Ejercicios del tema 5

Aplicaciones lineales

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.
E.T.S.I. de Telecomunicación.

Ej. 1 — De las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ ¿cuáles son aplicaciones lineales? Encuentra el núcleo y la imagen de las que lo sean.

1. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. Consideramos la aplicación $f_1(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$
2. $f_2(\vec{x}) = (x_1, 1, x_2)$ siendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$
3. $f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$

Ej. 2 — Dada la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(1,3,5) = (1,0)$, $f(0,1,1) = (1,0)$ y $f(0,0,1) = (0,0)$

1. Halla la matriz en las bases canónicas.
2. Halla las ecuaciones del subespacio transformado del subespacio U dado por las ecuaciones
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ej. 3 — Determina la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que satisface que $\ker f = \{(a,b,c) \mid a + b = 0\}$ y $f(0,1,1) = (1,1)$. Determina también su imagen.

Ej. 4 — Dado el homomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$, halla la matriz de f respecto de las bases $\{(1,2),(2,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Ej. 5 — Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal
$$f(x_1,x_2,x_3) = ((\lambda-2)x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3, 2\lambda x_1 + 2(1+\lambda)x_2 + (1+\lambda)x_3)$$

1. Encuentra la matriz asociada a f en la base canónica y su rango según los valores de λ.
2. Los conjuntos $\operatorname{Im} f$ y $\ker f$.

Ej. 6 — En $\mathbb{R}^3$ define dos bases y encuentra la matriz asociada al endomorfismo
$$f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+2y+z)$$
a cada una de ellas. Halla la relación existente entre ellas.

Ej. 7 — Si U y W son dos subespacios suplementarios de un espacio vectorial V, demuestra que V es isomorfo al espacio vectorial producto $U \times W$. Encuentra un isomorfismo entre ellos.

Ej. 8 — Encuentra un endomorfismo en $\mathbb{R}^2$ que cumpla:

1. La imagen y el núcleo de f coincidan.
2. La imagen y el nucleo de f sean subespacios suplementarios.

Ej. 9 — Sea f el endomorfismo cuya matriz respecto de la base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz A' que corresponde a dicho endomorfismo en otra base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ dada por

$$\sqrt{2}\,\mathbf{u_1} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \quad , \quad \sqrt{2}\,\mathbf{u_2} = \mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}$$

Ej. 10 — Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal y B_1, B_1', B_2 y B_2' bases de $\mathbb{R}^2$. Si

$$\mathcal{M}(f, B_1, B_2) = \mathcal{M}(f, B_1', B_2') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y, respecto de la base B_1 los vectores de B_1' son $(1, 2)$ y $(2, 1)$, determina la matriz de cambio de base de B_2 en B_2'.

Ej. 11 — Calcula, para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. El polinomio característico de A.
2. Los valores propios de A.
3. Un conjunto máximo de vectores propios linealmente independientes.
4. ¿Es diagonalizable A? En caso afirmativo, halla P para que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
5. Calcula A^4, A^{-1} y e^A.

Ej. 12 — Lo mismo que el ejercicio 11 para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej. 13 — Discute, según los parámetros, si la siguiente matriz es diagonalizable y localiza, si lo es, una base de $\mathbb{R}^3$ en la que f tenga asociada una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Ej. 14 — Igual que el ejercicio 13 anterior para la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

Ej. 15 — Encuentra, si existe, una matriz real de orden 3 que no sea diagonal pero sí sea diagonalizable y que sus autovalores cumplan:

1. El único autovalor sea $\lambda = -1$.
2. Un autovalor doble $\lambda_1 = 0$ y otro autovalor $\lambda_2 = 1$.

Ej. 16 — Calcula $A^3 + 4A^2 + 4A + I_2$, sabiendo que A es una matriz semejante a la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ej. 17 — Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que admite los autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$ y que tiene por vectores propios a los $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ y $(1,2,1)$ respectivamente. Obténgase la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ej. 18 — Sabiendo que $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo diagonalizable que tiene como vectores propios $(-1,2,2)$, $(2,2,-1)$ y $(2,-1,2)$ y que $f(5,2,5) = (0,0,7)$. Halla los autovalores de f y su ecuación (expresión analítica) en la base canónica.

Ej. 19 — Escribe una matriz cuadrada regular de orden 3 y comprueba que se cumple el teorema de Cayley-Hamilton. Utiliza dicho resultado para encontrar la matriz inversa.

Ej. 20 — Determina (sin calcular a, b, c, p, q y r) los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -1 \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

sabiendo que admite como vectores propios: $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$ y $\vec{v}_3 = (-1,1,2)$. Determina después los valores de a, b, c, p, q y r.