Contents

5. Aplicaciones Lineales

5.1. Aplicaciones lineales. Definición y propiedades

Sean V y E dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo abeliano K y $f : V \to E$ una aplicación. Decimos que f es una **aplicación lineal** si, para todo $\lambda \in K$ y todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$, se tiene que

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \qquad \text{y} \qquad f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

o, equivalentemente, para todo $\lambda, \mu \in K$ y todo $\mathbf{x}, \vec{y} \in V$, se tiene que

$$f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

Proposición 1 *Sea $f : V \to E$ una aplicación lineal.*

1. $f(\vec{0}) = \vec{0}$
2. *Para todo $\vec{x} \in V$ se satisface $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$*
3. *Si $U = \langle\{x_1, \dots, x_n\}\rangle \subseteq V$ entonces $f(U) = \langle\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}\rangle \subseteq E$.*

5.2. Núcleo e Imagen

Definimos el **núcleo** de una aplicación lineal como

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \vec{0}\}$$

Proposición 2 *Sea $f : V \to E$ una aplicación lineal.*

1. *Im(f) y Ker(f) son subespacios de E y V respectivamente.*
2. *f es inyectiva si y sólo si Ker$(f) = \{\vec{0}\}$*
3. *Ker$(f) = \{\vec{0}\}$ si y sólo si para todo $S \subseteq V$ L.I. se tiene que $f(S)$ es L.I.*

Llamamos **rango** de una aplicación lineal a la dimensión del conjunto imagen:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Si B es una base de V entonces $\mathrm{Im}(f) = \langle f(B) \rangle$ y rg(f) =rg$(f(B))$.

5.3. Descomposición Canónica

Dada una aplicación lineal $f: V \to E$, consideramos la siguientes funciones:

- $p: V \to V/_{\mathrm{Ker}(f)}$ donde $p(\vec{x}) = [\vec{x}]$.
  p es un epimorfismo y recibe el nombre de **proyección**.
- $\overline{f}: V/_{\mathrm{Ker}(f)} \to \mathrm{Im}(f)$ donde $\overline{f}([\vec{x}]) = f(\vec{x})$. $\overline{f}$ es un isomorfismo.
- $i: \mathrm{Im}(f) \to E$ donde $i(\vec{x}) = \vec{x}$.
  i es un monomorfismo que recibe el nombre de **inclusión**.

Con estas aplicaciones se tiene que

$$f = i \circ \overline{f} \circ p$$

Teorema 3 *Sea $f: V \to E$ una aplicación lineal.*

$$\dim V = \dim \big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim \big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Teorema 4 *Sea $f: V \to E$ una aplicación lineal.*

- *f es inyectiva si y sólo si rg$(f) = \dim V$.*
- *f es sobreyectiva si y sólo si rg$(f) = \dim E$.*

5.4. Aplicaciones Lineales y Matrices.

Una aplicación lineal viene determinada por las imágenes de los vectores de una base.

Sea $f : V \to E$ una aplicación lineal, $B_1 = \{\vec{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ una base de V, $B_2 = \{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ una base de E y

$$f(\vec{e_1}) = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}) \text{ resp. de } B_2$$
$$f(\vec{e_2}) = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}) \text{ resp. de } B_2$$
$$\vdots$$
$$f(\vec{e_n}) = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm}) \text{ resp. de } B_2$$

Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en B_1, entonces $f(\vec{x})$ tiene como representación en B_2 la siguiente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Denotaremos a esta matriz por $\mathcal{M}(f, B_1, B_2)$.

5.5. Espacios vectoriales isomorfos.

Dados dos espacios vectoriales V y E sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, decimos que una aplicación $f : V \to E$ es un **isomorfismo de espacios vectoriales** si satisface las dos condiciones siguientes:

- f es una aplicación lineal.
- f es biyectiva.

y decimos que V y E son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos.

Teorema 5 *Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, entonces V es isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Proposición 6 *Sean V y E dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ tales que $\dim(V) = \dim(E)$. Una aplicación $f : V \to E$ es un isomorfismo si y sólo si su matriz asociada (respecto de cualquier base) es regular.*

Teorema 7 *Dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.*

5.6. Operaciones con aplicaciones lineales.

Teorema 8 *Sean V y E dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo y sean B_1 y B_2 bases de V y E respectivamente.*
Si $f, g : V \to E$ son ap. lineales y $A = \mathcal{M}(f, B_1, B_2)$ y $C = \mathcal{M}(g, B_1, B_2)$ entonces:

- *$f + g$ es una aplicación lineal y $A + C = \mathcal{M}(f + g, B_1, B_2)$*
- *λf es una aplicación lineal (para todo escalar λ) y $\lambda A = \mathcal{M}(\lambda f, B_1, B_2)$*

Teorema 9 *Sean V_1, V_2 y V_3 espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo y sean B_1, B_2 y B_3 bases de V_1, V_2 y V_3 respectivamente.*
Si $f : V_1 \to V_2$ y $g : V_2 \to V_3$ son ap. lineales y $A = \mathcal{M}(f, B_1, B_2)$ y $C = \mathcal{M}(g, B_2, B_3)$ entonces:

$g \circ f$ es una aplicación lineal y $CA = \mathcal{M}(g \circ f, B_1, B_3)$

5.7. Influencia del cambio de base en la matriz asociada a una aplicaciones lineal.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y B_1 y B_2 dos bases. Si P es la matriz del cambio de base de B_1 a B_2 se tiene que

$$P = \mathcal{M}(I_V, B_1, B_2)$$

y, como consecuencia de ello, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 10 *Sea $f : V_1 \to V_2$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita sobre una mismo cuerpo. Si:*

- *B_1 y B_1' son bases de V_1 y P la matriz de cambio de base de B_1' a B_1.*
- *B_2 y B_2' son bases de V_2 y Q la matriz de cambio de base de B_2' a B_2.*
- *$A = \mathcal{M}(f, B_1, B_2)$ y $A' = \mathcal{M}(f, B_1', B_2')$*

entonces $A' = Q^{-1}AP$

Corolario 11 *Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal (endomorfismo). Si:*

- *B_1 y B_1' son bases de V y P la matriz de cambio de base de B_1' a B_1.*
- *$A = \mathcal{M}(f, B_1)$ y $A' = \mathcal{M}(f, B_1')$*

entonces $A' = P^{-1}AP$

5.8. Diagonalización de endomorfismos

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo abeliano K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $f : V \to V$ una aplicación lineal.

Buscamos una base en la que la matriz asociada sea lo más sencilla posible, a ser posible, diagonal. Si esto es posible, decimos que f es **diagonalizable**.

Si $A = \mathcal{M}(f, B)$ y f es diagonalizable, buscamos una matriz de paso P y una matriz diagonal tales que

$$D = P^{-1}AP$$

Ejemplo 12 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *es diagonalizable ya que*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *no es diagonalizable.*

Dado un endomorfismo f en un espacio vectorial, buscamos una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ tal que la matriz asociada a f en ella sea diagonal, es decir,

$$\mathcal{M}(f, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el modo en que se construye esta matriz, esto quiere decir que

$$\begin{gathered}
f(\vec{e}_1) = (\lambda_1, 0, \ldots, 0) resp. B = \lambda_1 \vec{e}_1 \\
f(\vec{e}_2) = (0, \lambda_2, \ldots, 0) resp. B = \lambda_2 \vec{e}_2 \\
\vdots \\
f(\vec{e}_n) = (0, 0, \ldots, \lambda_n) resp. B = \lambda_n \vec{e}_n
\end{gathered}$$

Por tanto, necesitamos una base cuyos vectores satisfagan que

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

para algún escalar λ.

5.8.1. Autovalores y Autovectores

Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal. Si $f(\vec{x}) = \lambda\, \vec{x}$ con $\vec{x} \neq \vec{0}$, decimos que λ es un **autovalor** o **valor propio** y que $\vec{x}$ es una **autovector** o **vector propio**.

- Cada autovector tiene asociado un único autovalor.
- Cada autovalor tiene asociados más de un autovector (si $\vec{x}$ es autovector asociado a λ, $\mu\vec{x}$ también).

Ejemplo 13 *Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión 2 y sea B una base tal que la matriz asociada a f en la base B es*

$$\mathcal{M}(f,B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Buscamos una base formada por autovectores (así la matriz asociada a f en ella será diagonal) Para ello vamos a calcular todos los autovalores y autovectores de f

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

donde buscamos los valores de λ, x_1 y x_2. Despejamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para poder sacar el vector $\vec{x}$ introducimos la matriz identidad

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda entonces un Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneo (siempre compatible) con un parámetro (λ) *y buscamos soluciones distintas a* $(0,0)$, *es decir, necesitamos que el Sistema se Compatible Indeterminado. Para ello, es necesario que*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Nos queda la ecuación $(2-\lambda)(3-\lambda)=0$ *cuyas soluciones son* 2 *y* 3. *Por tanto, sólo para* $\lambda=2$ *y para* $\lambda=3$ *el sistema es compatible indeterminado, es decir, sólo estos dos valores son autovalores.*

Nos queda por averiguar cuáles son los autovectores asociados a 2 y cuáles a 3. Para los de 2 resolvemos el sistema obtenido cambiando λ *por 2*

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y nos da como soluciones $\{(x_1,x_2)resp.B | x_2 = 0\} = \{(a,0)resp.B | a \in \mathbb{R}\}$.

Para calcular los autovectores asociados a 3 resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos como soluciones $\{(x_1,x_2)resp.B | x_1 = x_2\} = \{(a,a)resp.B | a \in \mathbb{R}\}$.

Hemos calculado todos los autovectores. Nos falta por ver si es posible elegir una base formada por autovectores y si es posible, por ejemplo, la siguiente

$$B' = \{(1,0)resp.B, (1,1)resp.B\}$$

Para comprobar que con esta base hemos conseguido nuestro objetivo, vamos a calcula la matriz asociada a f *en ella mediante un cambio de base: la matriz de cambio de base de* B' *a* B *es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la de B a B', su inversa. Efectivamente, haciendo el cambio de base obtenemos una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son los autovalores.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.8.2. Diagonabilidad. Teoremas fundamentales.

Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial V y sea A su matriz asociada en una base B. Para determinar los autovalores y autovectores resolvemos la siguiente ecuación:

$$AX = \lambda X$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado si y sólo si $|A - \lambda I| = 0$.
Llamamos **ecuación característica de** A a $|A - \lambda I| = 0$ y, si λ_i es una solución de ella,

- λ_i es un autovalor de A y
- $N_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$ es el conjunto de autovectores asociados a λ_i.
  Decimos que N_{λ_i} es un **subespacio propio**.

Proposición 14 *Sea A una matriz cuadrada y λ_i un autovalor con multiplicidad α_i.*

$$0 < \mathrm{Dim}(N_{\lambda_i}) \leq \alpha_i$$

Teorema 15 *Los autovectores asociados a autovalores diferentes son L.I.*

Corolario 16 *Si una matriz $n \times n$ tiene n autovalores diferentes, es diagonalizable.*

Ejemplo 17 *Consideremos la matriz* $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Polinomio característico: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6$

Ecuación característica: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

Autovalores: $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N_1 = L(\{(1,-1)\}) \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N_6 = L(\{(4,1)\})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordemos que se dice que un polinomio, $p(x)$, se puede factorizar en $\mathbb{K}$ si existen $a, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ tales que

$$p(x) = a(x-\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (x-\lambda_r)^{\alpha_r}$$

y decimos que α_i es la multiplicidad de λ_i.

Teorema 18 *Una matriz A es diagonalizable si y sólo si se satisfacen las condiciones siguientes*

1. *El polinomio característico se puede factorizar en K.*

$$p(x) = a(x-\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (x-\lambda_r)^{\alpha_r}$$

2. *Para cada autovalor λ_i, se tiene que* $\dim(N_{\lambda_i}) = \alpha_i$.

Ejemplo 19 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Polinomio característico: $|A - \lambda I| = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = -(\lambda+3)^2(\lambda-5)$.

Autovalores: -3 *con multiplicidad* 2 *y* 5 *con multiplicidad* 1.

Autovectores: $N_{-3} = L(\{(-2,1,0),(3,0,1)\})$ *y* $N_5 = L(\{(-1,-2,1)\})$.

En $B = \{(-2,1,0),(3,0,1),(-1,-2,1)\}$ *la matriz asociada a la aplicación es diagonal.*

$$P^{-1}AP = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5.9. Aplicaciones de la diagonalización

Teorema 20 (de Cayley-Hamilton) *Toda matriz cuadrada en $\mathbb{C}$ es raíz de su polinomio característico.*

Si el polinomio característico o el polinomio mínimo de A es $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ entonces $a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n$ En consecuencia,

$$A^n = -\frac{a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n}{a_n}$$

y, si $a_0 \neq 0$ (obsérvese que, en el polinomio característico, $a_0 = |A|$) entonces

$$A^{-1} = -\frac{a_n A^{n-1} + \cdots + a_1 I_n}{a_0}$$

Por otro lado, si A es diagonalizable con $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ se tiene que A^m es

$$(PDP^{-1})^m = PDP^{-1}PDP^{-1} \overset{m}{\dots} PDP^{-1} = PD^mP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

y $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$

Exponencial de una matriz: se define como

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$$

En el caso en que la matriz se pueda diagonalizar como $A = PDP^{-1}$ tenemos que

$$e^A = Pe^D P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$