Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Relación de ejercicios
1. Ampliación de Matemáticas

1. Escribir en forma binómica, polar, trigonométrica y exponencial los números complejos,
$$z = \mathbf{i}, \;\; w = 1 + \mathbf{i}, \;\; u = 2_{\pi/3}, \;\; t = 3e^{\pi \mathbf{i}}$$
2. Calcular la forma polar de $\frac{-2+2\sqrt{3}\mathbf{i}}{\sqrt{3}+\mathbf{i}}$.
3. Obtener las expresiones de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$.
4. Probar que todas las raíces de $z^7 + z + 4$ están fuera del disco unidad.
5. Obtener expresiones para $\cos(3\theta)$ y $\operatorname{sen}(3\theta)$.
6. Calcula las raíces quintas de $z = \cos(\pi/3) + \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi/3) = e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$.
7. Obtener las raíces sextas de la unidad.
8. Resolver la ecuación $z^2 + \sqrt{32}\mathbf{i}z - 6\mathbf{i} = 0$.
9. Calcula, si existen, los siguientes límites,
   $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)}{z}$.
   $\lim_{z\to 0} \frac{z\mathrm{Re}(z)}{|z|}$.
10. Representar gráficamente el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$. Representar el conjunto $f(A)$ siendo $f(z) = (1+\mathbf{i})z$.
11. Sea la transformación de Möbius
$$T(z) = \frac{z+2}{z-2}.$$
   Descomponer T como composición de giros, dilataciones, traslaciones y la inversión.
   Obtener la imagen por T de,
$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$$

12. Obtener la imagen por la función exponencial de $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 2\}$ y $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = \pi/4\}$.

13. Demuestra que $\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.

14. Calcula $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\right)$ y determina los números complejos que cumplen $\cos z = 2$.

15. Probar que $f(z) = e^z$ es entera y obtener $f'(z)$.

16. Estudiar la derivabilidad de $f(z) = \bar{z}\mathrm{Re}(z)$.

17. Calcula el valor de las siguientes integrales.

    Para γ el contorno del cuadrado de vértices $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ *recorrido en sentido habitual*, $\int_\gamma |z|^2 dz$.

    Para γ la circunferencia unidad, $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$.

    Para γ la circunferencia unidad, $\int_\gamma z^2 dz$.

18. Probar que $|\int_C (e^z - |z|) dz| \leq 60$, donde C es el triángulo de vértices $0, 3\mathbf{i}, -4$.

19. Probar que $f(z) = |z|^2$ es continua pero carece de primitiva.

20. Calcula
$$\int_\gamma \frac{\tan z}{(z - \pi/4)^2} dz,$$
    donde γ es la circunferencia unidad centrada en el origen.

21. $\int_{|z|=1} \frac{1-\sin(z)}{z^2} dz$

22. $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{z^2-1} dz$

23. $\int_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)(z-4)} dz$

24. $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$

25. $\int_{|z|=1} \frac{\sin^6(z)}{(z-\pi/6)^3} dz$

26. $\int_{|z-1|=1/2} \frac{\sin(1/z)}{z-1} dz$

27. Sea Γ la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Calcular $\int_\Gamma \frac{1}{z} dz$ y demostrar que
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}.$$

28. Obtener los desarrollos en serie de Laurent de las siguientes funciones indicando sus recintos de validez,

   a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ en potencias de z.

   b) $f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$ en potencias de $z+1$.

29. Obtener el valor de las siguientes integrales.

   a)
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z+4)}.$$

   b)
$$\int_{|z+2|=3} \frac{dz}{z^3(z+4)}.$$

   c)
$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} dz.$$

30. Probar que,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx = \frac{\pi}{4}.$$

31. Probar que,
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{\operatorname{sen} t}{2}} dt = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(3+\cos t)^2} dt = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

32.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos^2(t)}$$

33.
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos(t))^2}$$

34.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)(x^2+4)} dx$$

35.
$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx$$

36. Utilizando que $\mathcal{F}[\Pi_{[-b,b]}(t)](\omega) = \frac{2 \operatorname{sen} \omega b}{\omega}$, probar
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi, & \text{si } t \in]-1,1[\\ 0, & \text{si } |t| > 1 \\ \pi/2, & \text{si } t = \pm 1 \end{cases}$$

37. Probar que,

$$\mathcal{F}[e^{-c|t|}](\omega) = \frac{2c}{\omega^2 + c^2}, \quad (c > 0).$$

Utilizar el resultado anterior para calcular,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega}{\omega^2 + 1}\, d\omega.$$

38. Calcular,

$$\mathcal{F}\Big[(1 - t^2)\Pi_{[-1,1]}(t)\Big].$$

39. Obtener el valor de,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} \cos(x/2)\, dx.$$

40. Calcula la transformada de Fourier de la función,

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in [-1, 1] \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

y deduce el valor de la integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} \cos 2\omega\, ds.$$

41. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

a) $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$

b) $y''(t) + 4y(t) = \sin(3t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$

c) $y''(t) + 9y(t) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

d) $y''(t) + 6y'(t) + 34y(t) = 30\sin(2t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$

e) $y^{iv}(t) + 2y''(t) + y(t) = 4te^t, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$