas, podemos escribirla como n ecuaciones que dependen de k parámetros.

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & v_{11}\lambda_1 + v_{21}\lambda_2 + \cdots + v_{k1}\lambda_k \\ x_2 & = & v_{12}\lambda_1 + v_{22}\lambda_2 + \cdots + v_{k2}\lambda_k \\ & \vdots & \\ x_n & = & v_{1n}\lambda_1 + v_{2n}\lambda_2 + \cdots + v_{kn}\lambda_k \end{array}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Por tanto, todos los vectores $(x_1, x_2 \dots, x_n) \in S$ se consiguen variando de todas las formas posibles los parámetros λ_i.

Ejemplo 4.18. Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los dos vectores $(0,1,3,1)$ y $(-1,0,0,1)$. Entonces, según lo anterior, sus ecuaciones paramétricas serán

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\mu \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= 3\lambda \\ x_4 &= \lambda + \mu \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 4.19. *Encuentra tres o más vectores del subespacio del ejemplo 4.18 anterior cuya coordenada x_4 sea 10.*

Ecuaciones cartesianas o implícitas

Si eliminamos todos los parámetros λ_i de las ecuaciones paramétricas anteriores, nos resultan las relaciones (lineales) existentes entre las n variables x_i en las que no intervienen parámetros.

Por otro lado, podemos pensar que cualquier vector $\vec{x}$ del subespacio es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, supuesto que son linealmente independientes, y por el corolario 4.9 sabemos que la matriz

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \ldots & v_{k1} & x_1 \\ v_{12} & v_{22} & \ldots & v_{k2} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \ldots & v_{kn} & x_n \end{pmatrix}$$

tiene rango k, luego todos los menores de orden $k+1$ son cero. Desarrollando estos menores resultan, entonces, $m = n - k$ ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones cartesianas}$$

cuyas soluciones forman el subespacio vectorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nota. Al estar definido un subespacio vectorial como las soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, todos los sistemas equivalentes son ecuaciones implícitas del mismo subespacio.

Ejemplo 4.18 (Continuación)**.** Para calcular las ecuaciones cartesianas del subespacio del ejemplo definido en la página 108, el procedimiento natural sería eliminar los parámetros, así, despejando λ:

$$\lambda = x_2 \quad \lambda = \frac{1}{3}x_3 \quad \lambda = x_4 - \mu$$

tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -\mu \\ 3x_2 = x_3 \\ x_2 = x_4 - \mu \end{array}\right\}$$

y, despejando μ

$$\mu = -x_1 \quad \mu = x_4 - x_2$$

que transforman las ecuaciones anteriores en

$$\left.\begin{array}{l} 3x_2 = x_3 \\ -x_1 = x_4 - x_2 \end{array}\right\} \text{equivalente a} \quad \left.\begin{array}{l} 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

Una alternativa a este método sería el siguiente:

Si (x_1, x_2, x_3, x_4) es un vector del subespacio, entonces, por el corolario 4.9, la matriz siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 3 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Utilizando transformaciones elementales por filas, tenemos que la siguiente matriz también tiene rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - 3x_2 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

que también nos da las ecuaciones cartesianas (4.1) anteriores.

Todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ se puede representar por ecuaciones cartesianas que son un sistema de ecuaciones lineal homogéneo. El inverso, también es cierto:

Proposición 4.20. *El conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo con n incógnitas siempre es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Es trivial y se deja como ejercicio para el alumno. □

4.3. Bases y dimensión

Definición 4.21 (Base de un espacio vectorial)**.** Un sistema de vectores $\mathcal{B}$ (finito o infinito) es una *base* de un espacio vectorial V si y solo si

1. Todo subconjunto finito es linealmente independiente
2. $\mathcal{B}$ es un sistema generador de V.

Ejercicio 4.22. *Comprueba que los vectores del Ejemplo 4.18 anterior, en página 108, son una base para el subespacio que se define.*

Ejemplo 4.23. Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ tienen siempre una base distinguida, llamada *base canónica* del siguiente modo

$$\mathcal{B} = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$$

Ejercicio 4.24. *Determina la dimensión de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$. ¿Y cual es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$?*

El siguiente teorema, que damos sin demostración, nos dice que cualquier espacio vectorial (no sólo $\mathbb{R}^n$) tiene una base y nos permite definir el concepto de dimensión.

Es decir, entre dos bases siempre existe una función biyectiva.

Teorema 4.25 (de la base)**.** *Todo espacio vectorial distinto de $\{\vec{0}\}$ admite (al menos) una base. Además todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal.*

A este cardinal se le llama dimensión *del espacio vectorial V, representada por* $\dim V$ *y entendemos que es el número de elementos que contiene la base. Convenimos que* $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Nota. Por tanto existen dos tipos de espacios vectoriales, los que tienen dimensión finita y los que tienen dimensión infinita. $\mathbb{R}^n$ y sus subespacios son ejemplos de espacios de dimensión finita (objeto principal de este curso). Existen subespacios vectoriales de dimensión finita de espacios de dimensión infinita, pero nunca al contrario.

Ejemplo 4.26. El sistema $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ es una base infinita para el espacio vectorial $V = P[x]$ de los polinomios. que es, por tanto, de dimensión infinita.

Si consideramos $S = P^3[x]$ el subconjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3, estamos ante un subespacio del anterior y el sistema $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base. Por tanto $\dim S = 4$.

Nota. Salvo que se diga lo contrario, todos los espacios vectoriales que usaremos a lo largo de este curso serán de dimensión finita.

Coordenadas de un vector

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Entonces todo vector $\vec{v} \in V$ se puede expresar *de forma única* como combinación lineal de $\mathcal{B}$.

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$$

Definición 4.27. A la única n-upla formada por los escalares $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se le llama *coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}$*.

Comprobemos que, efectivamente las coordenadas son únicas:

Demostración. La expresión $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ existe porque $\mathcal{B}$ es un sistema generador, por tanto $\vec{v}$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{B}$. Para ver que es única lo haremos como (casi) siempre, suponemos que existen dos y comprobamos que son iguales. Sea

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n = a'_1\vec{e}_1 + a'_2\vec{e}_2 + \cdots + a'_n\vec{e}_n$$

entonces

$$(a_1 - a'_1)\vec{e}_1 + (a_2 - a'_2)\vec{e}_2 + \cdots + (a_n - a'_n)\vec{e}_n = \vec{0}$$

y, por ser $\mathcal{B}$ un sistema linealmente independiente necesariamente los escalares

$$(a_i - a'_i) = 0 \iff a_i = a'_i$$

lo cual prueba que la expresión es única. $\square$

4.3.1. Cambio de base

Sea V un espacio vectorial de $\dim V = n$ y sean $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $B' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ dos bases. Dado un vector $\vec{x} \in V$, éste tendrá coordenadas distintas según que base, así

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \tag{4.2}$$

$$\vec{x} = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{B'} \Rightarrow \vec{x} = x'_1\vec{e'}_1 + x'_2\vec{e'}_2 + \cdots + x'_n\vec{e'}_n \tag{4.3}$$

Y cada vector de una de las bases tendrá unas coordenadas respecto a la otra base, en particular consideramos las coordenadas los vectores de $\mathcal{B}$ (*base antigua*) en la base $\mathcal{B}'$ (*base nueva*), así

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= p_{11}\vec{e'}_1 + p_{21}\vec{e'}_2 + \cdots + p_{n1}\vec{e'}_n \\
\vec{e}_2 &= p_{12}\vec{e'}_1 + p_{22}\vec{e'}_2 + \cdots + p_{n2}\vec{e'}_n \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \\
\vec{e}_n &= p_{1n}\vec{e'}_1 + p_{2n}\vec{e'}_2 + \cdots + p_{nn}\vec{e'}_n
\end{aligned}$$

que, sustituyendo en (4.2) nos da una expresión de $\vec{x}$ diferente

$$\vec{x} = x_1(p_{11}\vec{e'}_1 + \cdots + p_{n1}\vec{e'}_n) + x_2(p_{12}\vec{e'}_1 + \cdots + p_{n2}\vec{e'}_n) + \ldots$$
$$\cdots + x_n(p_{1n}\vec{e'}_1 + \cdots + p_{nn}\vec{e'}_n)$$

y reordenando la expresión y comparando con la igualdad (4.3) tenemos

$$\vec{x} = (\underbrace{x_1 p_{11} + x_2 p_{12} + \cdots + x_n p_{1n}}_{=x'_1})\vec{e'}_1 + (\underbrace{x_1 p_{21} + \cdots + x_n p_{1n}}_{=x'_2})\vec{e'}_2 + \ldots$$
$$\cdots + (\underbrace{x_1 p_{n1} + \cdots + x_n p_{nn}}_{=x'_n})\vec{e'}_n$$

que nos produce un sistema de ecuaciones lineales cuadrado, cuya expresión matricial es la siguiente

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

abreviadamente escribimos

$$P \cdot X = X',$$

siendo X y X' las coordenadas del vector $\vec{x}$ expresadas como matrices columna. A la matriz P se le llama *matriz del cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$*.

Observaciones: La matriz P se construye poniendo en sus columnas las coordenadas de los vectores $\vec{e}_i \in \mathcal{B}$ (base antigua) respecto de la base B' (base nueva).

Observa también que P es invertible, puesto que es la matriz de un sistema lineal de ecuaciones $n \times n$ que tiene solución única y, por el teorema de Rouché-Fröbenius, $\det(P) \neq 0$.

Por tanto, la expresión $PX = X'$ es equivalente a $P^{-1}X' = X$ que representa el cambio de base en sentido contrario

Ejercicio 4.28. *Calcula las matrices de cambio de base entre la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base siguiente $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,0,1)\}$. Además, usa la que corresponda para calcular las coordenas del vector $(1,1,1,1)$ en la base $\mathcal{B}$.*

4.3.2. Bases de subespacios

Proposición 4.29. *Sean V un espacio vectorial y S un subespacio vectorial de V tal que $\dim S = \dim V = n$. Entonces $S = V$.*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base de S, entonces contiene n vectores linealmente independientes de V. Sólo queda ver que es un sistema generador del propio V. Para ello consideremos $\vec{x} \in V$ cualquier vector no contenido en $\mathcal{B}$, entonces el sistema $\mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$ es necesariamente linealmente dependiente porque son $n+1$ vectores en un espacio de dimensión n. Esto obliga a que $\vec{x}$ sea combinación lineal de $\mathcal{B}$. □

Como consecuencia del resultado anterior probaremos el siguiente que nos será de utilidad.

Teorema 4.30 (de la base incompleta)**.** *Sea S un subespacio vectorial de V de dimensión n, con base $\mathcal{B}_S = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\}$ ($m \leq n$), entonces podemos añadir $n - m$ vectores a dicha base,*

$$\mathcal{B} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-m}\}$$

para que sea una base (completa) de V.

Demostración. Si $S = V$ (es decir, $n - m = 0$) la base ya está completa, con lo que hemos terminado. En caso contrario, existe algún vector $\vec{e}_1$ en V que no está en S, por tanto el sistema $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m, \vec{e}_1\}$ es linealmente independiente y es una base de un subespacio S_1 de V.

Si S_1 coincide con V (es decir, $n - m = 1$) ya hemos acabado, en caso contrario repetimos el procedimiento $S_2, S_3, \dots S_{n-m}$ hasta llegar a un subespacio que coincida con V. □

Ejercicio 4.31. *Para comprender mejor el teorema anterior, elige una base cualquiera del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ del ejemplo 4.18. Amplía dicha base a una de todo el espacio $\mathbb{R}^4$.*

4.4. Operaciones con subespacios

4.4.1. Intersección de subespacios

Observa que la intersección de dos subespacios de un espacio vectorial nunca es vacía puesto que el vector $\vec{0}$ está en ambos. Además la intersección de dos subespacios también es subespacio vectorial. Vamos a probar que esto es cierto y algo más, la intersección de cualquier familia de subespacios vectoriales es subespacio vectorial.

Teorema 4.32. *Dada una familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de subespacios vectoriales de V, la intersección $\bigcap_{i \in I} S_i$ es también subespacio vectorial.*

Demostración. Aplicamos el teorema 4.12 de caracterización de subespacios. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \bigcap_{i\in I} S_i$, y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, entonces para cada $i \in I$ se tiene que $\vec{v}, \vec{w} \in S_i$, que como son subespacios vectoriales se cumple

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in S_i \text{ para cada } i \in I$$

por tanto, $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in \bigcap_{i\in I} S_i$. □

Nota. Obsérvese que la unión de subespacios no es un subespacio. (Encuentra algún contraejemplo que lo corrobore).

Ejemplo 4.33. Consideremos los subespacios S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^5$ siguientes

$$S_1 = L(\{(1,2,-1,0,1),(0,1,1,0,-1),(1,0,-3,0,3)\})$$

$$S_2 \equiv \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

vamos a calcular la intersección de ambos.
Calculamos, en primer lugar, las ecuaciones cartesianas de S_1. La matriz de vectores $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, y comprobamos que los dos primeros vectores son linealmente independientes, por tanto nos quedamos con ellos como base de S_1. Entonces, si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ es un vector de S_1 la nueva matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \\ 1 & -1 & x_5 \end{pmatrix}$ sigue teniendo rango 2, Aplicando el método de Gauss obtenemos la siguiente matriz equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 3x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_5 \end{pmatrix}$$

que nos da las ecuaciones cartesianas:

$$S_1 \equiv \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Unimos por tanto, las ecuaciones de S_1 y S_2 para tener el siguiente sistema, cuyas soluciones son el espacio intersección $S_1 \cap S_2$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible determinado, por tanto, el vector $(x_1, \ldots, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ representa la única solución. Es decir,

$$\boxed{S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}}$$

A título ilustrativo, vemos a continuación que el subespacio generado puede verse como la intersección de subespacios. El siguiente teorema describe una forma distinta de construir $L(X)$.

Proposición 4.34. *El subespacio generado $L(X)$ es la intersección de todos los subespacios que contienen a X.*

Demostración. Representamos por $\mathcal{F}$ la familia de subespacios vectoriales que continen a X, entonces, como $L(X)$ es un subespacio vectorial y contiene a X, es, por tanto, un miembro de la familia luego una inclusión es evidente

$$\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S \subseteq L(X)$$

Veamos la inclusión contraria, si S es un miembro de $\mathcal{F}$ entonces (por ser subespacio vectorial y contener a X) contiene todas las combinaciones lineales de los vectores de X, es decir, $L(X)$. Dicho de otro modo, $L(X) \subseteq S$, para cada $S \in \mathcal{F}$, luego

$$L(X) \subseteq \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$$

que completa la igualdad. □

4.4.2. Suma de subespacios

Ya hemos visto que la unión de subespacios vectoriales no es necesariamente un subespacio vectorial. Para solucionar este problema se extiende la unión lo necesario (y suficiente) para que sí sea un subespacio vectorial. Lo vemos en la siguiente definición.

Definición 4.35. Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2 de V se define la *suma de subespacios vectoriales* como el conjunto

$$S_1 + S_2 = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \mid \vec{v}_1 \in S_1 \text{ y } \vec{v}_2 \in S_2\}.$$

La suma $S_1 + S_2$ de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial

Demostración. Aplicamos el teorema 4.12. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores de $S_1 + S_2$, entonces $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ y $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ siendo $\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in S_1$ y $\vec{v}_2, \vec{w}_2 \in S_2$, luego

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = (\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{w}_1) + (\lambda\vec{v}_2 + \mu\vec{w}_2) \in S_1 + S_2$$

□

Proposición 4.36. *Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de V de bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, respectivamente, entonces*

$$S_1 + S_2 = L(S_1 \cup S_2) = L(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

Demostración. La demostración es trivial y la dejamos como ejercicio para el alumno. $\square$

Ejemplo 4.37. Calculemos la suma de los subespacios siguientes de $\mathbb{R}^4$

$$S_1 = L(\{(1,0,2,0),(0,1,1,1)\}) \quad \text{y} \quad S_2 \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Nos dan una base de S_1 y obtenemos una base de S_2 resolviendo el sistema de ecuaciones que lo define,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \lambda \end{array}\right\}$$

por tanto $\mathcal{B}_2 = \{(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$ es una base de S_2. Por tanto

$$S_1 + S_2 = L(\{(1,0,2,0),(0,1,1,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\})$$

y como rango $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 2&1&0&1 \\ 0&1&1&0 \end{pmatrix} = 3$ elegimos tres vectores independientes (por ejemplo, los tres primeros). Para calcular su ecuación cartesiana aplicamos el método de Gauss a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&x_1 \\ 0&1&1&0&x_2 \\ 2&1&0&1&x_3 \\ 0&1&1&0&x_4 \end{pmatrix} \underset{\leftrightsquigarrow}{\text{Por filas}} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&x_1 \\ 0&1&0&1&-2x_1+x_3 \\ 0&0&1&-1&2x_1+x_2-x_3 \\ 0&0&0&0&-x_2+x_4 \end{pmatrix}$$

que nos da la ecuación

$$\boxed{x_2 - x_4 = 0}$$

Suma directa de subespacios

Definición 4.38. Si $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$, entonces $S_1 + S_2$ se llama *suma directa* y se representa $S_1 \oplus S_2$.

Ejercicio 4.39. *Calcula la intersección de los subespacios S_1 y S_2 del e4.37 para comprobar si la suma que allí se calcula es directa o no.*

Definición 4.40. Dos subespacios S_1 y S_2 se dice que son *suplementarios* si y solo si $S_1 \oplus S_2 = V$.

Ejercicio 4.41. *Expresa $\mathbb{R}^5$ como suma directa de dos subespacios. Hazlo ahora como suma de directa de tres subespacios.*

Ejercicio 4.42. *Calcula el subespacio suma directa $S_1 \oplus S_2$ de los subespacios del Ejemplo 4.33, en página 114.*

Teorema 4.43 (Fórmula de Grassmann)**.** *Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces*

1. $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$
2. $\dim(S_1 \oplus S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$

4.5. Espacios cocientes

Si S es un subespacio vectorial de V podemos definir la siguiente relación de equivalencia en V.

$$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{w} - \vec{v} \in S$$

Veamos que, efectivamente, es de equivalencia:

Demostración.

1. Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v}$ es trivial, puesto que es equivalente a $\vec{0} \in S$.
2. Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{w} - \vec{v} \in S \iff \vec{v} - \vec{w} \in S \iff \vec{w} \sim \vec{v}$.
3. Transitiva: $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{x} \iff \vec{w} - \vec{v} \in S$ y $\vec{x} - \vec{w} \in S \iff \vec{x} - \vec{v} \in S \iff \vec{v} \sim \vec{x}$.

□

Podemos dotar al *conjunto cociente* de suma y producto por un escalar: Se definen: **la suma** como $[\vec{v}] + [\vec{w}] = [\vec{v} + \vec{w}]$ y **el producto** $\lambda[\vec{v}] = [\lambda\vec{v}]$, lo que nos da una estructura de espacio vectorial llamado *Espacio Vectorial cociente V/S.*

Demostración. Esencialmente consiste es comprobar que la suma de clases y el producto de un escalar por una clase de equivalencia son operaciones, es decir, no dependen del representante de la clase elegido, es decir, $\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2$ y $\vec{w}_1 \sim \vec{w}_2$, entonces $[\vec{v}_1] + [\vec{w}_1] = [\vec{v}_2] + [\vec{w}_2]$ y $\lambda[\vec{v}_1] = \lambda[\vec{v}_2]$. □

Teorema 4.44. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces*

$$\dim(V/S) = \dim(V) - \dim(S).$$

Demostración. Dada una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de S, por el teorema 4.30 (de la base incompleta), podemos ampliarla a una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-k}\}$ de V. Comprobamos, entonces, que el sistema de vectores

$$\{[\vec{e}_1], [\vec{e}_2], \ldots, [\vec{e}_{n-k}]\}$$

es una base de V/S, es decir $\dim(V/S) = n - k$. Dejamos los detalles para el alumno. □

Ejercicios Propuestos

Ej. 4.1 — Halla cuales de los siguientes conjuntos forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 1\} \quad E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$$
$$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_4 = 0\} \quad E_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$$

Ej. 4.2 — Considera en $\mathbb{R}^4$ el conjunto

$$X = \{(1,2,1,2), (1,0,1,0), (-3,-3,-3,-3), (0,0,1,2), (0,1,0,1)\}$$

1. Determina un subconjunto máximo de vectores linealmente independientes.
2. Representa mediante ecuaciones paramétricas y mediante ecuaciones implícitas el subespacio generado por el conjunto X.
3. Determina una base de dicho subespacio.

Ej. 4.3 — Sea V el conjunto formado por las sucesiones infinitas de números reales; en V se consideran las operaciones:

$$\begin{aligned} \{a_n\} + \{b_n\} &= \{a_n + b_n\} && \text{para todo } \{a_n\}, \{b_n\} \in V \\ \lambda\{a_n\} &= \{\lambda a_n\} && \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Comprueba que V es un espacio vectorial.
2. Indica cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de V: las sucesiones acotadas, las sucesiones constantes, las sucesiones con límite, los infinitésimos, las sucesiones con límite uno, las sucesiones de términos positivos y las sucesiones sin límite.

Ej. 4.4 — En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2n}$, se consideran los subespacios:

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \mid x_{n+i} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$
$$U = \{(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) \mid y_{2n+1-i} = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

1. Halla la dimensión y determina una base de cada uno de los subespacios V y U.
2. Halla $V \cap U$, su dimensión y una base (distíngase los casos de n par y n impar).
3. Halla $V + U$.

Ej. 4.5 — Demuestra que los vectores $(2,1,1)$, $(1,3,1)$ y $(-2,1,3)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y halla las coordenadas en dicha base del vector $(1,1,2)$.

Ej. 4.6 — Un vector de $\mathbb{R}^3$ tiene por coordenadas $(1,2,3)$ en la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Halla las coordenadas en la base $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ siendo $\vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$, $\vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ y $\vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

Ej. 4.7 — En el espacio $\mathbb{R}^3$ el vector $\vec{v}$ tiene por coordenadas $(5,1,-2)$ respecto de la base $B = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ y respecto de la base $B' = \{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ sus coordenadas son $(6,-3,4)$. Sabiendo que $\vec{p} = 3\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$ y $\vec{q} = 4\vec{x} + 5\vec{y} - 6\vec{z}$. Halla las coordenadas de $\vec{r}$ en la base B.

Ej. 4.8 — Sea V el espacio vectorial de los números complejos construido sobre $\mathbb{R}$ y sea U el espacio vectorial de los números complejos construido sobre $\mathbb{C}$. Demuestra que $\dim V = 2$ y $\dim U = 1$.

Ej. 4.9 — En $\mathbb{R}^3$, consideramos E el subespacio generado por los vectores $(2,0,1)$, $(1,-1,2)$ y $(1,1,-1)$ y $V = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$.

1. Determina una base de E y las coordenadas en dicha base del vector $(5,3,-2)$.
2. Calcula también una base de V.
3. Expresa los subespacios E y V mediante ecuaciones implícitas y determina $E \cap V$ a partir de dichas ecuaciones.
4. Determina una base y la dimensión de $E \cap V$.
5. Calcula una base de $E + V$ y expresa este subespacio mediante ecuaciones paramétricas y mediante ecuaciones implícitas.
6. ¿Se trata de una suma directa?¿Por qué?

Ej. 4.10 — (Feb. 2012) Consideramos $E = L(\{(2,0,1),(1,-1,2),(1,1,-1)\})$ y $V = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

1. Determina una base de E y las coordenadas en dicha base del vector $(5,3,-2)$.

2. Expresa los subespacios $E \cap V$ y $E + V$ mediante ecuaciones paramétricas y mediante ecuaciones implícitas.

Ej. 4.11 — (Dic. 2012) Considera, en $\mathbb{R}^4$, los subespacios

$$
\begin{aligned}
U &= L(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,-5,0),(3,3,2,-1)\}) \\
&\text{y} \\
V &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 - x_3 = 0\}.
\end{aligned}
$$

1. Determina una base de U y expresa U con ecuaciones implícitas.
2. Estudia si los siguientes vectores pertenecen a U y, en caso afirmativo, encuentra su representación respecto de la base del apartado anterior.
$$(2,1,2,1),(2,2,1,1),(1,2,2,1)$$
3. Determina $U \cap V$ y $U + V$. ¿Es suma directa?

Ej. 4.12 — En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto $U = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 - x_2 = 0 \text{ y } x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ y la relación de equivalencia $(x_1,x_2,x_3)\,\mathcal{R}_U\,(y_1,y_2,y_3)$ si $(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3) \in U$.

1. Demuestra que U es un subespacio.
2. Demuestra que $\mathcal{R}_U$ es una relación de equivalencia.
3. Encuentra dos elementos que pertenezcan a la misma clase que el vector $(1,2,-3)$.
4. Encuentra una base de $\mathbb{R}^3/U$

Ej. 4.13 — Demuestra que si los vectores $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ son linealmente independientes, también lo son $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n$ siendo $\vec{u}_1 = \vec{x}_1$, $\vec{u}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$.