Contents

6. Formas Bilineales y Producto Escalar

6.1. Formas bilineales

Sea V un espacio vectorial sobre K. Decimos que una aplicación $\mathbf{f} : V \times V \to K$ es una **forma bilineal** si satisface:

$$i. \quad f(\lambda\mathbf{x_1} + \mu\mathbf{x_2}, \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x_1}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{x_2}, \mathbf{x})$$

$$ii. \quad f(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x_1} + \mu\mathbf{x_2}) = \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{x_1}) + \mu f(\mathbf{x}, \mathbf{x_2})$$

para todo $\lambda, \mu \in K$ y todo $\mathbf{x}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in V$.

Ejemplo 1

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *donde* $f_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$ *es forma bilineal.*
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *donde* $f_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2y_1 + x_2y_2 + 5$ *no lo es.*

6.1.1. Matriz de una forma bilineal

Sea $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ una base de V.

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ respecto de la base B, entonces

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n) \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}) & \mathbf{f}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}) & \ldots & \mathbf{f}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_n}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}) & \mathbf{f}(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}) & \ldots & \mathbf{f}(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{f}(\mathbf{e_n}, \mathbf{e_1}) & \mathbf{f}(\mathbf{e_n}, \mathbf{e_2}) & \ldots & \mathbf{f}(\mathbf{e_n}, \mathbf{e_n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

6.1.2. Formas bilineales simétricas

Decimos que es **simétrica** si, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

y decimos que es **antisimétrica** si, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Proposición 2 *Sea* $\mathbf{f} : V \times V \to K$ *una forma bilineal.*

- $\mathbf{f}$ *es antisimétrica si y sólo si* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$*.*

Proposición 3 *Sea* $\mathbf{f} : V \times V \to K$ *una forma bilineal y* A *su matriz asociada respecto de cualquier base.*

- $\mathbf{f}$ *es simétrica si y sólo si* $A^t = A$*.*
- $\mathbf{f}$ *es antisimétrica si y sólo si* $A^t = -A$*.*

6.1.3. Formas bilineales degeneradas

Proposición 4 *Sea* $\mathbf{f} : V \times V \to K$ *una forma bilineal. Para todo* $\mathbf{x} \in V$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$$

Decimos que es **degenerada** si existe un vector $\mathbf{x_0} \in V$ tal que se cumple una de las dos condiciones siguientes:

- Para todo $\mathbf{y} \in V$, $\mathbf{f}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y}) = 0$
- Para todo $\mathbf{y} \in V$, $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x_0}) = 0$

Proposición 5 *Sea* $\mathbf{f} : V \times V \to K$ *una forma bilineal y* A *su matriz asociada respecto de cualquier base.*

- $\mathbf{f}$ *es degenerada si y sólo si* $|A| = 0$.

6.1.4. Clasificación de formas bilineales por el signo

Decimos que una forma bilineal $\mathbf{f}$ es:

- **definida positiva** si $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **definida negativa** si $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}) < 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **semidefinida positiva** si $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in V$ y no es definida.
- **semidefinida negativa** si $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}) \leq 0$, para todo $\mathbf{x} \in V$ y no es definida.
- **indefinida** en otro caso.

Proposición 6 *Sea* $\mathbf{f} : V \times V \to K$ *una forma bilineal.*

- *Si* $\mathbf{f}$ *es definida (positiva o negativa) entonces es no degenerada.*
- *Si* $\mathbf{f}$ *es semidefinida (positiva o negativa) entonces es degenerada.*

6.1.5. Cambio de base

Teorema 7 *Sea f una forma bilineal en V y B y B' bases de V. Si*

- *A la matriz asociada a f en la base B.*
- *A' la matriz asociada a f en la base B'.*
- *P la matriz de cambio de base de B' a B.*

Entonces $A' = P^t A P$.

6.2. Formas Multilineales

Sean $V_1, \dots, V_n$ y V_{n+1} espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K.
Decimos que $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to V_{n+1}$ es una **aplicación multilineal** si

$$f(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_{i-1}}, \lambda \mathbf{x_i} + \mu \mathbf{y_i}, \mathbf{x_{i+1}}, \dots, \mathbf{x_n}) =$$
$$= \lambda f(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_{i-1}}, \mathbf{x_i}, \mathbf{x_{i+1}}, \dots, \mathbf{x_n}) + \mu f(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_{i-1}}, \mathbf{y_i}, \mathbf{x_{i+1}}, \dots, \mathbf{x_n})$$

para todo $\lambda, \mu \in K$, todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y todo $\mathbf{x_i}, \mathbf{y_i} \in V_i$.
Llamamos **forma multilineal** en un espacio vectorial V sobre K a toda aplicación multilineal

$$\mathbf{f} : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow K$$

Decimos que es **simétrica** si, para todo $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n} \in V$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_i}, \ldots, \mathbf{x_j}, \ldots, \mathbf{x_n}) = \mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_j}, \ldots, \mathbf{x_i}, \ldots, \mathbf{x_n})$$

y **antisimétrica** si, para todo $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n} \in V$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_i}, \ldots, \mathbf{x_j}, \ldots, \mathbf{x_n}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_j}, \ldots, \mathbf{x_i}, \ldots, \mathbf{x_n})$$

Decimos que es **alternada** si, para todo $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n} \in V$,

$$\text{si } \mathbf{x_i} = \mathbf{x_j} \text{ para algun } i \neq j \text{ entonces } \mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_i}, \ldots, \mathbf{x_j}, \ldots, \mathbf{x_n}) = 0$$

Teorema 8 *Sea* $\mathbf{f}$ *una forma multilineal en un espacio* V *sobre* $\mathbb{R}$ *(o* $\mathbb{C}$*).*

$$\mathbf{f} \textit{ es alternada si y sólo si } \mathbf{f} \textit{ es antisimétrica.}$$

Proposición 9 *Sea* $\mathbf{f}$ *una forma multilineal alternada.*

- *Si, para algún* i*,* $\mathbf{x_i} = \mathbf{0}$ *entonces* $\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_i}, \ldots, \mathbf{x_n}) = 0$
- *Si* $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}$ *son L.D. entonces* $\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) = 0$

6.3. Determinante

Sea V un espacio vectorial sobre K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ una base.
Llamamos **determinante** en B a la única forma multilineal alternada en V del tipo $\det_B :$ $V \times \overset{n}{\ldots} \times V \to K$ que cumple

$$\det_B(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}) = 1$$

Sean $\mathbf{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ resp. de B $(1 \leq i \leq n)$ vectores de V.

$$\begin{aligned}
\det_B(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}) &= \det_B\Big(\sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1}\mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} x_{2j_2}\mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} x_{nj_n}\mathbf{e}_{j_n}\Big) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1} \sum_{j_2=1}^{n} x_{2j_2} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} x_{nj_n} \det_B(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} x_{1j_1} x_{2j_2} \ldots x_{nj_n} \det_B(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_n})
\end{aligned}$$

$$\det_B(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}) = \sum_{\sigma \in S(n)} (-1)^{\mathrm{sg}(\sigma)} x_{1j_1} x_{2j_2} \ldots x_{nj_n} \quad \text{con } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

6.3.1. Determinante de una Matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$|A| = \det_B(A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n)$ con $A_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ respecto de B.

$$S(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$|S(4)| = 4! = 24 \qquad |S(5)| = 5! = 120 \qquad |S(6)| = 6! = 720$$

6.3.2. Propiedades de los Determinantes de Matrices

1. El determinante de una matriz diagonal o triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.
2. $|A| = |A^t|$
3. Al intercambiar dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo.
4. Si dos filas (o columnas) son iguales, el determinante es cero.
5. Si una fila (o columna) es de ceros, el determinante es cero.
6. Si multiplicamos una fila (o columna) por un escalar λ, el determinante queda multiplicado por λ.
7. Si una fila (o columna) es combinación lineal de las restantes, el determinante es cero.
8. Si cambiamos la fila (o columna) A_i por $A_i + \lambda A_j$, el determinante no cambia.

6.4. Formas Cuadráticas

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Llamamos **forma cuadrática** asociada a f a la aplicación

$$\varphi : V \to \mathbb{R} \qquad \varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

y decimos que f es la **forma polar** de φ. Además,

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}))$$

Ejemplo 10 *Para cualquier par de vectores* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$$

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\varphi(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Clasificación:

- **Definida positiva** si $\varphi(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$.
- **Semidefinida positiva** si $\varphi(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$ y no es definida positiva.
- **Definida negativa** si $\varphi(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$.
- **Semidefinida negativa** si $\varphi(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$ y no es definida negativa.
- **Indefinida** en otro caso.

Llamamos **menores principales**, P_r, a los menores $M_{1\ldots r;1\ldots r}$

- Una forma cuadrática es definida positiva si y sólo si todos los menores principales son estrictamente positivos.

$$P_1 > 0, \quad P_2 > 0, \quad \ldots, \quad P_n > 0$$

- Una forma cuadrática es definida negativa si y sólo si P_1 es negativo y el resto de los menores principales van alternando el signo.

$$P_1 < 0, \quad P_2 > 0, \quad P_3 < 0, \quad P_4 > 0 \quad \ldots$$

6.5. Espacios con producto interior.

6.5.1. Producto escalar

Llamamos **producto escalar** en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ a cualquier forma bilineal, definida positiva y simétrica.

$$\cdot \ : \ V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Llamamos **espacio vectorial euclídeo** a cualquier espacio vectorial dotado de un producto escalar, $(V, \cdot)$.

6.5.2. Norma de un vector

En un espacio vectorial euclídeo, $(V, \cdot)$, llamamos **norma** de un vector $\mathbf{x}$ a

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

6.5.3. Propiedades

Sea $(V, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$
2. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
3. $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$
5. $\|\lambda \cdot \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$

6.5.4. Ángulo entre dos vectores

Sea $(V, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ dos vectores no nulos. Definimos el **ángulo** que forman $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ como

$$\alpha = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

En consecuencia, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos \alpha$

6.5.5. Ortogonalidad

Decimos que $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ son **ortogonales** si $\mathbf{x_i} \cdot \mathbf{x_j} = 0$ para todo $i \neq j$.

Decimos que $\mathbf{x}$ es **unitario** si $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Decimos que $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ son **ortonormales** si son ortogonales y unitarios.

PROPIEDADES:

- Todo conjunto de vectores ortogonales es L.I.
- Sean $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ vectores ortogonales y $1 \leq i \leq n$.

  Todo vector de $\langle\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_i}\}\rangle$ es ortogonal a todo vector de $\langle\{\mathbf{x_{i+1}}, \ldots, \mathbf{x_n}\}\rangle$.
- La matriz asociada al producto escalar en una base ortonormal es la identidad.

6.5.6. Bases ortogonales y ortonormales

MÉTODO DE GRAM-SMITH: Sea $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$ un conjunto de vectores L.I. en un espacio euclídeo.

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{x_1}$$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{x_2} - \frac{\mathbf{x_2 u_1}}{\mathbf{u_1 u_1}}\mathbf{u_1}$$

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{x_3} - \frac{\mathbf{x_3 u_1}}{\mathbf{u_1 u_1}}\mathbf{u_1} - \frac{\mathbf{x_3 u_2}}{\mathbf{u_2 u_2}}\mathbf{u_2}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u_n} = \mathbf{x_n} - \frac{\mathbf{x_n u_1}}{\mathbf{u_1 u_1}}\mathbf{u_1} \cdots - \frac{\mathbf{x_n u_{n-1}}}{\mathbf{u_{n-1} u_{n-1}}}\mathbf{u_{n-1}}$$

$\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ es ortogonal y $\{\mathbf{u_1}^0, \mathbf{u_2}^0, \mathbf{u_3}^0, \ldots, \mathbf{u_n}^0\}$ es ortonormal, donde

$$\mathbf{u_i}^0 = \frac{\mathbf{u_i}}{\|\mathbf{u_i}\|}$$

Además, para todo $1 \leq i \leq n$,

$$\langle\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_i}\}\rangle = \langle\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_i}\}\rangle = \langle\{\mathbf{u_1}^0, \ldots, \mathbf{u_i}^0\}\rangle$$

6.5.7. Orientación de un espacio vectorial euclídeo

Si consideramos una base ortonormal $B = \{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ y definido el determinante, $D(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}) = 1$, decimos que B define una orientación.

Cualquier base tendrá determinante positivo o negativo (nunca nulo).

Diremos que otra base B' es **positiva** si su determinante es positivo y **negativa** en caso contrario.

En $\mathbb{R}^2$ con la base canónica, cuando la orientación de la base $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es positiva,

$$Det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \text{ sen } \alpha$$

que es el área del paralelogramo formado por los vectores.

En $\mathbb{R}^3$ con la base canónica, cuando la orientación de la base $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es positiva, $Det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores.

6.5.8. Producto vectorial

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 orientado.

Definimos el **producto vectorial** de dos vectores, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, como el único vector $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ que verifica:

1. $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ es ortogonal a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
2. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son independientes, $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\}$ es una base orientada positivamente.
3. $||\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}||\ ||\mathbf{y}||$ senα donde α es el ángulo formado por los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

PROPIEDADES:

1. Para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se cumple que $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \wedge \mathbf{x})$.
2. $\mathbf{x} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Sean $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{0} \text{ si y sólo si } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ son linealmente dependientes.}$$

Expresión analítica en $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

6.6. Diagonalización de formas bilineales simétricas

Recordemos que si f es una forma bilineal en V (es decir, $f : V \times V \to K$), A es la matriz asociada a f en una base B y A' es la matriz asociada a f en otra base B', el cambio de base es

$$A' = P^t A P$$

donde P es la matriz de cambio de base de B' a B.

6.6.1. Matrices ortogonales

Para que lo estudiado en el apartado anterior nos sirviera, sería suficiente que la matriz de paso P fuese ortogonal (una matriz P es **ortogonal** si $P^{-1} = P^t$)

PROPIEDADES:

- P es ortogonal si y sólo si sus columnas son ortonormales.
- La matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales es ortogonal.
- Si P es una matriz ortogonal, $|P| = 1$ o $|P| = -1$.

6.6.2. Diagonalización de matrices simétricas

Teorema 11

1. *Todas las raíces del polinomio característico de una matriz simétrica son reales.*
2. *Los autovectores asociados a autovalores diferentes, además de L.I., son ortogonales.*

Por tanto, si una matriz simétrica, A, es diagonalizable, aplicando el método de Gram-Smith a una base de cada uno de los subespacios propios, se puede diagonalizar de la siguiente forma

$$D = P^t A P$$

Teorema 12 (Espectral) *Toda matriz simétrica de coeficientes reales es ortogonalmente diagonalizable.*

Ejemplo 13 *Consideremos la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Autovalores: 2 *con multiplicidad* 2 *y* 4 *con multiplicidad* 1.

Autovectores:

$$N_2 = L(\{(1,1,0),(1,1,1)\}) = L(\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,0,1)\})$$

$$N_4 = L(\{(1,-1,0)\}) = L(\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\})$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.7. Diagonalización de formas cuadráticas

RECORDEMOS QUE:

Dada una forma bilineal simétrica, $f : V \times V \to \mathbb{R}$, definimos la **forma cuadrática** asociada a f como la aplicación

$$\varphi : V \to \mathbb{R} \qquad \varphi(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$$

y decimos que f es la **forma polar** de φ. Además,

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(\varphi(\vec{x} + \vec{y}) - \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}))$$

CLASIFICACIÓN:

- **Definida positiva** si $\varphi(\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \neq 0$.
- **Semidefinida positiva** si $\varphi(\vec{x}) \geq 0$ para todo $\vec{x} \neq 0$ y no es definida positiva.
- **Definida negativa** si $\varphi(\vec{x}) < 0$ para todo $\vec{x} \neq 0$.
- **Semidefinida negativa** si $\varphi(\vec{x}) \leq 0$ para todo $\vec{x} \neq 0$ y no es definida negativa.
- **Indefinida** en otro caso.

Decimos que una forma cuadrática está en **forma canónica** si su expresión es suma de cuadrados.

6.7.1. Método de los autovalores

Ejemplo 14 *Consideremos la forma cuadrática* $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ *cuya representación matricial es*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Si calculamos los autovalores obtenemos:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2} \qquad 0$$

Es decir, existe una base en la que la representación matricial es

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

siendo (x_1', x_2', x_3') *la representación en dicha base del vector* (x_1, x_2, x_3).

6.7.2. Método de Lagrange

Ejemplo 15

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\\ &= (x_1+\tfrac{1}{2}x_2)^2 - \tfrac{1}{4}x_2^2 + x_2^2\\ &= (x_1+\tfrac{1}{2}x_2)^2 + \tfrac{3}{4}x_2^2\\ &= x_1'^2 + \tfrac{3}{4}x_2'^2\end{aligned}$$

Cambio de base

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\\ x_2' &= x_2\\ x_3' &= x_3\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 16 (de Sylvester) *Todas las formas canónicas de una misma forma cuadrática tienen el mismo número de coeficientes positivos, negativos y nulos.*

- Llamamos **rango** al número de coeficientes no nulos (rango de la matriz).
- Llamamos **signatura** al número de coeficientes estrictamente positivos.

CLASIFICACIÓN:

- **Definida positiva** si **orden=rango=signatura**.
- **Semidefinida positiva** si **orden>rango=signatura**.
- **Definida negativa** si **orden=rango** y **signatura=0**.
- **Semidefinida negativa** si **orden>rango** y **signatura=0**.
- **Indefinida** en otro caso.

6.7.3. Criterio de Sylvester

Llamamos **menores principales**, P_r, a los menores $M_{1\ldots r;1\ldots r}$

- Una forma cuadrática es definida positiva si y sólo si todos los menores principales son estrictamente positivos.

$$P_1 > 0, \quad P_2 > 0, \quad \ldots, \quad P_n > 0$$

- Una forma cuadrática es definida negativa si y sólo si P_1 es negativo y el resto de los menores principales van alternando el signo.

$$P_1 < 0, \quad P_2 > 0, \quad P_3 < 0, \quad P_4 > 0 \quad \ldots$$