Ejercicios del Tema 2: Señales Aleatorias

Parte B: Señales Aleatorias

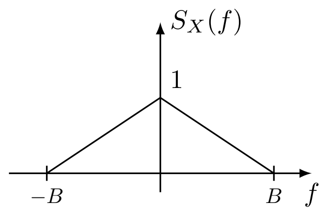
Ejercicio 1 [$\star$]

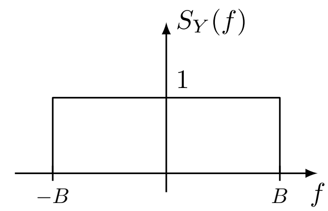
Estudia el carácter estacionario y ergódico de los siguientes procesos aleatorios:

a) $X(t) = X$, siendo X una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo [-1,1]
b) $Y(t) = tX(t)$, siendo $X(t)$ un proceso estacionario con media nula. Calcula, además, su media y autocorrelación.

Ejercicio 2 [$\star$]

En la figura se representan las densidades espectrales de potencia de dos señales aleatorias independientes y de medias nulas $X(t)$ e $Y(t)$. Determina la *dep* de $Z(t)$ y su potencia si $Z(t) = X(t) + Y(t)$.





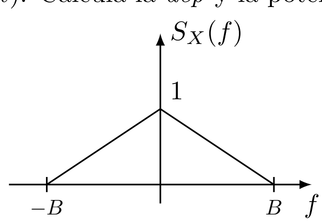
¿Si $\overline{X(t)}$ fuera igual a 2 y $\overline{Y(t)}$ igual a 1 cúal seria la potencia de $Z(t)$?

Ejercicio 3 [$\star$]

Considera la señal aleatoria $Z(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ correspondiente a una modulación de amplitud, donde $X(t)$ es la señal de información, aleatoria y estacionaria, f_0 es la frecuencia de la portadora. Demuestra si es o no estacionaria la señal $Z(t)$ y en caso de serlo calcula su *dep* para los dos casos siguientes:
a) ϕ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$ e independiente de $X(t)$.
b) ϕ es un valor constante.

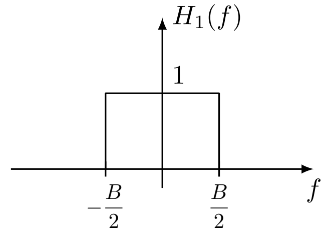
Ejercicio 4 [$\star$]

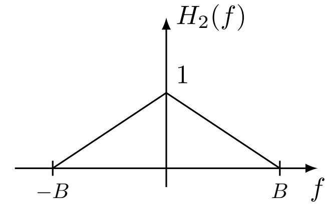
La señal aleatoria $X(t)$ de media nula y *dep* $S_X(f)$ de la figura pasa por un filtro y da lugar a la señal $Y(t)$. Calcula la *dep* y la potencia de $Y(t)$ para los siguientes casos:



a) La respuesta en frecuencia del filtro es $H_1(f)$.

b) La respuesta en frecuencia del filtro es $H_2(f)$.





Ejercicio 5 [$\star$]

Una señal aleatoria $X(t)$ toma valores uniformemente distribuidos e independientes en el intervalo $[-2 \quad 2]$. Se quiere convertir a digital mediante un cuantificador de 8 bits. Asumiendo que el cuantificador está perfectamente adaptado al margen dinámico de la señal de entrada, calcula la relación señal a error de cuantificación.

Ejercicio 6 [$\star$]

La señal aleatoria $X[n]$ está formada por variables aleatorias incorreladas, de media nula y varianza σ^2. La señal $Y[n]$ es la salida de un sistema lineal con entrada $X[n]$. La respuesta impulsiva de dicho sistema es $h[n] = a\delta[n] + b\delta[n-1]$. Calcula la autocorrelación de $Y[n]$.

Ejercicio 7 [$\star\star$]

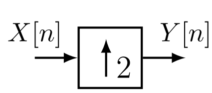
Calcula la autocorrelación de la señal aleatoria discreta $X[n]$ cuyos valores se obtienen a partir de una secuencia de dígitos binarios equiprobables e independientes según la regla siguiente:

- Un 1 tras un 0 da lugar a una muestra de amplitud A.
- Un 0 tras un 1 da lugar a una muestra de amplitud -A.
- Un dígito repetido da lugar a una muestra de amplitud 0.

Se recomienda representar un tramo de una realización cualquiera para visualizar el aspecto de la señal propuesta. Por otro lado, teniendo en cuenta que la autocorrelación viene dada por $R_X[n] = E[X[k]X[k+n]]$, se aconseja calcularla para cada valor n por separado hasta encontrar una ley general que permita extender los resultados para los restantes valores.

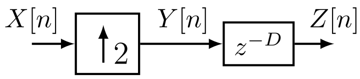
Ejercicio 8 [$\star\star$]

La señal aleatoria estacionaria $X[n]$ con media $\overline{X}$ y autocorrelación $R_X[n]$ es expandida por un factor 2 (intercalado de un cero entre cada dos muestras) como se indica en la figura, resultando la señal $Y[n]$.



a) Demuestra que $Y[n]$ no es estacionaria.

b) Considera a continuación el sistema formado por un expansor de factor 2 seguido de un retardo discreto aleatorio, como se muestra en la figura, siendo D una variable aleatoria que puede tomar los valores 0 y 1 de forma equiprobable. Demuestra que la señal resultante $Z[n]$ es estacionaria, determina su media y su función de autocorrelación.


$X[n]$
$\uparrow 2$
$Y[n]$
z^{-D}
$Z[n]$

Tema 2: Señales Aleatorias

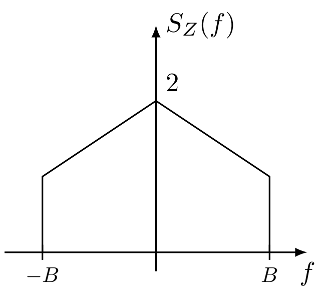
Parte B: Señales Aleatorias

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1

a) Estacionario no ergódico
b) No es estacionario. $\overline{Y} = 0$; $R_Y(t_1, t_2) = t_1 t_2 R_X(t_2 - t_1)$

Ejercicio 2



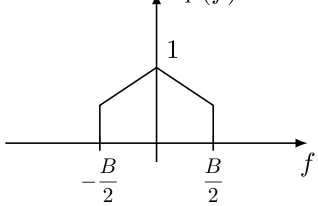
$P_Z = 3B$ Si $\overline{X(t)} = 2$ y $\overline{Y(t)} = 1$ entonces $P_Z = 3B + 4$

Ejercicio 3

a) $Z(t)$ es una señal aleatoria estacionaria con $S_Z(f) = \frac{1}{4} S_X(f - f_0) + \frac{1}{4} S_X(f + f_0)$.
b) $Z(t)$ no es una señal aleatoria estacionaria.
$\overline{Z(t)} = \overline{X(t)} \cos(2\pi f_0 t + \phi)$
$R_Z(t, t+\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \left[\cos(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\phi) + \cos(2\pi f_0 \tau)\right]$

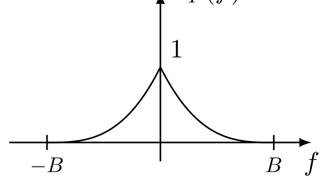
Ejercicio 4

a)



$$P_Y = \frac{3B}{4}$$

b)



$$P_Y = \frac{B}{2}$$

Ejercicio 5

48 dB

Ejercicio 6

$R_Y[n] = (a^2 + b^2)\sigma^2\delta[n] + ab\sigma^2\ \delta[n-1] + ab\sigma^2\ \delta[n+1]$

Ejercicio 7

$R_X[n] = \dfrac{A^2}{2}\delta[n] - \dfrac{A^2}{4}\delta[n-1] - \dfrac{A^2}{4}\delta[n+1]$

Ejercicio 8

$$\overline{Z[n]} = \frac{\overline{X[n]}}{2}$$

$$R_Z[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}R_X[n] & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$