Contents

7 **Geometría** 2
7.1 Espacio Afín 2
7.1.1 Sistemas de referencia 3
7.2 Espacio afín euclídeo 4
7.2.1 Coordenadas polares 5
7.2.2 Coordenadas cilíndricas y esféricas 6

7. Geometría

7.1. Espacio Afín

Un **espacio afin** es una cuaterna $(\mathbf{A}, V, \mathbb{K}, \overrightarrow{(\ )})$ donde:

- $\mathbf{A}$ es un conjunto cuyos elementos llamamos **puntos**,
- V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y
- $\overrightarrow{(\ )}$: $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to V$ es una función que satisface:
  - $*$ (Regla de Chasles) Para todo $P, Q, R \in \mathbf{A}$, se cumple $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
  - $*$ Para todo $P \in \mathbf{A}$ y $\vec{v}$, existe un único $Q \in \mathbf{A}$ tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.
    A este punto lo denotamos por $P + \vec{v}$.

Propiedades: Para todo $P, Q, R, S \in \mathbf{A}$,

1. $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.
2. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ implica $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.

7.1.1. Sistemas de referencia

Llamamos **sistema de referencia** a un conjunto

$$R = \{O; \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$$

donde $O \in \mathbf{A}$ y $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es una base de V.
Todo punto de $P \in \mathbf{A}$ tiene unas coordenadas respecto al sistema de referencia R

$$P = (p_1, \ldots, p_n)_R \text{ si y sólo si } \overrightarrow{OP} = p_1\vec{v_1} + \cdots + p_n\vec{v_n}$$

Cambio de coordenadas a otro sistema $R' = \{O'; \vec{v_1}', \ldots, \vec{v_n}'\}$: Si

- A es la matriz de cambio de base de $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ a $\{\vec{v_1}', \ldots, \vec{v_n}'\}$ y
- $O' = (o'_1, \ldots, o'_n)_R$ entonces

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = (p_1 - o'_1, \ldots, p_n - o'_n)_R$$

y, si

$$A \begin{pmatrix} p_1 - o'_1 \\ \vdots \\ p_n - o'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$$

entonces $P = (p'_1, \ldots, p'_n)_{R'}$

7.2. Espacio afín euclídeo

Si el espacio vectorial es euclídeo (tiene un producto escalar) decimos que se trata de un espacio afín euclídeo y podemos definir la **distancia entre dos puntos** como

$$d(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{< \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} >}$$

Propiedades: Para todo $P, Q, R \in \mathbf{A}$,

1. $d(P,Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.
2. $d(P,Q) = d(Q,P)$.
3. $d(P,Q) + d(Q,R) \leq d(P,R)$.

Un sistema de referencia $R = \{O; \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ se dice **rectangular** si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base ortonormal en V.

En este caso, si $P = (p_1, \ldots, p_n)_R$ y $Q = (q_1, \ldots, d_n)_R$ entonces

$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}$$

7.2.1. Coordenadas polares

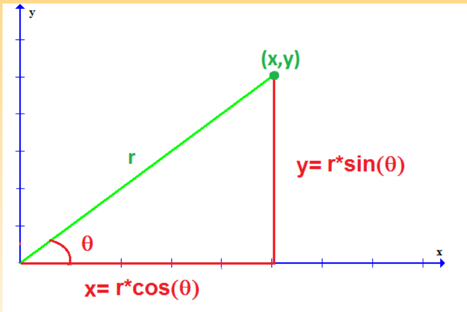
En el plano afín euclídeo, llamamos **sistema de referencia polar** a un par $\{O, \vec{v}\}$ donde

- O es un punto llamado origen y
- $\vec{v}$ es un vector de referencia.

Cada punto P vendrá representado respecto de este sistema de referencia mediante un par de números (r, θ) que recibe el nombre de **coordenadas polares** siendo

- $r \in [0, \infty)$ es la distancia de O a P, es decir, $r = d(O, P)$, y
- θ el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{OP}$ (en radianes)

Normalmente se considera $\theta \in [0, 2\pi)$ o $\theta \in [-\pi, \pi)$.

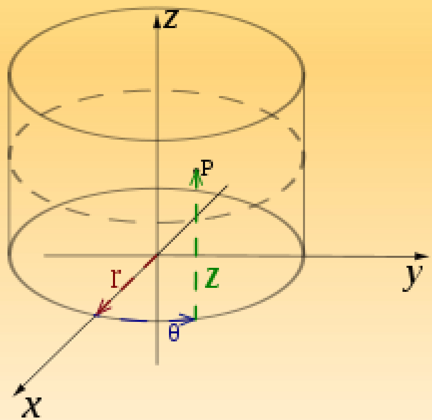


7.2.2. Coordenadas cilíndricas y esféricas

En el espacio afín euclídeo tridimensional, consideremos un sist. de referencias rectang.

Cada punto P puede ser representado respecto de este sistema por una terna de números (r, θ, z) que recibe el nombre de **coordenadas cilíndricas** siendo

- $r \in [0, \infty)$ es la distancia de P al eje Z,
- θ el ángulo entre el eje X y la proyec. ortogonal de $\vec{OP}$ sobre el plano XY.
- z la distancia (con signo) de P al plano XY.



Cada punto P puede ser representado respecto de este sistema por una terna de números (r, θ, φ) que recibe el nombre de **coordenadas esféricas** siendo

- $r \in [0, \infty)$ es la distancia de P al origen O,
- θ el ángulo entre el eje Z y el vector $\vec{OP}$. (Latitud)
- φ el ángulo entre el eje X y la proyec. ortogonal de $\vec{OP}$ sobre el plano XY. (Longitud)