Ejercicios del tema 6

Formas bilineales y Producto Escalar

Álgebra Lineal y Matemática Discreta.
E.T.S.I. de Telecomunicación.

Ej. 1 — Comprueba que la forma bilineal $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_2(y_1-y_2) - 2x_1(y_1-y_2)$ es degenerada encontrando al menos un vector degenerado para f. Comprueba, además, que es indefinida.

Ej. 2 — Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida como: $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$

1. Halla la matriz A de f en la base $\{u_1 = (1,0), u_2 = (1,1)\}$.
2. Halla la matriz B de f en la base $\{v_1 = (2,1), v_2 = (1,-1)\}$.
3. Encuentra la matriz de cambio de base P de la base $\{v_1,v_2\}$ a la base $\{u_1,u_2\}$ y comprueba que $B = P^TAP$.

Ej. 3 — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de una forma bilineal respecto a la base canónica, se pide:

1. Calcula su matriz respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$.
2. Determina si es o no es degenerada.
3. Da las expresiones analíticas de la forma cuadrática asociada a f respecto de la base canónica y respecto de la base $\mathcal{B}$ anterior.

Ej. 4 — Dada la siguiente matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, encuentra las expresiones analíticas de:

1. El endomorfismo asociado a A.
2. La forma bilineal asociada a A.
3. La forma cuadrática asociada a A.

Ej. 5 — Sea V el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2. Para $f,g \in V$, se define el siguiente producto escalar: $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Se pide:

1. Da una base ortonormal para este producto escalar
2. Dados los polinomios $p(t) = t+2$ y $q(t) = 2t-3$; halla sus módulos y el coseno del ángulo que forman.

Ej. 6 — ¿Qué ángulo deben formar los vectores unitarios $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que la norma del vector suma tome el valor $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{3}$.

Ej. 7 — Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado ≤ 2. Sean a, b, c tres números reales distintos. Se considera la aplicación $f : V \times V \to \mathbb{R}$, definida de la forma:

$$f(p(x), q(x)) = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$$

1. Probar que es una forma bilineal simétrica.
2. Hallar la matriz asociada a dicha forma bilineal en la base $B = \{1, x, x^2\}$.
3. Para $a = -1$, $b = 1$ y $c = 0$, f define un producto escalar. Encontrar una base ortonormal, para dicho producto escalar, del subespacio de los polinomios sin término independiente.

Ej. 8 — Sabemos que dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ verifican $\|\vec{v}\| = 2\|\vec{u}\|$ y que $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 2$. Expresa el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en función del módulo de $\vec{u}$.

1. Encuentra para que valor de $\|\vec{u}\|$ se tiene que el ángulo entre ambos vectores sea $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.
2. Encuentra, si existen, vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en las anteriores condiciones con la condición de que $\|\vec{v}\|^2 = 2$.

Ej. 9 — En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto usual se pide:

1. Obtener mediante el método de Gram-Schmidt una base de vectores ortonormales para el subespacio:
$$S = L\{(1, 2, -1, 0),\ (0, 1, 1, 0),\ (1, 0, -2, 1)\}$$
2. Determina una base ortonormal del espacio ortogonal $S^\perp$ del subespacio anterior.

Ej. 10 — De un endomorfismo F de $\mathbb{R}^4$ se conoce :

a) $\operatorname{Im} F = \ker F$.

b) $F(1, 2, -2, 1) = (0, 1, 0, 1)$ y $F(3, 3, -1, 2) = (1, 0, 1, 0)$

Se pide:

1. Calcula la matriz de F.
2. Ecuaciones paramétricas e implícitas de $\operatorname{Im} F$ (o del núcleo) y una base ortonormal de la misma.

Ej. 11 — Consideramos el producto escalar definido por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Comprueba que, efectivamente, es la matriz de un producto escalar.
2. A partir de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, obtén una base ortonormal respecto de dicho producto escalar y halla la matriz del cambio de base.

Ej. 12 — Consideramos el espacio euclídeo tridimensional y el subespacio vectorial S generado por la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$. Se pide:

1. Matriz A del producto escalar restringido a S.
2. Sustituye el segundo vector de la base $\mathcal{B}$ por otro vector $\vec{x}$ de forma que $\{(1,0,2),\vec{x}\}$ sea una base ortogonal de S.
3. Encuentra la matriz B asociada a este producto escalar en esta nueva base y la matriz P que hace $B = P^T AP$.

Ej. 13 — Calcula una base, así como las ecuaciones, del subespacio ortogonal en $\mathbb{R}^4$ del subespacio

$$S \equiv \begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

Ej. 14 — Diagonalizar la matriz A y encontrar la matriz de paso ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ej. 15 — Clasifica las siguientes formas cuadráticas:

1. $3x^2 - 6xy + 11y^2$
2. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2xz + 2yz + 3z^2$
3. $xy + yz + zx$

Ej. 16 — Clasifica la siguiente forma cuadrática para los distintos valores de a.

$$q(x,y,z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + (\alpha - 1)z^2 + 2xy \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ fijo.}$$

Ej. 17 — Diagonaliza las formas cuadráticas del ejercicio 15 anterior.

Ej. 18 — Dada la forma cuadrática cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a+c & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. Exprésala como suma de cuadrados usando dos métodos diferentes.
2. Clasifícala en función de los parámetros a y c.
3. Pon un ejemplo, si existe, de valores de a y c para los que la forma cuadrática es definida positiva.
4. Pon un ejemplo, si existe, de valores de a y c para los que la forma cuadrática es semidefinida positiva.
5. Pon un ejemplo, si existe, de valores de a y c para los que la forma cuadrática es indefinida.

Ej. 19 — Diagonaliza de dos maneras distintas las formas cuadráticas siguientes:

1. $q(x,y) = -6xy + 8y^2$
2. $q(x,y,z,t) = x^2 + 2y^2 - 6xz + z^2 - 4t^2$

Ej. 20 — Se consideran en $\mathbb{R}^3$ y con respecto a la base canónica, las formas cuadráticas

$$q_a(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2ayz$$

donde a es un parámetro real. Diagonaliza y estudia el carácter de q_a para los distintos valores de a.