Ejercicios del Tema 2: Señales Aleatorias

Parte A: Probabilidad y Variables Aleatorias

Ejercicio 1 [$\star$]

Sea el experimento aleatorio de tomar una carta de una baraja francesa (de 52 cartas), y los siguientes sucesos:

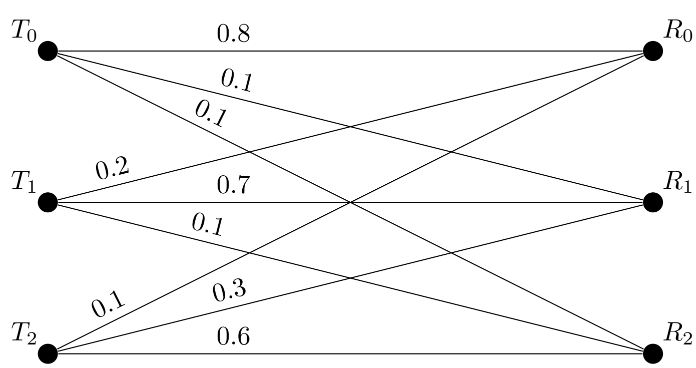
$$A=\{\text{ases}\};\ B=\{\text{picas}\};\ C=\{\text{negras}\};\ D=\{\text{diamantes o corazones}\}$$

a) Halla $P(A), P(B), P(C), P(D), P(B+C), P(\overline{A})$
b) ¿Son C y D mutuamente excluyentes? ¿y exhaustivos? ¿e independientes?
c) ¿Son B y D mutuamente excluyentes? ¿y exhaustivos? ¿e independientes?
d) ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿y exhaustivos? ¿e independientes?
e) Imagine que se toman 4 cartas sin reemplazo, calcule la probabilidad de obtener 4 reyes.
f) Al tomar 2 cartas sin reemplazo calcula la probabilidad de que la segunda sea una reina si la primera ya lo es, y la de que la segunda sea una reina si la primera fue un as.

Nota:
Dos sucesos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir de manera simultanea.
Dos o más sucesos son exhaustivos si su unión es todo el espacio muestral

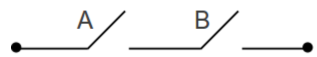
Ejercicio 2 [$\star$]

El grafo de la figura representa las probabilidades de transición de un canal ternario que transmite los símbolos $\{0, 1, 2\}$. En cada transición se representa la probabilidad $P(R_i/T_i) \quad i = 0, 1, 2$. Asumiendo que los 3 símbolos transmitidos son equiprobables calcula:
a) P($Error$)
b) P(T_0/R_0), P(T_1/R_0), P(T_2/R_0)
c) P($T_0/Error$), P($T_1/Error$), P($T_2/Error$)



Ejercicio 3 [$\star$]

Los conmutadores del diagrama de la figura funcionan independientemente. La probabilidad de que A esté cerrado es de 0.7, mientras que la de que B lo esté es de 0.2. Si una señal conectada a la entrada no llega a la salida, halla la probabilidad de que el conmutador B estuviera abierto.



Ejercicio 4 [$\star$]

Sea X una variable aleatoria gaussiana cuya *fdp* es $f_X(x) = ke^{-(x-2)^2}$. Determina:

a) El valor de la media $\overline{X}$, de la varianza, σ_X^2 y de la constante k.
b) La $P(X \geq 3)$, empleando la función $Q(\cdot)$.
c) La $P(1 \leq X < 3)$, empleando la función $Q(\cdot)$.

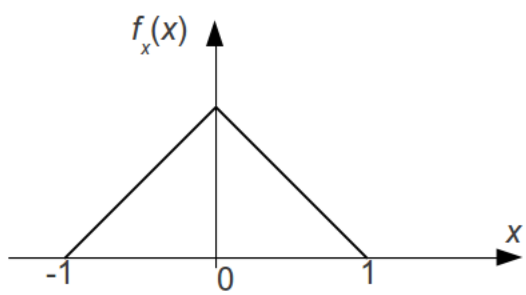
Ejercicio 5 [$\star$]

La variable aleatoria X tiene una *fdp* que viene dada por la siguiente expresión: $f_X(x) = ke^{-x}u(x)$. Determina:

a) La constante k.
b) La función distribución de probabilidad $F_X(x)$.
c) La $P(X > 3)$.

Ejercicio 6 [$\star$]

Calcula la media y la varianza de la variable aleatoria X, definida por la función de densidad de probabilidad triangular siguiente:



Ejercicio 7 [$\star$]

En relación con la linealidad de operaciones con variables aleatorias. Sean X e Y variables aleatorias independientes y se define una transformación $Z = aX + b$, donde a y b son dos constantes. Sea $E[X]$ la media de X y $var[X]$ su varianza,

a) Demuestra que $E[Z] = aE[X] + b$
b) Demuestra que $var[Z] = a^2 var[X]$
c) Demuestra que $E[(3X + Y)^2] = 9\overline{X^2} + \overline{Y^2} + 6\overline{XY}$

Ejercicio 8 [$\star$]

La variable aleatoria Y está relacionada con la variable aleatoria X a través de una transformación lineal $Y = aX + b$, donde a y b son constantes, siendo $a \neq 0$.

a) Determina $f_Y(y)$ suponiendo conocida $f_X(x)$.

b) Particulariza para el caso de X uniforme en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Ejercicio 9 [$\star$]

Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[x_1, x_2]$. Calcula la media $\overline{X}$, la varianza σ_X^2 y el valor cuadrático medio $\overline{X^2}$. Se recomienda obtener σ_X^2 y $\overline{X^2}$ a partir de σ_Y^2 de la variable Y definida como $Y = X - \overline{X}$.

Ejercicio 10 [$\star$]

Sea un sistema amplificador que viene dado por la siguiente relación entrada-salida, al que se le aplica una señal aleatoria X,

$$Y = \begin{cases} -10 & \text{si } X \leq -1 \\ 2X & \text{si } -1 \leq X \leq 1 \\ 10 & \text{si } 1 \leq X. \end{cases}$$

Dibuje las funciones densidad de probabilidad a la entrada y a la salida para los siguientes casos

a) Si $X \sim U(-2, 2)$

b) Si $X \sim U(-0.5, 0.5)$

c) Si $X \sim \{U(-2, -3) \cup U(2, 3)\}$

Nota:

$X \sim U(a, b)$ significa que la variable X tiene una distribución uniforme en el intervalo [a,b]

Ejercicio 11 [$\star$]

Determina la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria X_E correspondiente a la parte entera de X y de la variable aleatoria X_F correspondiente a la parte fraccionaria de X. La variable X es uniforme en el intervalo $[0, 3]$.

Ejercicio 12 [$\star$]

Considera las variables aleatorias X e Y donde $Y = X^2$. Demuestra que si X es uniforme en el intervalo [-A A], entonces X e Y son ortogonales.

Ejercicio 13 [$\star\star$]

Las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes entre sí y uniformes en el intervalo $[0, 1]$. Determina la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Y = \max\{X_1, X_2\}$, es decir, por cada pareja de valores de X_1 y X_2, la variable Y toma el valor del mayor de ambos.

Ejercicio 14 [⋆⋆]

Supongamos que se transmite un símbolo $S \in \{0, 1\}$ a través de una canal de comunicaciones. Dicho canal introduce un ruido aditivo y gaussiano, de modo que al receptor le llega $R = S + N$. El ruido N se modela como una variable gaussiana de media 0 y varianza 1 e independiente del simbolo S. El receptor ante el valor recibido R decide que el símbolo recibido D es 0 si $R < 0.5$ y 1 si $R > 0.5$. Asuma que los símbolos transmitidos son equiprobables. En esas condiciones calcula:

a) Probalidad de error (probabilidad de que el símbolo decidido D sea erróneo)

b) $P(S = 1/D = 1)$ y $P(S = 0/D = 1)$

Ejercicio 15 [⋆⋆]

Se desea medir un parámetro constante usando un cuantificador de escasa precisión. En estos casos, aunque parezca paradójico, una forma de aumentar la precisión consiste en sumar ruido al parámetro a medir (técnica conocida como *Dithering*).

En la figura se representa dicho método de medida. Al parámetro constante C que se desea medir se le suma una variable aleatoria N, uniforme en el intervalo $[-A/2, A/2]$. Esta suma pasa por el cuantificador cuya relación entrada-salida es la de la figura, obteniéndose la variable aleatoria Y. Sabiendo que el valor de C pertenece al rango $[-A/2, A/2]$ y que $A > 0$, calcula la esperanza de Y en función del valor de C para los dos casos siguientes:

a) No se suma la variable aleatoria N.

b) Sí se suma la variable aleatoria N.

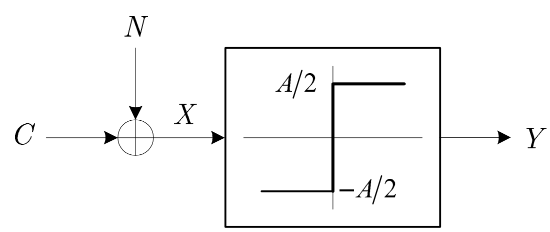


Figura 1

Tabla de la función Q

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
Q(x)	.5	.46	.421	.382	.345	.309	.274	.242	.212	.184

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
Q(x)	.159	.136	.115	.097	.081	.067	.055	.045	.036	.029

Tema 2: Señales Aleatorias

Parte A: Probabilidad y Variables Aleatorias

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1

a) 1/13; 1/4; 1/2; 1/2; 1/2; 12/13
b) sí, sí, no
c) sí, no, no
d) no, no, sí
e) $3.69 \cdot 10^{-6}$
f) 3/51, 4/51

Ejercicio 2

a) $\mathrm{P}(Error) = 0.3$
b) $\mathrm{P}(T_0/R_0) = 8/11$, $\mathrm{P}(T_1/R_0) = 2/11$, $\mathrm{P}(T_2/R_0) = 1/11$
c) $\mathrm{P}(T_0/Error) = 2/9$, $\mathrm{P}(T_1/Error) = 1/3$, $\mathrm{P}(T_2/Error) = 4/9$

Ejercicio 3

0.93

Ejercicio 4

a) $\overline{X} = 2, \quad \sigma_X^2 = 1/2, \quad k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$
b) $\mathrm{P}(X \geq 3) = Q(\sqrt{2}) \approx 0.08$
c) $\mathrm{P}(1 \leq X < 3) = 1 - 2Q(\sqrt{2}) \approx 0.84$

Ejercicio 5

a) $k = 1$
b) $F_X(x) = (1 - e^{-x}) \cdot u(x)$
c) $\mathrm{P}(X > 3) \approx 0.05$

Ejercicio 6

$E[X] = 0$ y $var[X] = 1/6$

Ejercicio 7

Ejercicio 8

a)$f_Y(y) = \dfrac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$

b) $f_Y(y) = \dfrac{1}{|a| \cdot (x_2 - x_1)}, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \qquad \text{con} \qquad y_1 = ax_1 + b,\, y_2 = ax_2 + b.$

Ejercicio 9

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \qquad \overline{X^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2}{3}$$

Ejercicio 10

a) Y es una variable mixta con $f_Y(y) = \frac{1}{4}\delta(y+10) + \frac{1}{4}\delta(y-10) + \frac{1}{8}\{u(y+2) - u(y-2)\}$
b) Y es una variable continua con $f_Y(y) = \frac{1}{2}\{u(y+1) - u(y-1)\}$
c) Y es una variable discreta con $f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y+10) + \frac{1}{2}\delta(y-10)$
Nota: u(t) es la función escalón unitario

Ejercicio 11

a) $f_{X_E}(x_E) = \frac{1}{3}\delta(x_E) + \frac{1}{3}\delta(x_E - 1) + \frac{1}{3}\delta(x_E - 2)$
b) $f_{X_F}(x_F) = 1, \quad 0 \leq x_F \leq 1$

Ejercicio 12

Ejercicio 13

$f_Y(y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1$

Ejercicio 14

a) $Q(0.5) \approx 0.309$
b) $P(S = 1/D = 1) = 1 - Q(0.5) \approx 0.691$ y $P(S = 0/D = 1) = Q(0.5) \approx 0.309$

Ejercicio 15

a)$E[Y] = \begin{cases} A/2 & \text{si} \quad C \geq 0 \\ -A/2 & \text{si} \quad C < 0 \end{cases}$

b) $E[Y] = C$ Por tanto, en teoría la precisión seria infinita.