Ejercicios del tema 5

Aplicaciones lineales

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.
E.T.S.I. de Telecomunicación.

Soluciones a los ejercicios.

Solución (Ej. 1) — f_1 y f_3 son aplicaciones lineales.
Si $\lambda = 0$, $\ker f_1 = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Im} f_1 = \{\vec{0}\}$ y si $\lambda \neq 0$, $\ker f_1 = \{\vec{0}\}$ e $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^3$.
Por otro lado, $\ker f_3 = \{(a, -a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ e $\operatorname{Im} f_3 = L(\{(1,1,0),(1,0,1)\})$.

Solución (Ej. 2) — El subespacio transformado tiene como ecuación $x_2 = 0$, es decir, $f(U) = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$. La matriz en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución (Ej. 3) — $f(x, y, z) = (x + y, x + y)$. La imagen es la recta de $\mathbb{R}^2$ dada por la igualdad $y = x$.

Solución (Ej. 4) — $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Solución (Ej. 5) —

1. Para $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$ rango 2, en otro caso rango 3.
2. Por ejemplo, para $\lambda = 0$, $\ker f = L(\{2, 1, -2\})$, $\operatorname{Im} f \equiv x + y - z = 0$.

Solución (Ej. 9) — $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Solución (Ej. 11) —

$$p(\lambda) = -(\lambda - 5)(\lambda - 3)^2,\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ e^A = \begin{pmatrix} \frac{e^5+e^3}{2} & \frac{e^5-e^3}{2} & -\frac{e^5-e^3}{2} \\ e^5 - e^3 & e^5 & e^3 - e^5 \\ \frac{e^5-e^3}{2} & \frac{e^5-e^3}{2} & -\frac{e^5-3\,e^3}{2} \end{pmatrix}.$$

Solución (Ej. 12) —

$$p(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda + 2)^2,\ P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } e^A = \begin{pmatrix} \frac{(e^8+1)}{2e^2} & \frac{(e^8-1)}{4e^2} & -\frac{(3\,e^8-3)}{4e^2} \\ \frac{(e^8-1)}{4e^2} & \frac{(e^8+7)}{8e^2} & -\frac{(3\,e^8-3)}{8e^2} \\ -\frac{(e^8-1)}{4e^2} & -\frac{(e^8-1)}{8e^2} & \frac{(3\,e^8+5)}{8e^2} \end{pmatrix}.$$

Solución (Ej. 13) — No diagonalizable para ningún valor de a.

Solución (Ej. 14) —

a) No diagonalizable si $a = -\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$ o $a = \frac{8\sqrt{3}+12}{3}$ o $a = \sqrt{13}+3$.

b) Si $a < -\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$ o $a > \frac{8\sqrt{3}+12}{3}$ diagonalizable (en el cuerpo $\mathbb{C}$).

c) En los restantes valores de a es diagonalizable (en el cuerpo $\mathbb{R}$).

Solución (Ej. 17) — $f(x,y,z) = \left(2x-2y+z, \frac{3x}{2}-3y+\frac{5z}{2}, -2y+3z\right)$

Solución (Ej. 18) — $\lambda_1 = \frac{14}{9}$, $\lambda_2 = -\frac{7}{9}$, $\lambda_3 = \frac{7}{9}$. La expresión analítica de f es

$$f(x,y,z) = \left(\frac{14\,(x-5y+z)}{81}, \quad \frac{7\,(-10x+5y+8z)}{81}, \quad \frac{7\,(2x+8y+11z)}{81}\right)$$

Solución (Ej. 20) — Los valores propios son $3, 3, -1$ y la matriz es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$