Ejercicios del tema 4

Espacios Vectoriales

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.
E.T.S.I. de Telecomunicación.

Ej. 1 — Halla cuales de los siguientes conjuntos forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 1\} \quad E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$$
$$E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_4 = 0\} \quad E_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$$

Ej. 2 — Considera en $\mathbb{R}^4$ el conjunto

$$X = \{(1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 0), (-3, -3, -3, -3), (0, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 1)\}$$

1. Determina un subconjunto máximo de vectores linealmente independientes.
2. Representa mediante ecuaciones paramétricas y mediante ecuaciones implícitas el subespacio generado por el conjunto X.
3. Determina una base de dicho subespacio.

Ej. 3 — Sea V el conjunto formado por las sucesiones infinitas de números reales; en V se consideran las operaciones:

$$\begin{aligned} \{a_n\} + \{b_n\} &= \{a_n + b_n\} \qquad && \text{para todo } \{a_n\}, \{b_n\} \in V \\ \lambda\{a_n\} &= \{\lambda a_n\} && \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Comprueba que V es un espacio vectorial.
2. Indica cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de V: las sucesiones acotadas, las sucesiones constantes, las sucesiones con límite, los infinitésimos, las sucesiones con límite uno, las sucesiones de términos positivos y las sucesiones sin límite.

Ej. 4 — En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2n}$, se consideran los subespacios:

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \mid x_{n+i} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$
$$U = \{(y_1, y_2, \dots, y_{2n}) \mid y_{2n+1-i} = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

1. Halla la dimensión y determina una base de cada uno de los subespacios V y U.
2. Halla $V \cap U$, su dimensión y una base (distíngase los casos de n par y n impar).
3. Halla $V + U$.

Ej. 5 — Demuestra que los vectores $(2, 1, 1)$, $(1, 3, 1)$ y $(-2, 1, 3)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y halla las coordenadas en dicha base del vector $(1, 1, 2)$.

Ej. 6 — Un vector de $\mathbb{R}^3$ tiene por coordenadas $(1,2,3)$ en la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Halla las coordenadas en la base $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ siendo $\vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$, $\vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ y $\vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

Ej. 7 — En el espacio $\mathbb{R}^3$ el vector $\vec{v}$ tiene por coordenadas $(5,1,-2)$ respecto de la base $B = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ y respecto de la base $B' = \{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ sus coordenadas son $(6,-3,4)$. Sabiendo que $\vec{p} = 3\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$ y $\vec{q} = 4\vec{x} + 5\vec{y} - 6\vec{z}$. Halla las coordenadas de $\vec{r}$ en la base B.

Ej. 8 — Sea V el espacio vectorial de los números complejos construido sobre $\mathbb{R}$ y sea U el espacio vectorial de los números complejos construido sobre $\mathbb{C}$. Demuestra que $\dim V = 2$ y $\dim U = 1$.

Ej. 9 — En $\mathbb{R}^3$, consideramos E el subespacio generado por los vectores $(2,0,1)$, $(1,-1,2)$ y $(1,1,-1)$ y $V = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$.

1. Determina una base de E y las coordenadas en dicha base del vector $(5,3,-2)$.
2. Calcula también una base de V.
3. Expresa los subespacios E y V mediante ecuaciones implícitas y determina $E \cap V$ a partir de dichas ecuaciones.
4. Determina una base y la dimensión de $E \cap V$.
5. Calcula una base de $E + V$ y expresa este subespacio mediante ecuaciones paramétricas y mediante ecuaciones implícitas.
6. ¿Se trata de una suma directa?¿Por qué?

Ej. 10 — (Feb. 2012) Consideramos $E = L(\{(2,0,1),(1,-1,2),(1,1,-1)\})$ y $V = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

1. Determina una base de E y las coordenadas en dicha base del vector $(5,3,-2)$.
2. Expresa los subespacios $E \cap V$ y $E + V$ mediante ecuaciones paramétricas y mediante ecuaciones implícitas.

Ej. 11 — (Dic. 2012) Considera, en $\mathbb{R}^4$, los subespacios

$$U = L(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,-5,0),(3,3,2,-1)\})$$
y
$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 - x_3 = 0\}.$$

1. Determina una base de U y expresa U con ecuaciones implícitas.
2. Estudia si los siguientes vectores pertenecen a U y, en caso afirmativo, encuentra su representación respecto de la base del apartado anterior.

$$(2,1,2,1),(2,2,1,1),(1,2,2,1)$$

3. Determina $U \cap V$ y $U + V$. ¿Es suma directa?

Ej. 12 — En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto $U = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 - x_2 = 0 \text{ y } x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ y la relación de equivalencia $(x_1,x_2,x_3)\,\mathcal{R}_{\mathcal{U}}\,(y_1,y_2,y_3)$ si $(x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3) \in U$.

1. Demuestra que U es un subespacio.

2. Demuestra que $\mathcal{R}_U$ es una relación de equivalencia.
3. Encuentra dos elementos que pertenezcan a la misma clase que el vector $(1, 2, -3)$.
4. Encuentra una base de $\mathbb{R}^3/U$

Ej. 13 — Demuestra que si los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ son linealmente independientes, también lo son $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ siendo $\vec{u}_1 = \vec{x}_1$, $\vec{u}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$.