TEMA 7

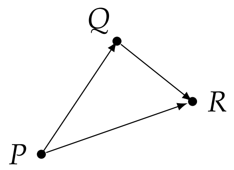
GEOMETRÍA

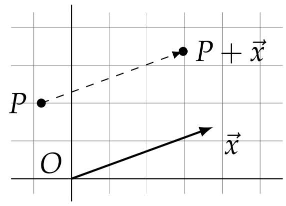
Índice

7.1. El Espacio afín

Los espacios vectoriales nos dan una imagen geométrica muy limitada, puesto que sus elementos son vectores. Generalmente los conceptos geométricos comienzan con la definición de puntos. El espacio geométrico más próximo al espacio vectorial es el *espacio afín*.

Definición 7.1. Llamaremos **espacio afín** a una cuaterna $(\mathbf{A}, V, \mathbb{K}, \varphi)$, donde: $\mathbf{A}$ es un conjunto cuyos elementos llamamos **puntos**,V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\varphi\colon \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to V$ es una función que a cada dos puntos $P, Q \in \mathbf{A}$ le asigna un vector $\varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \in V$ y que verifica los siguientes axiomas:

1. (Relación de Chasles). Si P, Q, R son elementos de $\mathbf{A}$, entonces
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$


2. Si $P \in \mathbf{A}$ y $\vec{x} \in V$ exise un único punto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{x}$.
Este punto lo representamos $Q = P + \vec{x}$.


Llamaremos **dimensión** del espacio afín a la dimensión del espacio vectorial V asociado a $\mathbf{A}$.

Ejemplo 7.2. Todo espacio vectorial V puede ser considerado un espacio afín (asociado a sí mismo) sin más que identificar los puntos con los vectores $P = \vec{x}$, $Q = \vec{y}$ y definiendo $\overrightarrow{PQ} = \vec{y} - \vec{x}$.

Propiedades. De forma inmediata, a partir de la definición, tenemos las siguientes propiedades:

1. Para cada $P \in \mathbf{A}$ se tiene $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.
2. Para cada par de puntos $P, Q \in \mathbf{A}$ se tiene $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
3. (Regla del paralelogramo). Si $P, Q, R, S \in \mathbf{A}$ entonces
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \iff \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$$

Ejercicio 7.3. *Prueba las anteriores propiedades.*

7.1.1. Sistemas de Referencia

Al punto O se le llama *origen* del sistema u *origen de coordenadas*.

Llamamos **sistema de refencia afín** de $\mathbf{A}$ al formado por un punto de $O \in \mathbf{A}$ y una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ del espacio vectorial asociado V. Un sistema lo expresamos de la forma
$$\mathcal{R} = \{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$$

Todo punto P de $\mathbf{A}$ tiene unas coordenadas respecto al sistema de referencia que serán las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$, así
$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)_{\mathcal{R}} \iff \overrightarrow{OP} = p_1\vec{v}_1 + p_2\vec{v}_2 + \cdots + p_n\vec{v}_n$$

Ejemplo 7.4. En el espacio afín $\mathbf{A} = \mathbb{R}^n$ se suele llamar *sistema de referencia canónico* el que se construye a partir de la base canónica

$$\mathcal{R}_C = \{O; (1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)\}$$

siendo el origen el punto $O = (0,0,\ldots,0)$.

Cambio de coordenadas

Dado un punto de coordenadas $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ respecto al sistema $\mathcal{R} = \{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots . \vec{v}_n\}$, queremos calcular sus *nuevas coordenadas*

$$X(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{\mathcal{S}}$$

respecto al sistema $\mathcal{S} = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Para ello, calculamos las coordenadas de $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)_{\mathcal{R}}$ en $\mathcal{R}$ y la matriz A del cambio de base de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots . \vec{e}_n\}$ a $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. Entonces

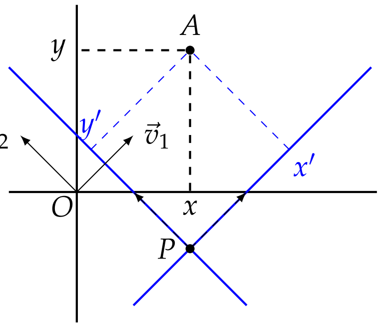
$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}$$

y las coordenadas de $X(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{\mathcal{S}}$ en el nuevo sistema de referencia cumplen la relación

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 7.5. *En el espacio afín $\mathbf{A} = \mathbb{R}^2$ calcula las coordenadas del punto $A(x, y)$ en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ siendo*

$$P = (2, -1)$$
$$\vec{v}_1 = (1, 1)$$
$$\vec{v}_2 = (-1, 1)$$



Nota. A veces es habitual dar un sistema de referencia a partir de $n+1$ puntos del espacio afín, $\mathcal{R} = \{O; A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, de forma que los vectores $\{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}\}$ forman una base de V. Es evidente que esta manera de dar un sistema de referencia es equivalente a la anterior.

7.1.2. Subespacios afines

Un subconjunto no vacío L de puntos de un espacio afín $\mathbf{A}$ asociado a un espacio vectorial V es un **subespacio afín** si existe algún subespacio vectorial $S \subseteq V$ para el que L es un espacio afín. Como es habitual llamaremos dimensión de L a la dimensión del subespacio S. Los subespacios afines de dimensión finita se les suele denominar **variedades lineales afines** o simplemente variedades lineales. Una variedad de dimensión $n-1$ de un espacio afín de dimensión n se dice que es un **hiperplano**.

Variedades lineales y sistemas de ecuaciones

Ya sabemos que los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos se corresponden con subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Vamos a ver que las variedades lineales de $\mathbb{R}^n$, visto como espacio afín, se corresponden con los sistemas de ecuaciones, no necesariamente homogéneos.

La primera observación es que si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y llamamos origen $O = \vec{0}$, entonces $S = O + S$, por tanto S es también una variedad lineal (que pasa por el origen).

Proposición 7.6. *El conjunto de soluciones de un sistema lineal $AX = C$ de m ecuaciones con n incógnitas, compatible es una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$.*

Por tanto, $\dim L$ es igual a $\dim S = n - \operatorname{rango} A$

Demostración. Sea S el subespacio vectorial formado por las soluciones del sistema homogéneo asociado $AX = 0$ y sea L el conjunto de soluciones del sistema (en general, no homogéneo) $AX = C$. Si $X, Y \in L$, entonces $\overrightarrow{XY} = Y - X$ es un elemento de S, que prueba que L es una variedad lineal. □

Ecuaciones de una variedad lineal real

Sea $L = P + S$ una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$ tal que el subespacio vectorial S está generado por una base de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ y sea O el origen, es decir $O = \vec{0}$. Entonces un punto $X \in L$ se puede expresar como

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k \qquad \text{(Ecuación vectorial de } L\text{)}}$$

Como es habitual, al ser los puntos de L elementos de $\mathbb{R}^n$, los expresamos como matrices columnas de números reales, así

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix}$$

por tanto tenemos las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \lambda_1 v_{11} + \lambda_2 v_{12} + \cdots + \lambda_k v_{1k} \\ x_2 &= p_2 + \lambda_1 v_{21} + \lambda_2 v_{22} + \cdots + \lambda_k v_{2k} \\ &\vdots \\ x_n &= p_n + \lambda_1 v_{n1} + \lambda_2 v_{n2} + \cdots + \lambda_k v_{nk} \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas de } L$$

Y, por último, de forma similar a como hemos ya vimos en la sección 4.2.1, en página 108, las anteriores ecuaciones paramétricas se pueden entender como las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, luego, por eliminación de parámetros, lo podemos expresar de la forma

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones cartesianas de } L$$

Ecuación de un hiperplano En el caso de la variedad lineal de $\mathbb{R}^n$ sea un *hiperplano*, es decir de dimensión $n-1$, es fácil ver que queda determinada por una única ecuación cartesiana

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

Ejemplo 7.7. Determina las tres ecuaciones (vectorial, paramétrica y cartesiana) del hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que contiene al plano de ecuaciones cartesianas

$$\Pi \equiv \left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_2 + x_4 &= -1 \end{aligned}\right.$$

y pasa por el punto $P(1,1,0,0)$

SOLUCIÓN: La dirección del hiperplano H viene determinada por dos vectores (independientes) del plano Π y un tercer vector desde algún punto del plano al punto P.

Resolviendo el sistema de ecuaciones que define Π, tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \lambda + \mu \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= \mu \\ x_4 &= -1 - 3\lambda \end{aligned}$$

de donde obtenemos (fácilmente) dos vectores independientes de la dirección de Π: $\{(1,1,0,-3),(1,0,1,0)\}$ y un punto $Q(2,0,0,-1) \in \Pi$.

7.1.3. Variedades en el plano y en el espacio real

Especial interés tienen las variedades lineales contenidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Recordemos algunos conceptos importantes.

Rectas en el plano

El vector de dirección determina el subespacio de dirección es $S = L(\vec{v})$.

Una recta en el plano es un hiperplano. Ésta viene determinada a partir de un punto $P(p_1, p_2)$ y un vector de dirección $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq \vec{0}$, por la llamada **ecuación vectorial**

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}$$

y la **ecuación paramétrica**

$$(x, y) = (p_1 + \lambda v_1, p_2 + \lambda v_2)$$

de donde se obtienen, a su vez, las llamada **ecuación general**

$$ax + by = c$$

y la **ecuación continua**

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

También se puede expresar la ecuación de una recta a partir de dos puntos $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ distintos que estén contenidos en la propia recta

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2}$$

Si el vector de dirección es $(0, 1)$ la recta es vertical o con "*pendiente infinita*" y tiene por ecuación $x = c$. En caso contrario, el vector de dirección es $\vec{v} = (v_1, v_2)$, con $v_1 \neq 0$, y se dice que la recta tiene **pendiente**

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

La recta, entonces, se puede representar por la llamada **ecuación punto-pendiente**:

$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

Paralelismo. La intersección de dos rectas del plano se traduce en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}\right\}$$

que puede ser únicamente

Incompatible: Rectas paralelas y distintas.

Compatible indeterminado: Rectas coincidentes.

Compatible determinado: Rectas secantes (un único punto en la intersección).

Rectas y planos en el espacio ($\mathbb{R}^3$)

Los planos son los hiperplanos en $\mathbb{R}^3$, por tanto tendrán una única ecuación cartesiana llamada **ecuación general**

$$ax + by + cz = d$$

A partir de un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y una base del espacio de dirección $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)\}$ podemos expresarlo por las ecuaciones vectoriales y parametricas. Teniendo en cuenta que si $X(x, y, z)$ es un punto del plano los vectores $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PX}\right\}$ serán linealmente dependientes y esto nos da una ecuación en forma de determinante

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

que nos permite dar una ecuación a partir de tres puntos P, Q, R no alineados

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Las rectas del espacio: en ecuaciones cartesianas son de la forma

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array}\right\}$$

A partir de dos puntos P, Q distintos podemos obtener las **ecuaciones continuas** de la recta que los contiene,

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{z - p_3}{q_3 - p_3}$$

7.2. El espacio afín euclídeo

Para calcular distancias y ángulos dentro de un espacio afín necesitamos incluir el principal elemento del espacio euclídeo: el producto escalar.

Definición 7.8. Llamaremos espacio afín euclídeo **E** a un espacio afín en el que el espacio vectorial asociado V es euclídeo.

En un espacio **E** podemos definir la **distancia entre puntos** $P, Q \in$ **E** como

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

El teorema 6.38, página 164, nos permite probar las propiedades de la distancia

Teorema 7.9. *En un espacio afín euclídeo* **E** *tenemos las siguientes propiedades de la distancia:*

1. $d(P,Q) = 0 \iff P = Q, \quad \forall P,Q \in \mathbf{E}$.
2. $d(P,Q) = d(Q,P), \quad \forall P,Q \in \mathbf{E}$.
3. $d(P,Q) + d(Q,R) \leq d(P,R), \quad \forall P,Q,R \in \mathbf{E}$.

Demostración. Ejercicio. □

Al igual que en los espacios vectoriales euclídeos teníamos las bases ortonormales, en un espacio afín distinguiremos unos sistemas de referencia

Definición 7.10. Diremos que $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ en un espacio **E** es un **sistema de referencia rectangular** si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base ortonormal del espacio vectorial asociado V.

Ejemplo 7.11. El sistema de referencia del ejercicio 7.5 es rectangular.

Si las coordenadas de los puntos $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ están dadas respecto a un sistema de referencia rectangular, la distancia toma la conocida expresión

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}}$$

7.2.1. Perpendicularidad

Se dice que dos variedades lineales $L_1 = P_1 + S_1$ y $L_2 = P_2 + S_2$ de un espacio afín euclídeo **E** son **perpendiculares** si se verifica: 1. $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ y 2. $S_1 \perp S_2$, es decir, son perpendiculares si se cortan y sus direcciones son ortogonales.

Siempre se pueden construir variedades lineales perpendiculares a una dada. Especial interés tiene las rectas perpendiculares a un hiperplano.

Teorema 7.12. *Dado un hiperplano L cuya ecuación cartesiana, respecto a un sistema de referencia rectangular, es*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

el vector $\vec{n}$ de coordenadas $n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ define rectas perpendiculares a L.

Demostración. Si $P(p_1, p_2, \ldots, p_n$ y $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n$ son puntos de L, se cumple

$$a_1(q_1 - p_1) + a_2(q_2 - p_2) + \cdots + a_n(q_n - p_n) = 0$$

y esto implica que $\langle \vec{n}, \overrightarrow{PQ} \rangle = 0$. □

Definición 7.13. El vector $\vec{n}$ del teorema 7.12 se dice que es un **vector normal al hiperplano**.

Ejemplo 7.14. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ las rectas son los hiperplanos. Dada, entonces, una recta de ecuación general

$$r \equiv ax + by = c$$

el vector $\vec{n} = (a, b)$ es un vector normal, luego las rectas perpendiculares tiene por ecuación

$$\frac{x - p_1}{a} = \frac{y - p_2}{b}$$

Ejercicio 7.15. *En $\mathbb{R}^3$, encuentra las ecuaciones de una recta que pasa por el punto $P(p_1, p_2, p_3)$ perpendicular al plano*

$$\pi \equiv ax + by + cz = d$$

7.2.2. Ángulo y distancia entre variedades lineales

Ángulo entre hiperplanos

Si L_1 y L_2 son dos hiperplanos de $\mathbf{E}$, podemos elegir dos vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ a cada uno ellos.

Definición 7.16. Llamaremos ángulo de L_1 y L_2 al menor de los ángulos que forman sus respectivos vectores normales. Por tanto

$$\cos(L_1, L_2) = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|}$$

Ejercicio 7.17. *Da una expresión analítica del ángulo de dos rectas en el plano y dos planos en el espacio.*

Otra situación en que interesa calcular el ángulo es en el espacio $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$.

Ángulo entre una recta y un plano en el espacio

Definición 7.18. El ángulo que forman una recta y un plano de $\mathbb{R}^3$ es el que forman el vector de dirección de la recta y su proyección ortogonal sobre el plano.

Sea r una recta con vector de dirección $\vec{v}$ y sea π un plano de vector normal $\vec{n}$, entonces

Proposición 7.19. *El ángulo formado por la recta r y el plano π es tal que cumple*

$$\operatorname{sen}(r, \pi) = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{n}\|}$$

Demostración. La dejamos como ejercicio. □

Distancia entre variedades lineales

Puesto que el concepto de distancia es puntual, dada dos variedades $L_1 = P_1 + S_1$ y $L_2 = P_2 + S_2$, se define la distancia entre ellas como el ínfimo de las distancia entre sus respectivos puntos,

Del mismo modo se puede definir la distancia entre dos subconjuntos de puntos cualesquiera.

$$d(L_1, L_2) = \text{ínf}\,\{d(X,Y) \mid X \in L_1,\ Y \in L_2\}$$

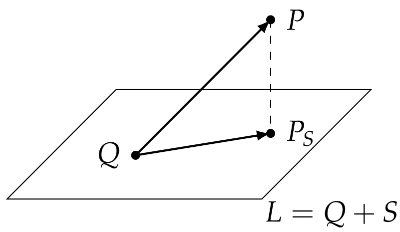
Evidentemente, si las variedades L_1 y L_2 tienen intersección no vacía, su distancia es cero.

Vamos a ver algunos casos particulares para encontrar esta distancia.

Distancia de un punto a una variedad lineal

Sea P un punto y $L = Q + S$ una variedad lineal, entonces la distancia de P a L será la distancia de P al punto (ortogonalmente) proyectado sobre la variedad L, que llamaremos P_S.

De forma natural $P_S = Q + Proy_S(\overrightarrow{QP})$.



Seguiremos la metodología descrita en la subsección 6.4.1 para calcular la distancia buscada. Suponemos que el espacio **E** está dotado de un sistema de refencia rectangular.

Si $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r\}$ es una base de S, representamos por A la matriz $n \times r$ formada por las coordenadas de los vectores expresados en columna. La proyección ortogonal (véase teorema 6.74) es $A(A^T A)^{-1} A^T$, luego

$$d(P, L) = d(P, P_S) = d\left(P, Q + \left(A(A^T A)^{-1} A^T\right) \overrightarrow{QP}\right) \tag{7.1}$$

que nos da un método general para calcular la distancia de P a L.

Ejemplo 7.20. Calcula la distancia al origen de coordenadas de la recta, en el espacio $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$, que tiene por ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Las ecuaciones paramétricas de

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

nos dan un vector de dirección, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ y un puntoo $Q(1, -4, 0)$. Por tanto, la proyección ortogonal del espacio en el subespacio de dirección

$S = L(\vec{v})$ tiene por matriz

$$Pr = A(A^A)^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí, el origen de coordenas O proyectado en r es

$$O_S = Q + Proy_S(\overrightarrow{QO}) = (1, -4, 0) + Pr \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, -3, -1)$$

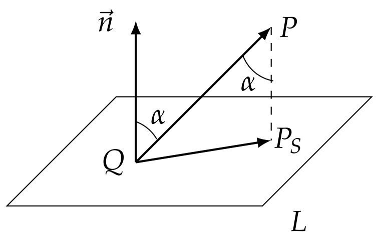
Por tanto, $\boxed{d(O,r) = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}}$

Distancia de un punto a un hiperplano

En el caso de que la variedad lineal L sea un hiperplano, la fórmula (7.1) toma una expresión más conveniente.

Supongamos que la ecuación del hiperplano L viene expresada de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + x_na_n + c = 0$$



respecto de un sistema de referencia rectangular (orientado positivamente), de aquí $\vec{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es el vector normal a L. Entonces sabemos que

$$\text{si } Q \in L, \quad \langle \overrightarrow{QP}, \vec{n} \rangle = \|\overrightarrow{QP}\| \, \|\vec{n}\| \, \cos\alpha$$

siendo α el ángulo entre ambos vectores, pero $\|\vec{Q}P\| \, \cos\alpha = d(P, P_S)$, luego

$$d(P, L) = d(P, P_S) = \frac{\langle \overrightarrow{QP}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|} = \frac{(p_1 - q_1)a_1 + \cdots + (p_n - q_n)a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}} =$$

$$= \frac{(a_1p_1 + \cdots + a_np_n) + (-a_1q_1 - \cdots - a_nq_n)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

simplificando la anterior expresión e incorporando un valor absoluto porque el vector $\vec{n}$ podría tener orientación contraria, tenemos

$$d(P, L) = \frac{|a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n + c|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}} \tag{7.2}$$

Distancia entre un punto a una recta en el espacio

La expresión (7.1) toma también una expresión más simple cuando la variedad L es una recta en un espacio tridimensional. Supongamos que la recta, en un sistema de referencia rectangular tiene como ecuaciones continuas:

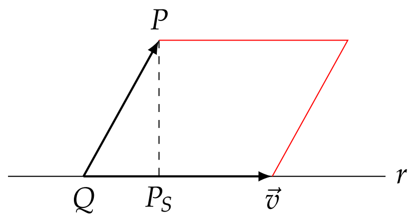
$$r \equiv \frac{x - q_1}{v_1} = \frac{y - q_2}{v_2} = \frac{z - q_3}{v_3}$$

entonces podemos enunciar el siguiente resultado

Proposición 7.21. *Sea $Q(q_1, q_2, q_3)$ un punto cualquiera de la recta r, entonces la distancia del punto P a r es*

$$d(P, r) = \frac{\left\|\overrightarrow{QP} \wedge \vec{v}\right\|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Demostración. La norma del vector producto vectorial, $\|\overrightarrow{QP} \wedge \vec{v}\|$ es el área del paralelogramo que define, del cual, $\|\overrightarrow{PP_S}\| = d(P, r)$ es su altura.



Por tanto, este área es $\|\overrightarrow{QP} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{v}\|\, d(P, r)$, de donde se obtiene la fórmula que queremos probar. □

Ejemplo 7.22. En el ejemplo 7.20 seguimos un método general para encontrar la distancia al origen de la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Para aplicar la fórmula de la proposición anterior calculamos las ecuaciones continuas de r

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 4}{-1} = \frac{z}{1}$$

de aquí

$$d(O,r) = \frac{\|(1,-4,0) \wedge (-1,-1,1)\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-5)^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}$$

Algunas situaciones particulares nos permiten encontrar una expresión para las distancia entre variedades lineales, como son las siguientes.

Distancia entre variedades lineales paralelas

Será la distancia desde un punto de una de ellas a la otra variedad. Es decir si $P \in L_1$ y L_1 es paralela a L_2, tenemos

$$d(L_1, L_2) = d(P, L_2)$$

Distancia ente dos rectas que se cruzan en $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$

Dos rectas en el espacio afín euclídeo tridensional que no son secantes (se cortan) ni paralelas, se dice que *se cruzan*. Sean dos de estas rectas r_1 y r_2, con sus respectivos vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, y sea $\vec{h}$ un vector que une dos puntos de cada una de las rectas de forma que la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{h}\}$ tenga orientación positiva.

Esto siempre se puede hacer porque las rectas no son coplanarias.

El paralelepípedo formado por estos tres vectores tiene por volumen $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{h})$. Si entendemos que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ determinan la base, y llamamos H a la altura del paralelepípedo, que es la distancia entre ambas rectas, tenemos

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{h}) = \text{Área de la base} \times H$$

y como el área de la base es $\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|$, entonces

$$\boxed{d(L_1, L_2) = \frac{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{h})}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}.}$$

Ejercicio 7.23. *Calcula la distancia entre el eje Z y la recta perpendicular al plano determinado por los puntos* $A(0,0,1), B(0,1,0), C(0,0,2)$ *que pasa por el punto* $(1,1,0)$.

7.2.3. Coordenadas polares

En el espacio afín euclídeo $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2$ además de los sistemas de referencia rectangulares $\mathcal{S} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a partir de una base ortonormal, es habitual el sistema de referencia polar o coordenadas polares.

Definición 7.24. Llamaremos **sistema de referencia polar** en el plano afín euclídeo a un punto origen O y un vector $\vec{v}$, a partir de los cuales, a cada punto P se le asigna dos valores (ρ, θ) siendo

- $\rho \in [0, \infty)$ la distancia $d(O, P)$ y
- θ el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\overrightarrow{OP}$ (expresado en radianes).

ρ es la *coordenada radial* y θ la *coordenada angular*.

A (ρ, θ) se le llama las **coordenadas polares** de del punto P.

Estas coordenadas no son únicas, por ejemplo el origen de coordenadas es $(0, \theta)$ siendo θ cualquier valor real. En general, un punto viene representado por una infinidad de ángulos $\theta \pm 2k\pi$, de los que, de forma canónica, elegimos $\theta \in (-\pi, \pi]$.

A veces es conveniente considerar $\theta \in [0, 2\pi)$.

Conversión de coordenadas

Los siguientes resultados dan la conversión de coordenadas polares a rectangulares y viceversa. Las demostraciones son fáciles y se dejan como ejercicio.

Proposición 7.25. *Un punto P del plano con coordenadas polares (ρ, θ) tiene por coordenadas rectangulares (o cartesianas) (x, y) siendo*

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

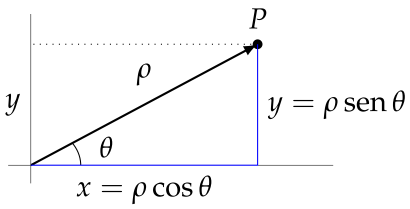
Proposición 7.26. *Un punto P de coordenadas (x, y) distinto del origen, en un sistema de referencia rectangular tiene por coordenadas polares (ρ, θ) siendo*

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \text{ (conforme a su cuadrante)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

Al origen de coordenadas se le representa, en coordenadas polares, como $\rho = 0$.

Ejercicio 7.27. *En la siguiente tabla, convierte los puntos expresados en coordenadas polares en coordenadas rectangulares y viceversa.*

	Puntos del plano			
Polares		$\rho = 2, \theta = \pi$		$\rho = 3, \theta = -\frac{\pi}{3}$
Rectang.	$(-3, 2)$		$(-2, -2)$	



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

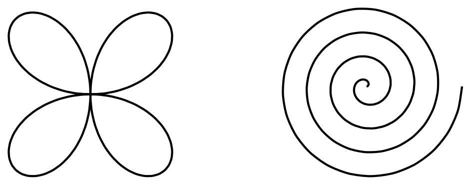
Figura 7.1: Coordenadas polares.

Ecuaciones polares

De igual forma que la ecuación $y = f(x)$ representa puntos del plano expresados en coordenadas rectangulares (o cartesianas), también una expresión de la forma $\rho = f(\theta)$ representa puntos en coordenada polar.

Ejemplo 7.28. La circunferencia de radio r toma como expresión en coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = r^2$. La misma circunferencia toma una expresión muy simple en coordenadas polares $\rho = r$.

Ejemplo 7.29. Ciertas curvas, sobre todo de tipo circular o elíptico, toman una expresión adecuada en coordenadas polares. Así en las gráficas se pueden observar dos ejemplos clásicos, la *rosa polar* (una de las muchas que se pueden construir) y la *espiral de Arquímedes*.



$\rho = \operatorname{sen}(2\theta)$ $\qquad$ $\rho = a\theta, \text{ con } \theta \in [0, \infty)$

Ejercicio 7.30. *Usa una calculadora o programa de cálculo para dibujar la curva que que tiene por ecuación en polares*

$$\rho = \frac{1}{1 + 0{,}5\cos\theta}, \textit{ con } \theta \in [0{,}2\pi)$$

y observa que es una elipse .

7.2.4. Coordenadas cilíndricas y esféricas

La extensión de las coordenadas polares al espacio afín euclídeo tridimensional se hace a través de las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas.

Supongamos un sistema de referencia rectangular orientado positivamente de origen O, cuyos vectores definen las direcciones: eje X, eje Y y eje Z.

Coordenadas cilíndricas

Definición 7.31. Un punto P del espacio euclídeo $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$ se representa en coordenadas cilíndricas por (ρ, φ, z), donde:

- $\rho \in [0, \infty)$ es la coordenada "radial", definida como la distancia del punto P al eje Z, o bien la norma del vertor que resulta de proyectar ortogonalmente el vector $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano XY.

- $\varphi \in (-\pi, \pi]$ es la coordenada "acimutal", definida como el ángulo que forma el eje X con la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano XY.

- $z \in (-\infty, \infty)$ es la coordenada "vertical" o "altura", definida como la distancia (con signo) desde el punto P al plano XY.

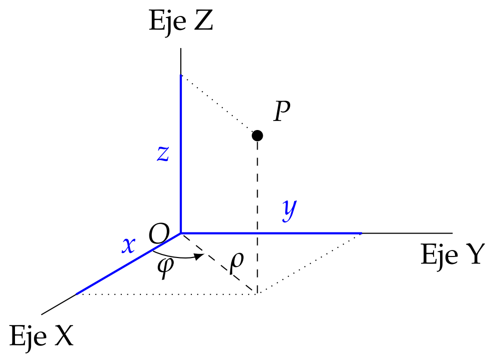


Figura 7.2: Coordenadas cilíndricas.

Proposición 7.32. *Si un punto P del espacio tiene por coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), entonces sus coordenadas rectangulaes son*

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos \varphi \\
y &= \rho \operatorname{sen} \varphi \\
z &= z
\end{aligned}
$$

Proposición 7.33. *Si un punto P del espacio tiene por coordenadas rectangulares*

(x, y, z)*, entonces sus coordenadas cilíndricas son*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \text{ (conforme al cuadrante de } (x, y, 0)) \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$
$$z = z$$

El eje Z*, en coordenadas cilíndricas, es* $\rho = 0$ *y el origen de coordenadas es* $\rho = 0$*,* $z = 0$*.*

Ejemplo 7.34. Si $r > 0$ la ecuación $\rho = r$ representa el cilindro (vertical) de radio r.

Coordenadas esféricas

Definición 7.35. Un punto P del espacio euclídeo $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$ se representa en coordenadas esféricas por (ρ, θ, φ), donde:

- $\rho \in [0, \infty)$ es la coordenada "radial", definida como la distancia del origen al punto P.
- $\theta \in [0, \pi]$ es la "inclinación" o "latitud", definida como el ángulo del eje Z con el vector $\overrightarrow{OP}$.
- $\varphi \in (-\pi, \pi]$ es la coordenada "acimutal", también llamada "longitud" definida como el ángulo que forma el eje X con la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano XY.

Proposición 7.36. *Si un punto* P *del espacio tiene por coordenadas cilíndricas* (ρ, φ, z)*, entonces sus coordenadas rectangulaes son*

$$x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$
$$z = \rho \cos \theta$$

Proposición 7.37. *Si un punto* P *del espacio tiene por coordenadas rectangulares*

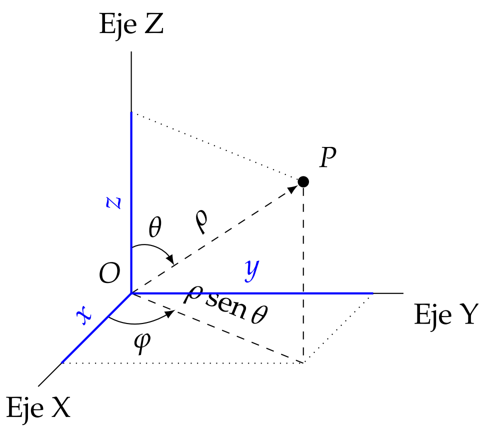


Figura 7.3: Coordenadas esféricas

(x, y, z), entonces sus coordenadas esféricas son

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \arccos \frac{z}{\rho} \quad \text{si } \rho \neq 0$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \text{ (conforme al cuadrante de } (x, y, 0)) \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

En coordenadas esféricas el origen de coordenadas es $\rho = 0$.

Ejemplo 7.38. Si $r > 0$ la ecuación esférica $\rho = r$ representa la esfera de radio r.

Ejercicio 7.39. *En la siguiente tabla, convierte los puntos del espacio de una representación a las otras.*

	Puntos del espacio		
Rectang.	$(-2, -2, 2)$		
Cilíndricas	$\begin{cases} r = \\ \varphi = \\ z = \end{cases}$	$\begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \pi/2 \\ z = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} r = \\ \varphi = \\ z = \end{cases}$
Esféricas	$\begin{cases} \rho = \\ \theta = \\ \varphi = \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \\ \theta = \\ \varphi = \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = 3 \\ \theta = \pi/4 \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases}$

Ejercicios Propuestos

Ej. 7.1 — Considera el punto $P(0,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ z=1 \end{cases}$.

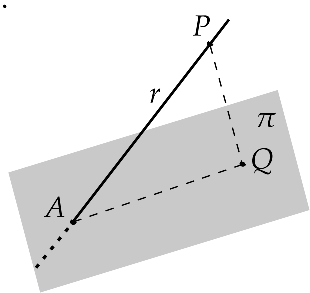
1. Calcula el punto Q de la recta r más próximo a P.
2. Halla los puntos R de la recta r tal que el triángulo PQR tenga área 2.

Ej. 7.2 — Encuentra las ecuaciones que definen una circunferencia centrada en el punto $(1,1,1)$ contenida en el plano $x+y-2z=0$ y es tangente a la recta de corte de dicho plano con el plano horizontal $z=0$.

Ej. 7.3 — Considera, los planos de un haz $(1-2\lambda)x+(1-\lambda)y-z-(2+\lambda)=0$.

1. Comprueba que existe una recta común a todos los planos dados y determina su ecuación.
2. Halla la ecuación de un plano que pase por el origen y sea perpendicular a todos los planos del haz.
3. Determina cuál de los planos del haz contiene a la recta $s \equiv x+1 = y-1 = \dfrac{z+2}{2}$.

Ej. 7.4 — Sean el plano $\pi \equiv x+y=2$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=y \\ x+z=1 \end{cases}$ y el punto $A \in \pi \cap r$. Dado cualquier punto P de la recta consideramos el punto Q del plano π más cercano a P. Expresa el área del triángulo APQ en función del valor de x.



Ej. 7.5 — Dos caras de un cubo se encuentran en los planos $3x-y+2z=5$, $3x-y+2z=7$. Calcular el volumen del cubo.

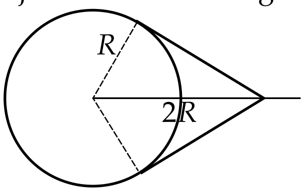
Ej. 7.6 — Determina las coordenadas polares de cada uno de los vértices de un pentágono regular de lado unidad centrado en el origen y uno de los vértices se apoya en el eje polar.

Ej. 7.7 — Consideramos el movimiento en el plano euclídeo definido como un giro de 30º (en sentido positivo) con centro el punto $C = (2, 1)$. Calcula la nueva ecuación de la recta $x + y - 1 = 0$ tras aplicarle el giro anterior.

Ej. 7.8 — Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuya distancia a $A(2, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(-1, 0)$.

Ej. 7.9 — Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia al punto $A(1, 0)$, es el triple de su distancia a la recta $x = 2$.

Ej. 7.10 — Una cadena se tensa sobre una polea circular de radio R de forma que queda enganchada a una distancia $2R$ del centro de la polea, conforme se aprecia en el dibujo. Calcúlese la longitud de la cadena.



Indicación: El radio de una circunferencia es perpendicular a la recta tangente.

Ej. 7.11 — Determina la ecuación polar de las curva de ecuación en coordenadas rectangulares $y^2(2a - x) = x^3$, $a > 0$.

Ej. 7.12 — Expresa en forma rectangular las siguientes ecuaciones que representan superficies en forma cilíndrica. Indica también qué tipo de superficie son.

a) $z = r^2$. b) $r = 2\cos\theta$. c) $r^2 + z^2 = 25$.

Ej. 7.13 — Encuentra el centro y el radio de la esfera que tiene por ecuación en coordenadas esféricas $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$.