TEMA 5

APLICACIONES LINEALES

Índice

5.1. Homomorfismos de Espacios Vectoriales: Aplicaciones lineales

A partir de esta sección consideraremos V y E espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 5.1. Una función entre espacios vectoriales $f\colon V \to E$ es una *aplicación lineal* si es un *homomorfismo de espacios vectoriales*, es decir:

También llamadas *transformaciones lineales* o, simplemente, transformaciones.

1. $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$ para cada $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
2. $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in V$

Ejemplo 5.2. La función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$ es una aplicación lineal, puesto que

1. $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3') = (x_2 + x_2', x_1 + x_1', x_3 + x_3') = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$.
2. $f(\lambda\vec{v}) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda ® x_3) = (\lambda x_2, \lambda x_1, \lambda x_3) = \lambda(x_2, x_1, x_3) = \lambda f(\vec{v})$

Observa que esta aplicación lineal es una *transformación elemental* de tipo I que ya hemos visto en el Tema 2.

Una definición equivalente de aplicación lineal es la siguiente:

Proposición 5.3. *Una función entre espacios vectoriales $f\colon V \to E$ es* aplicación lineal *si y solo si para cualquier combinación lineal se tiene*

En general para k vectores:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\vec{v}_i)$$

$$f(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2)$$

Demostración. Claramente la proposición 5.3 implica a la definición 5.1, puesto que las dos hipótesis que se verifican lo hacen sobre combinaciones lineales: $1\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2$ y $\lambda\vec{v} + \vec{0}$.

Inversamente, a partir de la defininción 5.1 se deduce

$$f(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) \overset{\text{por } 1}{=} f(\lambda_1\vec{v}_1) + f(\lambda_2\vec{v}_2) \overset{\text{por } 2}{=} \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2)$$

□

Ejemplo 5.4. La función $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_2 + x_3)$ está expresada analíticamente y entendemos que está definida en $\mathbb{R}^3$ con imágenes en $\mathbb{R}^2$. Prueba que es una aplicación lineal.

SOLUCIÓN: Usamos la definición 5.3. Si expresamos $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ y $\vec{v}_2 = (y_1, y_2, y_3)$ tenemos:

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3, 2\lambda x_2 + 2\mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= \lambda(x_1 - x_3, 2x_2 + x_3) + \mu(y_1 - y_3, 2y_2 + y_3) \\ &= \lambda f(\vec{v}_1) + \mu f(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.5. *De las siguientes funciones $f\colon V \to E$, determina cuales son aplicaciones lineales:*

1. $V = E = \mathbb{R}^3$, $f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{v}_0$, *con* $\vec{v}_0$ *un vector fijo de* $\mathbb{R}^3$.
2. $V = E = \mathbb{R}^3$, $f(\vec{v}) = \vec{v}_0$, *con* $\vec{v}_0$ *un vector fijo de* $\mathbb{R}^3$.
3. $V = E = \mathcal{M}_{n\times n}$, $f(A) = A + A^t$.
4. $V = E = P_3[\mathbb{R}]$, $f(p(x)) = xp'(x)$. *(Recordemos que* $P_3[\mathbb{R}]$ *el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que* 3, *y* $p'(x)$ *la derivada de* $p(x)$*)*

Proposición 5.6 (Propiedades)**.** *Si $f\colon V \to E$ una aplicación lineal, entonces:*

1. *La imagen del vector cero es el vector cero. Más brevemente,* $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
2. *Para todo* $\vec{v} \in V$ *se satisface* $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.
3. *Si un subespacio* $U = L(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\})$ *de* V *está generado por* k *vectores, entonces su imagen* $f(U)$ *es un subespacio vectorial de* E *generado por las imágenes del sistema generador de* U*, es decir,*
$$f(U) = L(\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_k)\})$$
4. *La aplicación lineal* f *viene completamente determinada por las imágenes de una base de* V.

Demostración.

1. $f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$, luego $f(\vec{0}) = f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = \vec{0}$.
2. $f(-\vec{v}) = f((-1)\vec{v}) = (-1)f(\vec{v}) = -f(\vec{v})$.
3. En primer lugar veamos que $f(U)$ es un subespacio vectorial. Dados dos vectores de $f(U)$, $\vec{w}_1 = f(\vec{a}_1), \vec{w}_2 = f(\vec{a}_2)$ con $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ en U, y dos escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ entonces
$$\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = f(\underbrace{\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2}_{\vec{v}\in U}) = f(\vec{v}) \in f(U)$$
por tanto $L(\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_k)\}) \subseteq f(U)$ (puesto que el subespacio generado está en cualquier espacio que contenga al sistema generador).
Por otro lado si $\vec{w} \in f(U) \Rightarrow \vec{w} = f(\vec{v})$ con $\vec{v} \in U$ y $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$, luego
$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\vec{v}_i) \in L(\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_k)\})$$
de donde se deduce la inclusión contraria y, por tanto, la igualdad deseada.

4. Si $\vec{v}$ es cualquier vector de V con base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$, entonces $\vec{v} = \sum_{i=i}^n \alpha_i \vec{e}_i$, luego

$$f(\vec{v}) = f\left(\sum_{i=i}^{n} \alpha_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=i}^{n} \alpha_i f(\vec{e}_i)$$

Es decir, si conocemos las imágenes de la base, $f(\vec{e}_i)$ conocemos la imagen $f(\vec{v})$ de cualquier vector. $\square$

Ejercicio 5.7. *Consideramos la aplicación lineal siguiente $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida a partir de las imágenes de una base,*

$$\begin{array}{ll} f(1,0,0,0) = (1,1,0,0); & f(1,1,0,0) = (1,0,1,0); \\ f(1,1,1,0) = (2,1,1,0); & f(1,1,1,1) = (1,1,0,1) \end{array}$$

se pide:

1. *Da una expresión analítica de f.*

2. *Si U es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones cartesianas* $\left.\begin{array}{r} x_1 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$, *calcula las ecuaciones de $f(U)$.*

Otra propiedad es que las aplicaciones lineales respetan la dependencia lineal, es decir

Proposición 5.8. *Sea $f\colon V \to E$ una aplicación lineal. Si X es un sistema de vectores de V linealmente dependiente, entonces $f(X)$ es un sistema linealmente dependiente de E.*

Demostración. Sea $X = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ y supongamos que $\lambda_i \neq 0$ y $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_i\vec{v}_i + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$. Aplicando f tenemos

$$\lambda_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_i f(\vec{v}_i) + \cdots + \lambda_k f(\vec{v}_k) = \vec{0}, \text{ con } \lambda_i \neq 0$$

que prueba que $f(X)$ es linealmente dependiente. $\square$

El resultado análago para independencia lineal no es cierto.

Ejercicio 5.9. *Da un ejemplo de esto último, es decir, una aplicación lineal f, un sistema de vectores linealmente independientes X de forma que $f(X)$ no sea linealmente independiente.*

5.1.1. Tipos de aplicaciones lineales

Para las aplicaciones lineales se usan los siguientes términos: *monomorfismo (aplicación lineal inyectiva), epimorfismo (sobreyectiva) e isomorfismo (biyectiva)*. Además, llameros **endomorfismo:** a cualquier aplicación lineal desde un espacio vectorial V al propio V, es decir, $f: V \to V$ y **automorfismo:** a una aplicación lineal que es endomorfismo e isomorfismo.

Nota. Especial interés tiene en álgebra lineal los isomorfismos de espacios vectoriales. Si existe un isomorfismo entre V y E se dice que son espacios vectoriales *isomorfos* y se representa $V \approx E$. Notemos, además que la relación de "isomorfismo" es de equivalencia en el conjunto de los espacios vectoriales.

Si f es una aplicación lineal inyectiva, entonces respeta la independencia lineal como vemos a continuación.

Proposición 5.10. *Si f es* monomorfismo *y X es un sistema de vectores de V linealmente independientes, entonces $f(X)$ es un sistema de vectores de E linealmente independientes.*

Demostración. La dejamos como ejercicio para el alumno. □

Por tanto, si $f: V \to E$ es un isomorfismo y $\mathcal{B}$ es una base de V, podemos hacer las siguientes observaciones:

1. $f(\mathcal{B})$ es un sistema de vectores linealmente independiente de E, como acabamos de ver en la anterior proposición.

2. $f(\mathcal{B})$ es un sistema generador de la imagen $f(V) = E$ por ser sobreyectiva. Consecuencia del apartado 3 de la proposición 5.6.

Es decir,

La imagen de una base de V por un isomorfismo $V \to E$ es una base de E.

Corolario 5.11. *Dos espacios vectoriales* isomorfos *tienen la misma dimensión.*

Por último una observación importante sobre los espacios vectoriales reales de dimensión finita.

Teorema 5.12. *Si V es un espacio vectorial* real de dimensión *n entonces V es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Igualmente, un espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$.

Demostración. Si fijamos una base $\mathcal{B}$ de V, cada vector $\vec{v} \in V$ tiene unas únicas coordenadas $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)_\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$, y es fácil probar que la función $f: V \to \mathbb{R}^n$ definida $f(\vec{v}) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es un isomorfismo. □

5.1.2. Operaciones de aplicaciones lineales

Representaremos por $\mathcal{L}(V,E)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de V a E.

A este conjunto se pueden trasladar las operaciones de los espacios vectoriales que lo definen. Así, si $f,g\colon V \to E$ son aplicaciones lineales, se define la suma $f+g$ como una nueva aplicación del siguiente modo

$$\begin{aligned} f+g\colon V &\to E \\ \vec{v} &\rightarrowtail f(\vec{v})+g(\vec{v}) \end{aligned}$$

y si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un escalar lo multiplicamos por f para construir una nueva aplicación lineal producto λf definida:

$$\begin{aligned} \lambda f\colon V &\to E \\ \vec{v} &\rightarrowtail \lambda f(\vec{v}) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.13. *Comprueba que las nuevas definiciones se corresponden con aplicaciones lineales. Aplica la definición 5.1 o 5.3 para probar esto.*

Si $E=\mathbb{K}$, el espacio vectorial $\mathcal{L}(V,\mathbb{K})$, de la misma dimensión que V, recibe el nombre de Espacio vectorial dual *y se representa V^*.*

Proposición 5.14. *Si V,E son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, entonces $\mathcal{L}(V,E)$ es un* nuevo espacio vectorial *sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.*

Además, si V y E son de dimensión finita n y m, respectivamente, entonces $\mathcal{L}(V,E)$ tiene dimensión *$n\cdot m$.*

Demostración. Es fácil probar que las operaciones de suma y producto por escalar definidos en $\mathcal{L}(V,E)$ verifican todas las propiedades de un espacio vectorial. Dejamos esto como ejercicio.

Por otro lado, si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_i\}_{i=1}^n$ es base de V y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_i\}_{i=1}^m$ es base de E, construimos una base de funciones $\{f_{ij}\}$ de $\mathcal{L}(V,E)$. Por el punto 4 de la proposición 5.6 para definir f_{ij} es suficiente con decir cuáles son las imágenes de la base $\mathcal{B}_1$, así definimos

$$f_{ij}(\vec{v}_k) = \begin{cases} \vec{e}_j \text{ si } k=i \\ \vec{0} \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Se prueba que estas $n\cdot m$ funciones $\{f_{ij}\}$ son linealmente independientes y es un sistema generador de $\mathcal{L}(V,E)$, por tanto, una base. □

Composición e inversas de aplicaciones lineales

Las aplicaciones lineales se comportan bien para la composición de funciones, es decir,

Proposición 5.15. *Si $f\colon V\to E$ y $g\colon E\to F$ son aplicaciones lineales, entonces la composición $g\circ f\colon V\to F$ también es una aplicación lineal.*

Demostración. Ejercicio. □

Además la composición también mantiene el tipo de morfismo, es decir, la composición de monomorfismo es un monomorfismo, la de epimorfismo también es epimorfismo y, por último, la composición de isomorfismos es un nuevo isomorfismo. En este último caso podemos añadir el siguiente resultado:

Proposición 5.16. *Sea f una aplicación lineal, f es un* isomorfismo *si y solo si f^{-1} es isomorfismo.*

Demostración. Ejercicio. □

5.1.3. Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Como cualquier función la aplicación lineal $f\colon V \to E$ tiene una imagen. Introducimos también el concepto de núcleo $\ker f$.

- $\operatorname{Img} f = f(V) = \{\vec{y} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{y}$ para algún $\vec{x} \in V\}$
- $\ker f = f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$

Proposición 5.17 (Propiedades)**.** *Sea $f\colon V \to E$ una aplicación lineal.*

1. *Los conjuntos* $\ker f$ *y* $\operatorname{Img} f$ *son subespacios vectoriales de V y E respectivamente.*
2. *f es sobreyectiva si y solo si* $\operatorname{Img} f = E$*.*
3. *f es inyectiva si y sólo si* $\ker f = \{\vec{0}\}$*.*
4. $\ker f = \{\vec{0}\}$ *si y sólo si para cualquier sistema de vectores $X \subseteq V$ linealmente independiente se tiene que $f(X)$ es linealmente independiente*

Demostración. Los puntos 1 y 2 son muy fácil de probar y se dejan como ejercicio.

3. Supongamos que f es inyectiva. Sabemos que $\ker f$ no es vacío, puesto que $\vec{0} \in \ker f$. Sea entonces $\vec{v} \in \ker f \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0} = f(\vec{0})$, y la inyectividad nos dice que $\vec{v} = \vec{0}$, es decir, el único elemento posible de $\ker f$ es el vector $\vec{0}$.

   Inversamente, supongamos que $\ker f = \{\vec{0}\}$ y sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ con $f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2)$. Tenemos, entonces, $f(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0} \iff \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \ker f = \{\vec{0}\}$. De aquí $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Es decir, f es inyectiva.

4. Sea $X = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Veamos la primera implicación. Suponemos que $\ker f = \{\vec{0}\}$ y X es linealmente independiente pero, en cambio, $f(X)$

es linealmente dependiente. Podemos entonces encontrar una combinación lineal de $f(X)$ igualada a $\vec{0}$, es decir,

$$\lambda_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_i f(\vec{v}_i) + \cdots + \lambda_k f(\vec{v}_k) = \vec{0}$$

con algún $\lambda_i \neq 0$, por tanto

$$f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_i \vec{v}_i + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k) = \vec{0} \overset{\ker = \{\vec{0}\}}{\Longrightarrow}$$
$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_i \vec{v}_i + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

con $\lambda_i \neq 0$, que contradice que X sea independiente.

Inversamente, suponemos que X independiente implica $f(X)$ independiente y sea $\vec{v} \in \ker f$. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ entonces $X = \{\vec{v}\}$ es un sistema independiente, luego $f(X) = \{f(\vec{v})\}$ también es independiente, lo que implica que $f(\vec{v}) \neq \vec{0}$, que contradice que $\vec{v}$ sea un vector del núcleo. Por tanto, necesariamente $\ker f = \{\vec{0}\}$. □

Ejemplo 5.18. Calculemos el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_4, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4)$$

SOLUCIÓN: Comencemos por el núcleo. Al considerar $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vec{0}$, se nos plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

que al resolverlo resultan las *ecuaciones paramétricas* del núcleo

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = 3\lambda + 2\mu \\ x_4 = \mu \end{array}\right\}.$$

Esto nos permite encontrar una base para el núcleo (de dimensión 2)

$$\boxed{\mathcal{B}_{\ker} = \{(1, 1, 3, 0), (0, 1, 2, 1)\}}$$

Ahora calculemos la imagen de f. Un método para ello es considerar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ y hallar el subespacio $L(f(\mathcal{B})) = \operatorname{Img} f$. Consideramos $\mathcal{B}$ la base canónica y formamos la matriz con sus imágenes puestos en columna (resp. filas) y con transformaciones elementales *por columnas (resp. filas)* conseguimos una matriz escalonada por columnas (resp. filas) que nos da una base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Por columnas}}{\leftrightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $\boxed{\mathcal{B}_{\text{Img}} = \{(1,0,1),(0,1,1)\}}$, que nos permite calcular las ecuaciones cartesianas y/o paramétricas de dicho subespacio. Por ejemplo la (única) *ecuación cartesiana* es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 - x_3 = 0 \equiv \operatorname{Img} f$$

Teorema de descomposición de una aplicación lineal

Dada una aplicación lineal $f\colon V \to E$, existen otras aplicaciones lineales $p, \overline{f}$ e i, para las que el siguiente diagrama conmuta[1] y además:

- p es el *epimorfismo* definido $p(\vec{v}) = [\vec{v}]$, a cada vector se le lleva a su clase en $V/_{\ker f}$.
- $\overline{f}$ es el *isomorfismo* definido $\overline{f}([\vec{v}]) = f(\vec{v})$, que a cada clase de $V/\ker f$ lo lleva a la imagen por f de cualquier vector de la clase.
- i es el *monomorfismo* definido $i(\vec{w}) = \vec{w}$ restringido a $\operatorname{Img} f \subseteq E$ (identidad).

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E \\ V/_{\ker f} \arrow[r, "\overline{f}"] & \operatorname{Img} f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Lo primero es comprobar que $\overline{f}$ está bien definida, es decir, su valor no depende del representante elegido. Veamos

$$[\vec{v}_1] = \vec{v}_2] \iff \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \ker f \iff f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2) \tag{5.1}$$

Trivialmente las funciones $p, \overline{f}, i$ son aplicaciones lineales. Además p es sobreyectiva porque las clases no son vacías, por tanto cualquier vector de la clase tiene como imagen por p la propia clase. La aplicación i es claramente inyectiva porque es la identidad. Y la función $\overline{f}$ es biyectiva, dejamos los detalles como ejercicio, véase (5.1).

Por último, $(i \circ \overline{f} \circ p)(\vec{v}) = (i \circ \overline{f})([\vec{v}]) = i(f(\vec{v})) = f(\vec{v})$, luego el diagrama conmuta. □

[1] *Conmuta* quiere decir que

$$f = i \circ \overline{f} \circ p$$

o que el resultado de componer funciones no varía siguiendo distintos caminos de flechas.

5.1.4. El Teorema de la Dimensión

Definición 5.19 (Rango de una aplicación lineal)**.** Dada una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita $f\colon V \to E$, llamamos *rango* de f a la dimensión de la imagen de f, es decir:

$$\boxed{\operatorname{rango} f = \dim(\operatorname{Img} f).}$$

Nota. El apartado 3 de proposición 5.6 nos dice que, si $\mathcal{B}$ es base de V, entonces $\operatorname{Img} f = L(f(\mathcal{B}))$ y, por tanto, $\operatorname{rango} f$ *es el número de vectores linealmente independientes* en $f(\mathcal{B})$.

Las dimensiones del núcleo y de la imagen de una aplicación lineal están relacionadas. Los siguientes resultados nos determinan cómo.

Lema 5.20. *La imagen de una aplicación lineal $f\colon V \to E$ es isomorfa al espacio vectorial cociente $V/\ker f$. Esto se representa*

$$\operatorname{Img} f \approx V/\ker f$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la descomposición de f, puesto que $\overline{f}\colon V/\ker f \to \operatorname{Img} f$ es isomorfismo. □

Teorema 5.21 (de la dimensión)**.** *Si $f\colon V \to E$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces*

$$\boxed{\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Img} f).}$$

Demostración. Por el teorema 4.44, $\dim(V/\ker f) = \dim V - \dim(\ker f)$, por tanto

$$\dim(\operatorname{Img} f) = \dim V - \dim(\ker f)$$

y el lema 5.20 prueba el resultado. □

Ejercicio 5.22. *Comprueba el teorema de la dimensión en el ejemplo 5.18.*

5.2. Representación matricial de una aplicación lineal

A lo largo de esta sección suponemos que V es un espacio vectorial de dimensión n y E un espacio de dimensión m. Como hemos visto en teorema 5.12, si V y E son espacios vectoriales reales, podemos suponer, sin ninguna pérdida de generalidad, que $V = \mathbb{R}^n$ y $E = \mathbb{R}^m$. Suponemos además que todas las funciones $f, g, \ldots$ que aparecen son aplicaciones lineales.

5.2.1. Matrices de una aplicación lineal

Sea $f : V \to E$ y sean $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ bases de V y E respectivamente,

$$\begin{aligned}
f(\vec{v}_1) &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})_{\mathcal{B}_2} = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1m}\vec{e}_m \\
f(\vec{v}_2) &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m})_{\mathcal{B}_2} = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2m}\vec{e}_m \\
&\vdots \\
f(\vec{v}_n) &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})_{\mathcal{B}_2} = a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nm}\vec{e}_m
\end{aligned}$$

Si el vector $\vec{x}$ tiene por coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecto a la base $\mathcal{B}_1$ y $f(\vec{x})$ tiene por coordenadas $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ respecto a la base $\mathcal{B}_2$ entonces

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n) \\
&= x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + x_n f(\vec{v}_n) \\
&= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1m}\vec{e}_m) + \\
&\quad + x_2(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2m}\vec{e}_m) + \dots \\
&\quad \cdots + x_n(a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nm}\vec{e}_m)
\end{aligned}$$

y deshaciendo los paréntesis y agrupando respecto a los vectores $\vec{e}_i$ nos queda

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) =& (\underbrace{a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n}_{=y_1})\vec{e}_1 + \\
&+ (\underbrace{a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n}_{=y_2})\vec{e}_2 + \dots \\
&\vdots \\
&+ (\underbrace{a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n}_{=y_m})\vec{e}_m
\end{aligned}$$

que nos da el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n &= y_1 \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n &= y_2 \\
&\vdots \\
a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n &= y_m
\end{aligned}\right\}$$

expresado en forma matricial del siguiente modo

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

La expresión matricial se suele representar más brevemente de la forma

$$\boxed{Y = A \cdot X.}$$

donde X son las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$, Y son las coordenadas de $f(\vec{v})$ respecto de la base $\mathcal{B}_2$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es la *única matriz* de la aplicación lineal f respecto de dichas bases, más brevemente pondremos

Es única fijadas las bases. Claramente, si las bases cambian la matriz también cambia.

$$A = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$$

Nota. Observa que el número de filas de su matriz A es la dimensión de E y el número de columnas la dimensión de V.

Ejercicio 5.23. *Comprueba que la transformación elemental de tipo I definida en el Ejemplo 5.2 como $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$ tiene por matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es una matriz elemental de tipo I.

Define analíticamente ejemplos de transformaciones elementales (de tipo II y tipo III) y comprueba que sus matrices son elementales del mismo tipo.

Ejemplo 5.24. Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -2x_2, x_1 - x_2 + 2x_3, x_3)$$

vamos a calcular la matriz de f: 1) Respecto a las bases canónicas. 2) Respecto a las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(0,1,1), (-1,1,0), (0,0,-2)\},$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(2,0,1,-1), (0,1,-1,1), (2,3,0,1), (0,1,0,0)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

SOLUCIÓN:

1) Las columnas de A están formadas por las imágenes de la base,

$$f(1,0,0) = (1,0,1,0)$$
$$f(0,1,0) = (0,-2,-1,0)$$
$$f(0,0,1) = (1,0,2,1)$$

luego la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Llamemos B a la matriz de f respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Tenemos que calcular las imágenes de los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ y posteriormente las coordenadas de dichos vectores respecto de $\mathcal{B}_2$. Así

$$f(0,1,1) = (1,-2,1,1) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 2, -\frac{11}{2}\right)_{\mathcal{B}_2}$$
$$f(-1,1,0) = (-1,-2,-2,0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}_2}$$
$$f(0,0,-2) = (-2,0,-4,-2) = (5,9,-6,9)_{\mathcal{B}_2}$$

por tanto la matriz de la aplicación lineal es

$$B = M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 5 \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 9 \\ 2 & -2 & -6 \\ -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{pmatrix}$$

Operaciones y matrices

Las operaciones de las matrices se corresponden con las operaciones de las aplicaciones lineales.

Teorema 5.25. *Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, bases de V y E, respectivamente, y $f,g\colon V \to E$. Si $A = M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ y $B = M(g;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, entonces:*

1) $A + B = M(f+g;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ y 2) $\lambda A = M(\lambda f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

Demostración. Es muy fácil y la dejamos como ejercicio para el alumno. □

Ejercicio 5.26. *Comprueba el teorema con un ejemplo. Pongamos, por caso, las aplicaciones lineales $f,g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas $f(x,y,z) = (2x+3y, \frac{x+z}{2})$ y $g(x,y,z) = (2y-z, z-x-y)$. Calcula $f+g$ y posteriormente las matrices de f, g y $f+g$ respecto a las bases canónicas. Comprueba el teorema anterior, es decir,* "la matriz de la suma es la suma de las matrices".

En el siguiente teorema comprobamos que el producto de matrices de las aplicaciones lineales se corresponde con la composición de funciones.

Teorema 5.27. *Sean $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ bases de V, E y F, respectivamente, y $f\colon V \to E$ y $g\colon E \to F$. Si $A = M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ y $B = M(g,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$, entonces*

$$B \cdot A = M(g \circ f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$$

Demostración. Sean los vectores: $\vec{v}$, $f(\vec{v})$ y $g(f(\vec{v}))$, donde cada uno está en su respectivo espacio vectorial y sean X, Y, Z sus respectivas coordenadas en las respectivas bases del enunciado. Entonces $Y = AX$, $Z = BY$ y si llamamos $C = M(g \circ f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$, entonces $Z = CX$.

Observamos que $Z = B(AX) = (BA)X$. Como, fijadas las bases, la matriz C es única, necesariamente $C = B \cdot A$. □

Ejercicio 5.28. *Dadas* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida* $f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_2, x_2 - x_1)$ *y* $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida* $g(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1, x_3 - x_2)$*, calcula* $g \circ f$ *y* $f \circ g$ *y comprueba el teorema anterior (con las bases canónicas, por ejemplo).*

Por ultimo, nos queda ver como es la matriz de la inversa de un isomorfismo.

Teorema 5.29. *Si* $f\colon V \to E$ *es isomorfismo, entonces cualquier matriz* $A = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ *es invertible, y además*

$$A^{-1} = M(f^{-1}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$$

Demostración. Sea $B = M(f^{-1}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$. Sabemos que $f^{-1} \circ f = i_V$ es la aplicación identidad en V, que es lineal y además su matriz asociada a una base cualquiera es la identidad, es decir $I_n = M(i_V; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$.

Por el teorema 5.27 anterior tenemos $B \cdot A = I_n$, por tanto A tiene inversa que es justamente B (y al contrario), que prueba el resultado. □

5.2.2. Cambio de base y matrices equivalentes

Hemos visto que, para una misma aplicación lineal f, cambiando las bases de los espacios donde se define, cambia la matriz de f. La pregunta natural es *¿como trasladamos el cambio de las bases al cálculo de la nueva matriz de* f*?*

Recordemos que dos matrices del mismo orden $m \times n$ son equivalentes si y solo si existen matrices regulares (invertibles) P y Q tales que

$$B = Q^{-1}AP$$

Teorema 5.30. *Dos matrices* $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ son matrices asociadas a la *misma aplicación lineal* $f\colon V \to E$ *si y solo si son* equivalentes.

Demostración. Representaremos por $\mathcal{B}_1, \overline{\mathcal{B}}_1$ bases de V y $\mathcal{B}_2, \overline{\mathcal{B}}_2$ bases de E. Llamaremos P a la matriz del cambio de base de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\mathcal{B}_1$ y Q a la matriz del cambio de base de $\overline{\mathcal{B}}_2$ a $\mathcal{B}_2$.

- Supongamos en primer lugar que A y B son matrices asociadas a f, es decir, $A = M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ y $B = M(f;\overline{\mathcal{B}_1},\overline{\mathcal{B}_2})$.

  Dado cualquier vector $\vec{v} \in V$, tendrá coordenadas X y $\overline{X}$ respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\overline{\mathcal{B}_1}$, por tanto $X = P \cdot \overline{X}$.

  Análogamente para el vector $f(\vec{v})$ con coordenadas Y e $\overline{Y}$ respecto de las bases $\mathcal{B}_2$ y $\overline{\mathcal{B}_2}$, respectivamente, $Y = Q \cdot \overline{Y}$.

  Ahora bien, $Y = AX \iff Q\overline{Y} = BP\overline{X} \iff \overline{Y} = \underbrace{Q^{-1}AP}_{B}\overline{X}$, por tanto, A y B son equivalentes.

- Recíprocamente, sean A y B son equivalentes, es decir, $B = Q^{-1}AP$. Consideremos espacios vectoriales V y E de dimensiones n y m respectivamente, con bases

  $$\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0), \vec{e}_2 = (0,1,\dots,0),\dots,\vec{e}_n = (0,0,\dots,1)\}$$
  $$\mathcal{B}_2 = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,\dots,0), \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,\dots,0),\dots,\vec{\varepsilon}_m = (0,0,\dots,1)\}$$

  y definimos f, a partir de las imágenes de la base, como $f(\vec{e}_i)$ el vector de coordenadas Ae_i, siendo e_i la matriz columna del vector $\vec{e}_i$. Claramente, $A = M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

  Consideremos las bases

  $$\overline{\mathcal{B}_1} = \{P^{-1}e_1, P^{-1}e_2,\dots,P^{-1}e_n\} \text{ y } \overline{\mathcal{B}_2} = \{Q^{-1}\varepsilon_1, Q^{-1}\varepsilon_2,\dots,Q^{-1}\varepsilon_m\}$$

  de V y E, respectivamente.

  $$\begin{tikzcd} V_{(\mathcal{B}_1)} \arrow[r, "f", "A"'] & E_{(\mathcal{B}_2)} \\ V_{(\overline{\mathcal{B}_1})} \arrow[u, "i_V", "P"'] \arrow[r, "f", "B"'] & E_{(\overline{\mathcal{B}_2})} \arrow[u, "Q", "i_E"'] \end{tikzcd}$$

  La matriz P es la matriz del cambio de base de $\overline{\mathcal{B}_1}$ a $\mathcal{B}_1$ y la matriz Q será la del cambio de base de $\overline{\mathcal{B}_2}$ a $\mathcal{B}_2$ y, además, $P = M(i_V,\overline{\mathcal{B}_1},\mathcal{B}_1)$ y $Q = M(i_E,\overline{\mathcal{B}_2},\mathcal{B}_2)$, donde $i_V\colon V \to V$ y $i_E\colon E \to E$ son las respectivas funciones identidad.

  Como la inversa de la función identidad es ella misma, podemos expresar
  $$f = i_E^{-1} \circ f \circ i_V$$
  de donde, por 5.27 y 5.29 , $M(f;\overline{\mathcal{B}_1},\overline{\mathcal{B}_2}) = Q^{-1}AP = B$. $\square$

Ejemplo 5.31. Si la matriz de un endomorfismo f en $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

respecto a la base canónica, calcula la nueva matriz de f si cambiamos a la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-1,0,2), (0,1,1)\}$.

Resuelve este problema conforme al método usado en el ejemplo 5.24, sin usar las matrices de cambio de base.

SOLUCIÓN: Llamemos B a la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$. La matriz del cambio de dicha base $\mathcal{B}$ a la base canónica es la matriz P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto siguiendo el teorema anterior tenemos $B = P^{-1}AP$, luego

$$\begin{aligned} B &= P^{-1} \cdot A \cdot P = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 & 6 \\ 6 & -4 & 3 \\ -11 & 6 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.32. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *la matriz de* f *respecto de las bases* $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. *Calcula la matriz de* f *respecto a las nuevas bases*

$$\overline{\mathcal{B}}_1 = \{\vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_4, 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2, \vec{v}_3\} \text{ y } \overline{\mathcal{B}}_2 = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$$

5.3. Matrices semejantes y endomorfismos

En el tema anterior hemos visto que si f es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, las matrices asociadas a f son equivalentes, es decir

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

donde P y Q son matrices de cambio de base en sus respectivos espacios.

En el caso especial de que f sea un endomorfismo $V \to V$ las matrices asociadas son cuadradas, luego las correspondientes matrices, P y Q, serán del mismo orden. Podemos, incluso pedir que $P = Q$ o, lo que es lo mismo, el cambio de base sea el mismo en el espacio inicial y en el final. En este caso, la equivalencia de matrices se denomina *semejanza de matrices* que estudiamos con más detalle a continuación.

5.3.1. Matrices semejantes

Definición 5.33. Decimos que dos matrices cuadradas A y B son semejantes si existe una matriz regular P tal que

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

La relación de semejanza es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva).

Proposición 5.34 (Propiedades). *Si A y B son matrices semejantes, entonces*

1. *Tienen el mismo determinante.*

   Demostración. $\det B = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \frac{1}{\det P} \det A \det P = \det A$. □

2. *Tienen el mismo rango.*

   Demostración. Puesto que se corresponden al mismo endomorfismo, tienen el mismo rango. □

3. *Tienen la misma traza (suma de los elementos de la diagonal principal).*

   Demostración. Primero observamos que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, puesto que

   $$\operatorname{tr}(AB) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \operatorname{tr}(BA)$$

   Por tanto,

   $$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr} A$$

   □

5.3.2. Endomorfismos diagonalizables

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y $f : V \to V$ aplicación lineal (endomorfismo).

Definición 5.35. Decimos que f es diagonalizable si existe una base de V para la que la matriz asociada a f sea diagonal.

Si f es diagonalizable y A es su matriz asociada, deben existir una matriz invertible P de cambio de base y una matriz D diagonal tales que

$$D = P^{-1}AP.$$

Es decir, A debe ser semejante a una matriz diagonal D.

A la matriz P se le suele llamar *matriz de paso*.

En general, una matriz cuadrada A se dice que es *una matriz diagonalizable* si su endomorfismo asociado es diagonalizable.

Ejemplos 5.36.

- El endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido $f(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 + 3x_2)$ es diagonalizable, puesto que su matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ es diagonalizable como podemos comprobar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  y el producto $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- En cambio el endomorfismo $f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_1 + 2x_2)$ que, respecto a la base canónica, nos da la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no va a ser diagonalizable, aunque todavía no sabemos porqué. Este será el problema a estudiar: ¿cuándo un endomorfismo es diagonalizable?

5.3.3. Autovalores y Autovectores

Definición 5.37. Si $f(\vec{x}) = \lambda\, \vec{x}$ con $\vec{x} \neq \vec{0}$, decimos que λ es un *autovalor* o valor propio y que $\vec{x}$ es una *autovector* o vector propio asociado a λ.

Fijada una base, y representado f por su matriz A, respecto a dicha base, tenemos que encontrar un vector de coordenadas $X \neq 0$ tal que

$$AX = \lambda X \iff (A - \lambda I)X = 0$$

donde I es la matriz identidad de orden adecuado.

Tenemos, por tanto, un sistema de ecuaciones lineales homogéneo que, como sabemos, tiene soluciones distintas de $X = 0$ si y sólo el determinante de la matriz del sistema es cero. Dicho de otro modo, el endomorfismo f, a través de su matriz A, tiene autovectores si y solo si

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

que nos da una ecuación polinómica en λ que recibe el nombre de *ecuación característica* de A, cuyas soluciones λ_i (autovalores) aseguran que el sistema $(A - \lambda_i I)X = 0$ tiene soluciones no triviales (autovectores). Al polinomo (de variable λ) $\det(A - \lambda I)$ se le llama, igualmente, *polinomio característico*[2].

Proposición 5.38. *Matrices semejantes, por tanto matrices que representan al mismo endomorfismo, tienen el mismo polinomio característico, por tanto los mismos autovalores .*

También tienen los mismos autovectores, pero sus coordenadas son distintas porque están expresados en bases distintas.

[2]Para algunos autores el polinomio característico se define como $\det(\lambda I - A)$. Es fácil comprobar que $\det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A)$, luego cuando la dimensión del espacio es impar hay un cambio de signo.

Demostración. Si A y B son semejantes, entonces

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - P^{-1}\lambda P = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

Luego

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(A - \lambda I)$$

□

Este resultado nos permite identificar los autovalores de un endomorfismo con los autovalores de su matriz sin ambigüedad alguna.

Resumiendo, si α es una raíz del polinomio característico $\det(A - \lambda I)$, entonces

- α es un autovalor de A y
- $N_\alpha = \ker(A - \alpha I)$ es el subespacio de autovectores asociados a α (junto con el vector $\vec{0}$, que, como sabemos, no es autovector). Este subespacio recibe el nombre de *subespacio propio* asociado al autovalor α. A una base de este subespacio, se le suele llamar, abusando del lenguaje, conjunto de autovectores (asociados a α).

Ejercicio 5.39. *Calcula los autovalores y autovectores de las matrices: 1)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *y 2)* $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Los autovalores tienen las siguientes propiedades:

Proposición 5.40. *Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces:*

1. *A y A^T tienen los mismos autovalores.*

   Demostración. Es cierto puesto que

   $$\det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I^T) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A - \lambda I)$$

   □

2. *Si λ es autovalor de A, entones $k\lambda$ es autovalor de kA.*

   Demostración. $\det(kA - k\lambda I) = \det(k(A - \lambda I)) = k^n \det(A - \lambda I) = k^n 0 = 0$ □

3. *Si λ es autovalor de A, entones $\lambda - k$ es autovalor de $A - kI$*

   Demostración. $\det((A - kI) - (\lambda - k)I) = \det(A - kI - \lambda I + kI) = \det(A - \lambda I) = 0$ □

4. *Si λ es autovalor de A y A es invertible, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.*

   Demostración. Como $\det A$ no puede ser cero, obliga a que $\lambda \neq 0$, luego $\frac{1}{\lambda}$ está definido. Además existe $X \neq 0$ tal que $AX = \lambda X$, de aquí que

   $$A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$$

   por lo que $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}. □

5. *Si λ es autovalor de A, para cada natural k tenemos que λ^k es autovalor de A^k.*

   Demostración. Si $k = 0$ es evidente. Para k positivo: sabemos que existe $X \neq 0$ tal que $AX = \lambda X \Rightarrow A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$. Luego λ^2 es autovalor de A^2, siguiendo este razonamiento las veces necesarias tenemos que λ^k es autovalor de A^k. Para k negativo se prueba a partir de la propiedad número 4 anterior. □

5.4. Teorema de diagonalización

Teorema 5.41. *Los autovectores asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes.*

Demostración. Supongamos que $\vec{x}$ y $\vec{y}$ autovalores asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\vec{x}$, $\vec{y}$ *son linealmente dependientes*, entonces podemos expresar $\vec{x} = \alpha\vec{y}$, y, como son autovalores, tenemos:

$$f(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x}$$
$$f(\vec{x}) = f(\alpha\vec{y}) = \alpha\lambda_2\vec{y} = \lambda_2\vec{x}$$

por tanto, $\lambda_1\vec{x} = \lambda_2\vec{x} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x} = \vec{0}$. Como $\vec{x}$ es autovector (no puede ser cero) tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2$ que es una contradicción. □

Corolario 5.42. *Si un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión n tiene n autovalores distintos, entonces es diagonalizable.*

Demostración. Efectivamente, por cada autovalor distinto podemos elegir un autovector independiente de los demás. Esto nos lleva a que podemos construir una base $\mathcal{B}$ de autovectores. La matriz del endomorfismo respecto a esta base $\mathcal{B}$ es diagonal, puesto que $f(\vec{v}_i) = \lambda_i\vec{v}_i$, que expresados en coordenadas, nos da una matriz diagonal. □

Como hemos visto, si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base formada por autovectores con sus respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 v_2 \cdots v_n \end{pmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 v_2 \cdots v_n \end{pmatrix}$$

donde v_i (sin "flechita") representa la columna de la matriz formada por las coordenadas del vector $\vec{v}_i$.

Nota. Obsérvese que las columnas de la *matriz de paso* son los autovectores en el mismo orden que los autovalores ocupan en la diagonal principal de la matriz D.

Ejemplo 5.43. Vamos a diagonalizar el endomorfismo $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

- Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos los autovalores:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 6$$

- Y para cada autovalor, calculando $\ker(A - \lambda I)$, obtenemos los subespacios propios:

$$\text{Para } \lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N_1 = L\{(1,-1)\}$$

$$\text{Para } \lambda_2 = 6 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N_6 = L\{(4,1)\}$$

- Diagonalización:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -4/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4.1. Multiplicidad algebraica y geométrica

No siempre un endomorfismo en un espacio de dimensión n tiene exactamente n autovalores distintos. Esto no implica que no sea diagonalizable. Bajo ciertas condiciones se puede diagonalizar.

Factorización de un polinomio

Si un polinomio p tiene a $\lambda_i \in \mathbb{K}$ como raíz, sabemos que se puede expresar de la forma $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)q_1(\lambda)$, donde q_1 es otro polinomio. Puede ocurrir que λ_i siga siendo raíz de q_1, entonces se puede repetir el razonamiento. Existirá, entonces, un número máximo m_i de veces para lo que esto ocurre, quedando p factorizado de la forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i} q_{m_i}(\lambda)$$

A este número m_i se le llama *multiplicidad de la raíz λ_i*.

En el cuerpo de los números reales no todos los polinomios son factorizables. No ocurre así en *en el cuerpo de los números complejos que es algebraicamente cerrado* (véase teorema 2.71).

Decimos, además, que un polinomio $p(\lambda)$ se puede factorizar en $\mathbb{K}$ si se puede expresar de la forma

$$p(\lambda) = \alpha(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ raíces de p y $m_i \in \mathbb{Z}^+$ sus respectivas multiplicidades.

Definición 5.44. Dado un autovalor λ_i de un endomorfismo, llamaremos:

Multiplicad algegraica de λ_i al número máximo de veces m_i que es raíz del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Multiplicidad geométrica de λ_i a la dimensión de su subespacio propio $\dim N_{\lambda_i} = \dim \ker(A - \lambda_i I)$.

El siguiente resultado lo damos sin demostración.

Proposición 5.45. *La multiplicidad geométrica de un autovalor siempre es menor o igual que su multiplicidad algebraica.*

5.4.2. Teorema fundamental

Teorema 5.46. *Un endomorfismo f es diagonalizable en $\mathbb{K}$ si y sólo si se satisfacen las condiciones siguientes:*

La primera condición de este teorema siempre se cumple para espacios vectoriales complejos. En cambio, en espacios vectoriales reales no la tenemos garantizada.

1. *El polinomio característico de f se puede factorizar en $\mathbb{K}$, es decir, si A es cualquier matriz de f, entonces*

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

2. *Para cada autovalor λ_i $(i = 1, \dots, r)$ la multiplicidad algebraica coincide con la multiplicidad geométrica, es decir, $m_i = \dim N_{\lambda_i}$.*

Demostración. Para probar este teorema basta observar que por comparación de grados de polinomios se tiene $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$. Entonces para cada λ_i podemos elegir m_i vectores independientes por ser $\dim N_{\lambda_i} = m_i$.

Como los autovectores de autovalores distintos son todos independientes (ver teorema 5.41 anterior), uniendo todos los autovectores conseguimos n vectores independientes, y por tanto, una base de V formada por autovectores. $\square$

Ejemplo 5.47. Pretendemos diagonalizar la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Comenzamos calculando el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = -(\lambda + 3)^2(\lambda - 5)$$

- De donde obtenemos sus autovalores y sus multiplicidades algebraicas: $\lambda_1 = -3$ ($m_1 = 2$) y $\lambda_2 = 5$ ($m_2 = 1$).

- Que nos permiten calcular los autovectores, más concretamente los subespacios propios:

$$N_{-3} = L\left(\{(-2,1,0),(3,0,1)\}\right) \text{ y } N_5 = L\left(\{(-1,-2,1)\}\right)$$

- Y, por último, por el teorema 5.46, sabemos que se puede diagonalizar

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 \\ -1/8 & -1/4 & 3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.48. *Diagonaliza, si es posible, la siguiente matriz*

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 12 & -1 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

5.5. Algunas aplicaciones de la diagonalización de endomorfismos

5.5.1. Cálculo de potencias y matriz inversa

Podemos usar una matriz diagonalizada para calcular sus potencias.

Si A es diagonalizable con $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ se tiene que

$$A^m = \left(PDP^{-1}\right)^m = \overbrace{(PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}DP^{-1})}^{m \text{ veces}} =$$
$$= PD^mP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

Cálculo de la matriz inversa

Si una matriz A está diagonalizada y es invertible, tenemos una forma alternativa de calcular la matriz inversa. Así

$$A = PDP^{-1} \iff A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

Además el polinomio característico nos da el valor del determinante.

Proposición 5.49. *El determinante de una matriz coincide con el término independiente de su polinomio característico, que coincide con el producto de los autovalores (repitiendo cada valor según su multiplicidad algebraica).*

Demostración. Efectivamente, si $\det(A - \lambda I) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ es el polinomio característico, haciendo $\lambda = 0$ en esta ecuación tenemos $\det(A) = a_0$.

Además como los autovalores λ_i son las raíces del polinomio característico, se tiene además que $\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$ y de aquí que $a_0 = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. $\square$

La traza de una matriz también viene reflejada en el polinomio característico. La Proposición 5.34, página 137, en su punto 3 nos justifica la siguiente.

Proposición 5.50. *La traza de una matriz cuadrada de orden n es el coeficiente del término de grado $n-1$ del polinomio característico multiplicado por $(-1)^{n-1}$, que coincide con la suma de sus autovalores (repitiendo cada autovalor según su multiplicidad algebraica).*

Resumiendo, el polinomio característico $\det(A - \lambda I) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$, verifica:

- $a_0 = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det A$.
- $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) = (-1)^{n-1}\operatorname{tr} A$.
- $a_n = (-1)^n$.

Ejercicio 5.51. *Comprueba las anteriores proposiciones 5.49 y 5.50 en las matrices que hemos diagonalizado hasta ahora.*

Ejemplo 5.52. Veamos la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalizada en el ejemplo 5.47 . Observemos que es invertible por varios motivos, por ejemplo, $\det A = a_0 = 45 \neq 0$, o bien, observando que sus autovalores son todos distintos de cero. Su inversa será entonces:

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

Por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 \\ -1/8 & -1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{15} & \dfrac{2}{15} & -\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2}{15} & -\dfrac{1}{15} & -\dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{1}{15} & -\dfrac{2}{15} & -\dfrac{2}{15} \end{pmatrix}$$

5.5.2. Teorema de Cayley-Hamilton

El polinomio característico, entendiendolo sobre el anillo de las matrices cuadradas complejas, tiene una propiedad curiosa, y es que admite como raíz a la propia matriz que lo define. Esto es conocido como teorema de Cayley-Hamilton y omitimos la demostración.

Teorema 5.53 (Cayley-Hamilton)**.** *Toda matriz cuadrada en* $\mathbb{C}$ *es raíz de su polinomio característico. Es decir, si* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ *entonces*

$$p(A) = a_nA^n + \cdots + a_1A + a_0I_n = 0_n$$

El anterior teorema nos permite:

1. Calcular la potencia enésima de A a partir de las potencias anteriores de A
$$A^n = -\frac{1}{a_n}(a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n)$$

2. Si A invertible, $\det A = a_0 \neq 0$, y
$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_nA^{n-1} + \cdots + a_1I_n)$$

Ejemplo 5.54. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, conocido su polinomio característico $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45$ tenemos una forma de calcular la inversa:

$$-A^3 - A^2 + 21A + 45I = 0 \Rightarrow A(A^2 + A - 21I) = 45I$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{45}\left[\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 21\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

5.5.3. Exponencial de una matriz

En algunas aplicaciones[3], se hace necesaria calcular la exponencial de una matriz que generaliza la función exponencial e^x.

Si A es una matriz cuadrada, real o compleja, se define su exponencial e^A como:

[3] Por ejemplo, en los sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$e^A = \exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i = I_n + A^1 + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{i!}A^i + \ldots$$

Nota. Cuando existe una potencia que anula la matriz (se dice que A es nilpotente) el cálculo de la exponencial se realiza en un número finito de pasos. Pero esto no tiene porqué ocurrir, por lo que el cálculo de la exponencial requeriría un proceso de límite.

Si una matriz es diagonalizable se pueden evitar los límites para el cálculo de su exponencial. Así, si $A = PDP^{-1}$, entonces

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(PDP^{-1}\right)^i = P\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}D^i\right)P^{-1} = P\,e^D P^{-1}$$

y, por tanto, si podemos calcular e^D, tenemos e^A.

Ahora bien, como ya hemos visto, si D es una matriz diagonal, sus potencias se trasladan a la diagonal, es decir, para cada i tenemos

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} {d_1}^i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & {d_2}^i & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & {d_n}^i \end{pmatrix}$$

luego, $e^D = \begin{pmatrix} e_1^d & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_2^d & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & e_n^d \end{pmatrix}$.

Ejemplo 5.55. Vamos a calcular $\exp\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Como la matriz del exponente es diagonalizable, ya resuelta en el ejemplo 5.47, siguiendo lo anterior, tenemos

$$\exp\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 \\ -1/8 & -1/4 & 3/8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-3}\left(e^8+7\right)}{8} & \frac{e^{-3}\left(e^8-1\right)}{4} & \frac{-e^{-3}\left(3e^8-3\right)}{8} \\ \frac{e^{-3}\left(e^8-1\right)}{4} & \frac{e^{-3}\left(e^8+1\right)}{2} & \frac{-e^{-3}\left(3e^8-3\right)}{4} \\ \frac{-e^{-3}\left(e^8-1\right)}{8} & \frac{-e^{-3}\left(e^8-1\right)}{4} & \frac{e^{-3}\left(3e^8+5\right)}{8} \end{pmatrix}$$

A continuación exponemos algunas de las propiedades de la exponencial de una matriz.

Proposición 5.56 (Propiedades de la exponencial)**.**

1. *$e^{0_n} = I_n$.*
2. *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, entonces $e^{\lambda A} + e^{\mu A} = e^{(\lambda+\mu)A}$.*
3. *La exponencial de una matriz siempre en invertible, y además*

$$\left(e^{A}\right)^{-1} = e^{-A}$$

Si $AB \neq BA$ puede ser $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

4. *Si $AB = BA$ entonces $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$.*
5. *Si $m \in \mathbb{Z}$ entonces $e^{mA} = \left(e^A\right)^m$.*
6. *Para cualquier matriz cuadrada A se tiene*

$$e^{(A^T)} = \left(e^A\right)^T$$

luego, si A es simétrica, e^A es simétrica y, si A es antisimétrica, e^A es ortogonal.

7. *Relación determinante-traza:* $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

Ejercicios Propuestos

Ej. 5.1 — De las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ ¿cuáles son aplicaciones lineales? Encuentra el núcleo y la imagen de las que lo sean.

1. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. Consideramos la aplicación $f_1(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$
2. $f_2(\vec{x}) = (x_1, 1, x_2)$ siendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$
3. $f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$

Ej. 5.2 — Dada la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(1,3,5) = (1,0)$, $f(0,1,1) = (1,0)$ y $f(0,0,1) = (0,0)$

1. Halla la matriz en las bases canónicas.
2. Halla las ecuaciones del subespacio transformado del subespacio U dado por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Ej. 5.3 — Determina la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que satisface que $\ker f = \{(a,b,c) \mid a + b = 0\}$ y $f(0,1,1) = (1,1)$. Determina también su imagen.

Ej. 5.4 — Dado el homomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$, halla la matriz de f respecto de las bases $\{(1,2),(2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Ej. 5.5 — Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal

$$f(x_1,x_2,x_3) = ((\lambda-2)x_1+2x_2-x_3, 2x_1+\lambda x_2+2x_3, 2\lambda x_1+2(1+\lambda)x_2+(1+\lambda)x_3)$$

1. Encuentra la matriz asociada a f en la base canónica y su rango según los valores de λ.
2. Los conjuntos $\operatorname{Im} f$ y $\ker f$.

Ej. 5.6 — En $\mathbb{R}^3$ define dos bases y encuentra la matriz asociada al endomorfismo

$$f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+2y+z)$$

a cada una de ellas. Halla la relación existente entre ellas.

Ej. 5.7 — Si U y W son dos subespacios suplementarios de un espacio vectorial V, demuestra que V es isomorfo al espacio vectorial producto $U \times W$. Encuentra un isomorfismo entre ellos.

Ej. 5.8 — Encuentra un endomorfismo en $\mathbb{R}^2$ que cumpla:

1. La imagen y el núcleo de f coincidan.
2. La imagen y el nucleo de f sean subespacios suplementarios.

Ej. 5.9 — Sea f el endomorfismo cuya matriz respecto de la base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz A' que corresponde a dicho endomorfismo en otra base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ dada por

$$\sqrt{2}\,\mathbf{u_1} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \quad , \quad \sqrt{2}\,\mathbf{u_2} = \mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}$$

Ej. 5.10 — Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal y B_1, B_1', B_2 y B_2' bases de $\mathbb{R}^2$. Si

$$\mathcal{M}(f, B_1, B_2) = \mathcal{M}(f, B_1', B_2') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y, respecto de la base B_1 los vectores de B_1' son $(1,2)$ y $(2,1)$, determina la matriz de cambio de base de B_2 en B_2'.

Ej. 5.11 — Calcula, para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. El polinomio característico de A.
2. Los valores propios de A.
3. Un conjunto máximo de vectores propios linealmente independientes.
4. ¿Es diagonalizable A? En caso afirmativo, halla P para que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
5. Calcula A^4, A^{-1} y e^A.

Ej. 5.12 — Lo mismo que el ejercicio 5.11 para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej. 5.13 — Discute, según los parámetros, si la siguiente matriz es diagonalizable y localiza, si lo es, una base de $\mathbb{R}^3$ en la que f tenga asociada una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Ej. 5.14 — Igual que el ejercicio 5.13 anterior para la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

Ej. 5.15 — Encuentra, si existe, una matriz real de orden 3 que no sea diagonal pero sí sea diagonalizable y que sus autovalores cumplan:

1. El único autovalor sea $\lambda = -1$.
2. Un autovalor doble $\lambda_1 = 0$ y otro autovalor $\lambda_2 = 1$.

Ej. 5.16 — Calcula $A^3 + 4A^2 + 4A + I_2$, sabiendo que A es una matriz semejante a la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ej. 5.17 — Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que admite los autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$ y que tiene por vectores propios a los $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ y $(1,2,1)$ respectivamente. Obténgase la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ej. 5.18 — Sabiendo que $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo diagonalizable que tiene como vectores propios $(-1,2,2)$, $(2,2,-1)$ y $(2,-1,2)$ y que $f(5,2,5) = (0,0,7)$. Halla los autovalores de f y su ecuación (expresión analítica) en la base canónica.

Ej. 5.19 — Escribe una matriz cuadrada regular de orden 3 y comprueba que se cumple el teorema de Cayley-Hamilton. Utiliza dicho resultado para encontrar la matriz inversa.

Ej. 5.20 — Determina (sin calcular a, b, c, p, q y r) los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -1 \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

sabiendo que admite como vectores propios: $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$ y $\vec{v}_3 = (-1,1,2)$. Determina después los valores de a, b, c, p, q y r.