Contents

4. Espacios vectoriales

Dado un cuerpo $(K,+,\cdot)$ y un conjunto V con una operación interna y una operación externa

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot\ : K \times V \to V$$

Decimos que $(V,+,\cdot)$ es un **espacio vectorial** sobre K si satisface:

1. $(V,+)$ es un grupo abeliano.
2. Para todo $\lambda,\mu \in K$ y todo $\vec{u},\vec{v} \in V$ se tiene que:
   (a) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
   (b) $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$
   (c) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
   (d) $1\vec{u} = \vec{u}$

   siendo 1 el **elemento unidad** del cuerpo K.

Llamaremos **escalares** a los elementos de K y **vectores** a los de V.
Denotaremos por 0 al neutro de $(K,+)$ y por $\vec{0}$ al de $(V,+)$.

Ejemplo 1 *Los siguientes conjuntos con la suma y el producto por números reales estándares son espacios vectoriales sobre* $\mathbb{R}$*:*

1. *Los vectores del plano:* V_2
2. *Los vectores del espacio:* V_3
3. *Los polinomios de grado menor o igual a* n *y con coeficientes reales*

$$\mathbb{R}_n(x) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

4. *Las matrices de números reales:* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$
5. *Las listas de* n *números reales:* $\mathbb{R}^n$
6. *Las sucesiones de números reales:* $S(\mathbb{R}) = \left\{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\}$
7. *Las funciones reales sobre números reales:* $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Ejemplo 2 *El conjunto de las matrices* $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ *sobre* $\mathbb{Z}_2$ *con la suma y el producto por escalares estándares tiene estructura de espacio vectorial.*

Teorema 3 *Para todo* $\lambda \in K$ *y todo* $\vec{v} \in V$ *se satisface:*

1. $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ *si y sólo si* $\lambda = 0$ *o* $\vec{v} = \vec{0}$
2. $(-\lambda)\vec{v} = -(\lambda\vec{v}) = \lambda(-\vec{v})$

4.1. Dependencia e independencia lineal

Decimos que un vector $\vec{v}$ es **combinación lineal** de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ si

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$$

para algún $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in K$. A estos escalares los llamamos **coeficientes de la combinación lineal**.

Ejemplo 4 *En $\mathbb{R}^3$, el vector $(9,4,1)$ es combinación lineal de $(1,0,1)$, $(2,1,0)$ y $(-1,-1,1)$ ya que, por ejemplo,*

$$(9,4,1) = 0(1,0,1) + 5(2,1,0) + 1(-1,-1,1)$$

Ejercicio 5 *En $\mathbb{R}^3$, consideramos $X = \{(1,0,1), (2,1,0), (-1,-1,1)\}$.*

¿Cuáles de los siguientes vectores es combinación lineal de los vectores de X?

$$\vec{u} = (1,1,-1) \qquad \vec{v} = (4,1,2) \qquad \vec{w} = (0,0,0) \qquad \vec{z} = (0,1,1)$$

Decimos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ es **linealmente dependiente** (**L.D.**) si algún vector es combinación lineal de los restantes.

Es decir, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\vec{v}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{v}_{i+1} + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n$$

En otro caso diremos que es un conjunto **linealmente independiente** (**L.I.**).

Ejemplo 6 *Consideremos, en $\mathbb{R}^3$, los conjuntos*

$$X = \{(1,0,1), (9,4,1), (2,1,0), (-1,-1,1)\} \qquad Y = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$$

X es L.D. ya que, por ejemplo,

$$(9,4,1) = 0(1,0,1) + 5(2,1,0) + 1(-1,-1,1)$$

Sin embargo, Y es L.I.

Proposición 7 *Sea $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ y $\vec{v} \in V$.*

1. *Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ entonces $\{\vec{v}\}$ es L.I.*
2. *Si A es L.I. y $\varnothing \neq B \subseteq A$ entonces B es L.I.*
3. *Si $\vec{0} \in A$ entonces A es L.D.*
4. *Si A es L.D. entonces $A \cup \{\vec{v}\}$ es L.D.*

Teorema 8 *Un conjunto* $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ *es linealmente independiente si y sólo si satisface que*

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \;\; \textit{implica que} \;\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Ejemplo 9 *Consideremos, en* $\mathbb{R}^3$*, los conjuntos*

$$X = \{(1,0,1), (9,4,1), (2,1,0), (-1,-1,1)\}$$

$$Y = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$$

Para comprobar que X *es L.D. basta ver el siguiente sistema de ecuaciones es compatible indeterminado*

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(9,4,1) + \lambda_3(2,1,0) + \lambda_4(-1,-1,1) = (0,0,0)$$

mientras que el conjunto Y *es L.I. ya que es compatible determinado el siguiente sistema*

$$\lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(1,1,0) = (0,0,0)$$

es decir, tiene una solución única ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$)

4.2. Subespacios vectoriales

Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $\varnothing \neq U \subseteq V$.

Decimos que **$\mathbf{U}$ es subespacio de $\mathbf{V}$** si $(U,+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

Teorema 10 (Caracterización de Subespacios) *Sea $(V,+,\cdot)$ un esp. vect. sobre K y $\varnothing \neq U \subseteq V$. U es subespacio de V si y sólo si*

$$\textit{para todo } \lambda,\mu \in K \textit{ y para todo } \vec{u},\vec{v} \in U \textit{ se cumple } \lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in U$$

Ejercicio 11 *En $\mathbb{R}^4$, ¿cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios?*

$$U = \{(a,a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \qquad V = \{(a,b,c,1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\},$$

$$W = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a+b=2\} \quad \textit{y} \quad Z = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a+b=c\}$$

Ejercicio 12 *En el conjunto de vectores libres del espacio (V_3) ¿cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios?*

- *Los vectores con la misma dirección.*
- *Los vectores con el mismo módulo.*
- *Los vectores contenidos en un mismo plano.*

Dado un conjunto de vectores, $A \neq \varnothing$, llamamos **subespacio generado por** A al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de A, es decir,

$$L(A) = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n \mid \lambda_1, \dots \lambda_n \in K,\ \vec{v}_1, \dots \vec{v}_n \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplo 13 *En* $\mathbb{R}^3$, $L(\{(1,0,0),(0,1,1)\}) = \{(a,b,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 14 *En* $\mathbb{R}^3$*, sea* $X = \{(1,0,1),(2,1,0),(-1,-1,1)\}$*. Justifique que*

$$L(X) = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \text{ con } a = b + c\}$$

Teorema 15 *Sea* $A \neq \varnothing$ *un conjunto de vectores.*

$$L(A) \text{ es el subespacio más pequeño que contiene a } A.$$

4.3. Bases y dimensión

Decimos que B es una **base** del espacio vectorial V si satisface que

$$B \text{ es L.I.} \quad \text{y} \quad L(B) = V$$

Teorema 16 *Sea V un espacio vectorial y $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots \vec{v_n}\}$ una base.*

Todo vector $\vec{v}$ se puede expresar de forma única como combinación lineal de vectores de B.

Si $\vec{v} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n\vec{v_n}$, llamamos **coordenadas de $\vec{v}$ en** B a $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ son las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente, entonces

- $(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$ son las coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$ y
- $(\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_n)$ son las de $\alpha\vec{v}$.

Teorema 17 *Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores. Este número recibe el nombre de* **dimensión** *y se denota por dim(V).*

Ejemplo 18 *Los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}_3(x)$:*

$$\{1, x, x^2, x^3\} \;\; y \;\; \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$$

4.4. Cambio de base

Sean $B_1 = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots \vec{u_n}\}$ y $B_2 = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}\}$ dos bases tales que:

$$\begin{array}{l}
\vec{u_1} = a_{1,1}\vec{e_1} + a_{2,1}\vec{e_2} + \cdots + a_{n,1}\vec{e_n} \\
\vec{u_2} = a_{1,2}\vec{e_1} + a_{2,2}\vec{e_2} + \cdots + a_{n,2}\vec{e_n} \\
\dots \\
\vec{u_n} = a_{1,n}\vec{e_1} + a_{2,n}\vec{e_2} + \cdots + a_{n,n}\vec{e_n}
\end{array}$$

Sean $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ las coordenadas de $\vec{x}$ en B_1 y B_2 resp.

$$\begin{array}{rlrl}
\vec{x} = & \lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2} + \cdots + \lambda_n\vec{u_n} & & \\
= & \lambda_1(a_{1,1}\vec{e_1} + a_{2,1}\vec{e_2} + \cdots + a_{n,1}\vec{e_n}) & = & (\lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{1,2} + \cdots + \lambda_n a_{1,n})\vec{e_1} \\
+ & \lambda_2(a_{1,2}\vec{e_1} + a_{2,2}\vec{e_2} + \cdots + a_{n,2}\vec{e_n}) & + & (\lambda_1 a_{2,1} + \lambda_2 a_{2,2} + \cdots + \lambda_n a_{2,n})\vec{e_2} \\
+ & \dots & + & \dots \\
+ & \lambda_n(a_{1,n}\vec{e_1} + a_{2,n}\vec{e_2} + \cdots + a_{n,n}\vec{e_n}) & + & (\lambda_1 a_{n,1} + \lambda_2 a_{n,2} + \cdots + \lambda_n a_{n,n})\vec{e_n}
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

4.5. Bases y subespacios

Teorema 19 • *Si $V = L(X)$ entonces algún subconjunto de X es una base de V.*

- *Si X es L.I. entonces se puede ampliar hasta tener una base.*

PROPIEDADES DE LAS DIMENSIONES:

- Si U es subespacio de V entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$.
- Si U es subespacio de V entonces $\dim(U) = \dim(V)$ si y sólo si $U = V$.
- $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$

4.6. Operaciones con subespecios

Teorema 20 *Si U y W son dos subespacios de un espacio vectorial, entonces $U \cap W$ también lo es.*

Ejercicio 21 *Pon un contraejemplo que demuestre que la unión de subespacios puede no ser subespacio.*

Dados dos subespacios, U y W, llamamos **suma de U y W** al siguiente conjunto:

$$U + W = \{\vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U,\ \vec{w} \in W\}$$

Ejemplo 22 *En el conjunto de los polinomios (con coeficientes reales) de grado menor o igual a 4, que denotamos por $\mathbb{R}_4(x)$, los subconjuntos*

$$U = \{ax \mid a \in \mathbb{R}\} \qquad y \qquad W = \{ax^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

son subespacios vectoriales y su suma es $U + W = \{ax + bx^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Proposición 23 *Si U y W son dos subespacios de un espacio vectorial, entonces:*

$$U + W = L(U \cup W)$$

Ejemplo 24 *En $\mathbb{R}^4$ consideramos los subespacios*

$$U = \{(a, a, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad V = \{(a, b, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad W = L(\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\})$$

Si calculamos la suma de ellos obtenemos:

$$\begin{aligned} &U + V = \mathbb{R}^4 \\ &U + W = \{(a, b, 0, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &V + W = \{(a, b, c, b) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ejercicio 25 *Sean U y W dos subespacios de un espacio vectorial V. Si $U \subseteq W$ ¿cuál es $U + W$ y $U \cap W$?*

Decimos que la suma $U + W$ es **directa** si, para todo $\vec{v} \in U + W$,

existen únicos $\vec{u} \in U$ y $\vec{w} \in W$ tales que $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$.

Lo denotaremos por $U \oplus W$.

Ejemplo 26 *La primera suma del ejemplo 24 es directa y la suma del ejemplo 22 también.*

Teorema 27 *Sean U y W dos subespacios de un espacio vectorial. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$U + W$ es directa.*
2. *$U \cap W = \{\vec{0}\}$*

Propiedades de las dimensiones: Si U y W son subespacios de V entonces

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$
$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$$

En un espacio vectorial V, decimos que dos subespacios, U y W, son **suplementarios** si

$$V = U \oplus W$$

Ejemplo 28 *Los subespacios de $\mathbb{R}^4$*

$$U = \{(a, a, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \textit{y} \quad V = \{(a, b, b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

son suplementarios ya que $U + V = \mathbb{R}^4$ y $U \cap W = \{\vec{0}\}$, es decir, $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

Teorema 29 *Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots \vec{v_n}\}$ es linealmente independiente, para todo $1 \le i \le n$, se tiene que*

$$L(\{\vec{v_1}, \ldots \vec{v_n}\}) = L(\{\vec{v_1}, \ldots \vec{v_i}\}) \oplus L(\{\vec{v}_{i+1}, \ldots \vec{v_n}\})$$

Corolario 30 *Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots \vec{v_n}\}$ es linealmente independiente, entonces*

$$L(\{\vec{v_1}, \ldots \vec{v_n}\}) = L(\{\vec{v_1}\}) \oplus L(\{\vec{v_2}\}) \oplus \cdots \oplus L(\{\vec{v_n}\})$$

y, por tanto, todo vector de $L(\{\vec{v_1}, \ldots \vec{v_n}\})$ se puede expresar de forma ***única*** *como combinación lineal de los vectores de $\{\vec{v_1}, \ldots \vec{v_n}\}$.*

4.7. Espacio Vectorial Cociente

Sea V un espacio vectorial sobre K y U un subespacio. Consideramos la relación de equivalencia

$$\vec{u}\mathcal{R}\vec{v} \text{ si y sólo si } \vec{u}-\vec{v}\in U$$

y en el conjunto cociente, que denotamos por $V/_U$, las operaciones:

$$+ : V/_U \times V/_U \to V/_U \qquad [\vec{u}]+[\vec{v}] = [\mathbf{u}+\vec{v}]$$

$$\cdot : K \times V/_U \to V/_U \qquad \lambda[\mathbf{u}] = [\lambda\vec{u}]$$

Teorema 31 $(V/_U, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial que llamamos* **espacio vectorial cociente de V por U**

Proposición 32 *En* $(V/_U, +, \cdot)$ *se tiene que* $[\vec{0}] = U$.

Teorema 33 *Sea V un espacio vectorial y U un subespacio.*

Si $\{\mathbf{u_1}, \vec{u_2}, \ldots \vec{u_s}\}$ *es base de U y* $\{\mathbf{u_1}, \vec{u_2}, \ldots \vec{u_s}, \vec{u_{s+1}}, \ldots \vec{u_n}\}$ *es base de V, entonces*

$$\{[\vec{u_{s+1}}], \ldots, [\vec{u_n}]\} \text{ es base de } V/_U$$

Por tanto, $\dim(V/_U) = \dim(V) - \dim(U)$