Álgebra Lineal y Matemática Discreta.

E.T.S. Ingenería de Telecomunicación.

Prueba de repaso de Geometría

---

1. Vectores en el espacio

Ejercicio 1 — Determina si los vectores $(3,3,2)$, $(1,1,-1)$ y $(2,2,3)$, dados por sus coordenadas en una base B de V^3, son linealmente independientes.

Solución (Ejercicio 1) — Basta comprobar si la matriz cuyas columnas son las coordenadas de dichos vectores tiene rango 3 (las tres columnas serán linealmente independientes)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pero es obvio que $rg(A) < 3$ porque la dos primeras filas coinciden. Por tanto, los vectores del enunciado son linealmente dependientes.

Ejercicio 2 — Estudia si el vector $\vec{x} = (-12,-1,-5)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (5,0,1)$ y $\vec{w} = (1,1,-2)$.

Solución (Ejercicio 2) — Tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a(1,-1,0) + b(5,0,1) + c(1,1,-2) = (-12,-1,-5) \qquad \text{es decir} \qquad \begin{aligned} a+5b+c &= -12 \\ -a+c &= -1 \\ b-2c &= -5 \end{aligned}$$

cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -12 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Observa que las columnas de esta matriz ampliada coinciden con los vectores que intervienen en el problema. Resolvemos el sistema de ecuaciones por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -12 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \overset{F_2=F_2+F_1}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -12 \\ 0 & 5 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \overset{F_2\leftrightarrow F_3}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & -13 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_3\leftrightarrow F_3-5F_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{array}\right) \overset{F_3\leftrightarrow \frac{1}{12}F_3}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La solución es $c=1$, $b=-3$ y $a=2$, es decir, $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$. Lo comprobamos:

$$2(1,-1,0) - 3(5,0,1) + 1(1,1,-2) = (-12,-1,-5)$$

Ejercicio 3 — Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen por coordenadas respecto de una base ortonormal respectivamente $\vec{u} = (2,-1,0)$ y $\vec{v} = (1,-1,2)$. Calcula:

1. Su producto escalar.
2. El valor de m para que el vector $\vec{w} = (m,1,3)$ sea ortogonal a $\vec{v}$.

Ejercicio 4 — Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen por coordenadas respecto de una base ortonormal respectivamente $\vec{u} = (1,3,0)$ y $\vec{v} = (4,-1,3)$. Calcula:

1. Su producto escalar.
2. El módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
3. El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
4. El producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
5. El área del triángulo que tiene por lado los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2. Geometría

Ejercicio 5 — PAU - Junio de 2013. Sea r la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector director $(a, 2a, 1)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$$

1. Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.
2. Calcula, para $a = 1$, la distancia entre r y s.

Solución (Ejercicio 5) —

1. Se puede resolver de muchas maneras. Una de ellas sería buscar un vector director de s y comprobar que tiene la misma dirección que el vector $(a, 2a, 1)$. Para calcular el vector director de s se pueden obtener dos puntos, P y Q, por los que pase s y restándolos obtenemos un vector director $\overrightarrow{PQ}$ de s.

   Pero se puede resolver de una manera más sencilla. La recta s viene dada por la intersección de dos planos: $\pi_1\colon -2x + y = -2$ y $\pi_2\colon -ax + z = 0$. Los vectores normales a dichos planos son $(-2, 1, 0)$ y $(-a, 0, 1)$ respectivamente. Cualquier vector director de la recta s debe ser perpendicular a ambos. Y, si r es paralelo a s, sus vectores directores también deben cumplir dicha condición.

   Para comprobar la perpendicularidad hacemos uso del producto escalar:

   $$\left.\begin{array}{r} (-2,1,0)\cdot(a,2a,1) = 0 \\ (-a,0,1)\cdot(a,2a,1) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{es decir} \qquad \left.\begin{array}{r} -2a + 2a + 0 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

   Luego las rectas r y s son paralelas si $a^2 = 1$. La solución por tanto es que $a \in \{-1, 1\}$.

2. En el segundo apartado, como $a = 1$, las dos rectas son paralelas con vector director $(1, 2, 1)$. Para calcular la distancia entre ambas rectas, tenemos que buscar la distancia mínima entre puntos de r y s. Los puntos de r y s más cercanos entre sí son aquellos que cumplan que la recta que los une es perpendicular a r y s. Para encontrarlos, buscamos un plano que sea perpendicular a ambas rectas y lo intersecamos con ellas. Los planos de la forma

   $$\pi\colon x + 2y + z = c$$

   para cualquier $c \in \mathbb{R}$ son perpendiculares a ambas. En particular, si consideramos el plano que contiene al punto $P(1, 0, 0)$ que pertenece a r tenemos que $c = 1$ (la solución de la ecuación $1 + 2\cdot 0 + 0 = c$). Calculamos ahora donde interseca el plano π con la recta s:

   $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y = -2 \\ -x + z = 0 \end{array}\right\}$$

   Resolvemos el sistema de ecuaciones utilizando e método de gauss

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\equiv}{\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\equiv}{F_2 = \tfrac{1}{5}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

   $$\underset{\equiv}{F_3 = F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\equiv}{F_3 = \tfrac{5}{6}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} \end{array}\right)$$

   El sistema de ecuaciones anterior tiene las mismas soluciones que el siguiente

   $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ y + \frac{2}{5}z = 0 \\ z = \frac{5}{6} \end{array}\right\}$$

   Despejando de abajo hacia arriba encontramos que el punto intersección de π y s es $Q(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$.

   Los puntos más cercanos de r y s respectivamente son P y Q y su distancia es

   $$||\overrightarrow{PQ}|| = \left|\left|\left(\frac{5}{6} - 1, -\frac{1}{3} - 0, \frac{5}{6} - 0\right)\right|\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{(-1)^2 + (-2)^2 + (5)^2}{6^2}} = \frac{\sqrt{30}}{6} u.l.$$

Ejercicio 6 — PAU - Junio de 2013. Considera los puntos $P(2, 3, 1)$ y $Q(0, 1, 1)$.

1. Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.
2. Calcula la distancia de P a π.

Solución (Ejercicio 6) —

1. El plano π debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ} = (0-2, 1-3, 1-1) = (-2, -2, 0)$. Este es, por tanto, un vector normal al plano. La ecuación del plano π es de la forma $-2x - 2y = c$ donde $c \in \mathbb{R}$. Falta asegurarnos de que pase por el punto medio entre P y Q que es

   $$M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (1, 2, 1)$$

   $- 2 \cdot 2 = -6$ y la ecuación del plano es $\pi\colon -2x - 2y = -6$ o, equivalentemente $\pi\colon x + y =$

2. En este caso, la distancia de P a π coincide con la distancia de P a M (M pertence a π y el vector $\overrightarrow{MP}$ es normal al plano π)

$$d(P,\pi) = d(P,M) = ||\overrightarrow{PM}|| = ||\overrightarrow{MP}|| = \left|\left|(2-1, 3-2, 1-1)\right|\right| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}\ u.l.$$

Ejercicio 7 — PAU - Junio de 2012. Sean las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{r} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{array} \right. , \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

1. Determina el punto de intersección de ambas rectas.
2. Calcula la ecuación general del plano que las contiene.