1. Análisis en variable compleja y transformadas

Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Francisco José Palomo Ruiz
Francisco Joaquín Rodríguez Sánchez
Mª Luz Muñoz Ruiz
José Manuel González Vida

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

1. VARIABLE COMPLEJA
    - El sistema de los números complejos. Funciones de variable compleja
    - Funciones analíticas e integración
    - Aplicaciones

2. TRANSFORMADAS INTEGRALES

Variable Compleja y Análisis de Fourier

Variable Compleja

- Capítulo 1º. El sistema de los números complejos. Funciones de variable compleja.
- Capítulo 2º. Funciones analíticas e Integración.
- Capítulo 3º. Aplicaciones.

Transformadas de Laplace y Fourier

- Capítulo 4º. Transformada de Laplace.
- Capítulo 5º. Transformada de Fourier.

Capítulo 1º. El sistema de los números complejos. Funciones de variable compleja

Lección 1º. El sistema de los números complejos

- El cuerpo de los números complejos.
- Representaciones de un número complejo.
- Topología del plano complejo.
- La esfera de Riemann.

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Propiedades de los números reales

- $(\mathbb{R}, +, .)$ es un cuerpo conmutativo.
  1. $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano con neutro 0.
  2. $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano con neutro 1.
  3. Se cumple la propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ es un orden total y $(\mathbb{R}, +, .)$ un cuerpo ordenado.
  1. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.
  2. $a \leq b$, $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$.
- Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacio y acotado superiormente tiene supremo.
  1. Para cada $x \in A$, $x \leq \mathrm{Sup}(A)$.
  2. Si para cada $x \in A$, $x \leq M$, entonces $\mathrm{Sup}(A) \leq M$.
- Existen polinomios con coeficientes reales sin raices reales.

Lección 1º. El sistema de los números complejos

El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$

Definimos $\mathbb{C}$ como el conjunto de pares ordenados (a, b) donde $a, b \in \mathbb{R}$ dotado de las operaciones de suma y producto definidas por,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ satisface todas las propiedades de un cuerpo conmutativo.

Lección 1º. El sistema de los números complejos

- Podemos considerar $\mathbb{R}$ como *parte* de $\mathbb{C}$ mediante la aplicación

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, \quad a \mapsto (a, 0).$$

  Esto permite identificar a los números reales con el eje de abscisas (eje real) en $\mathbb{R}^2$.
- Si escribimos $\mathbf{i} = (0, 1)$, entonces $\mathbf{i}^2 = (-1, 0) = -1$.
- Cada $z \in \mathbb{C}$ admite la expresión $z = a + b\mathbf{i}$ (forma binómica).
- Cuando escribimos $z = a + b\mathbf{i}$, $(a, b \in \mathbb{R})$, llamaremos $a = \mathrm{Re}(z)$ y $b = \mathrm{Im}(z)$.
- Se define $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\bar{z} = a - b\mathbf{i}$. Así $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $(z \neq 0)$

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Ejemplos

- Encontrar la partes real e imaginaria de,
  1. $\frac{3+5\mathbf{i}}{1+7\mathbf{i}}$.
  2. $\left(\frac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3$.
  3. $\frac{z-\alpha}{z+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
  4. z^3.
- Calcular las raices cuadradas de $-5-12\mathbf{i}$.
- No existe ninguna relación de orden total sobre $\mathbb{C}$ compatible con su estructura de cuerpo. (Análogamente si $\mathbf{i} \leq 0$)

$$\mathbf{i} \geq 0 \Rightarrow -1 \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 1 \Rightarrow -1 \geq 1 \Rightarrow -\mathbf{i} \geq \mathbf{i} \Rightarrow 1 \geq -1 \Rightarrow -1 = 1.$$

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Propiedades básicas

1. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
2. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$.
3. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathbf{i}}$.
4. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
5. $|z \cdot w| = |z||w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$.

Si $z, w \in \mathbb{C}$ probar que,

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}), \quad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Argumento, forma polar y forma exponencial de un número complejo

Sea $z \neq 0$ definimos,

$$\mathrm{Arg}(z) = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|},\ \ \mathrm{sen}\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \right\}.$$

Si $\theta \in \mathrm{Arg}(z)$ se tiene $z = |z|(\cos\theta + \mathbf{i}\mathrm{sen}\theta)$ (forma trigonométrica)

- Si fijamos $\theta \in \mathrm{Arg}(z)$, entonces $\mathrm{Arg}(z) = \{\theta + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.
- Se dice que r_θ es una forma polar del complejo $z \neq 0$ cuando,

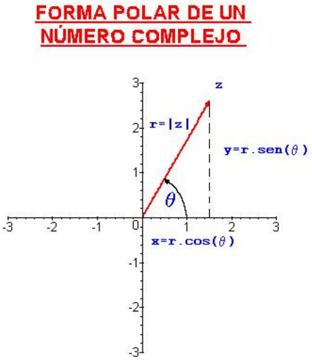
$$r = |z|, \ \ \text{y} \ \ \theta \in \mathrm{Arg}(z) \Leftrightarrow z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\mathrm{sen}\theta)$$

- La identidad de Euler, $e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\mathrm{sen}\theta$, permite escribir $z = |z|e^{\mathbf{i}\theta}$ (forma exponencial).

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Argumento principal

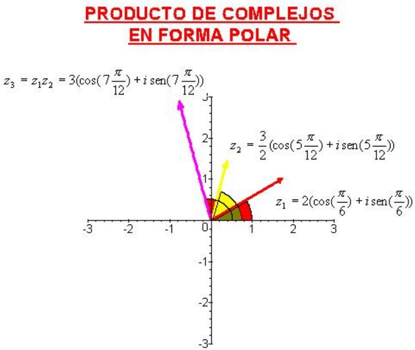
El único $\theta \in \mathrm{Arg}(z)$ que satisface la condición $-\pi < \theta \leq \pi$ se llama argumento principal de z y lo representaremos por $arg(z)$.



Lección 1º. El sistema de los números complejos

Producto en forma polar

Sean $z = r_\alpha, w = s_\beta$, entonces $zw = (rs)_{\alpha+\beta}$ y $\frac{z}{w} = (r/s)_{\alpha-\beta}$.



Lección 1º. El sistema de los números complejos

Ejemplos

- Escribir en forma binómica, polar, trigonométrica y exponencial los números complejos,

$$z = \mathbf{i}, \quad w = 1 + \mathbf{i}, \quad u = 2_{\pi/3}, \quad t = 3e^{\pi \mathbf{i}}$$

- Calcular la forma polar de $\frac{-2+2\sqrt{3}\mathbf{i}}{\sqrt{3}+\mathbf{i}}$.
- Obtener las expresiones de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$.

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Potencias de un número complejo

Sea $z = r_\theta$, entonces $z^n = (r^n)_{n\theta}$.

- Para complejos de módulo 1 se obtiene la fórmula de De Moivre,

$$\left(\cos\theta + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\theta\right)^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(n\theta).$$

- Obtener expresiones para $\cos(3\theta)$ y $\mathrm{sen}(3\theta)$.

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Raíces de un número complejo

Sea $z \neq 0$, las raíces de orden n de z son los complejos w que cumplen $w^n = z$.

- Si $w = \rho_\alpha$ y $\theta \in \mathrm{Arg}(z)$, entonces

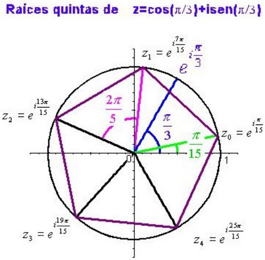
$$\rho^n = |z| \ \text{ y } \ \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \ \ (k = 0, 1, ..., n-1).$$

- Cada número complejo no nulo admite n raíces distintas de orden n formando éstas un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Ejemplos

1. Calcula las raíces quintas de $z = \cos(\pi/3) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\pi/3) = e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$.
2. Obtener las raíces sextas de la unidad.
3. Resolver la ecuación $z^2 + \sqrt{32}\mathbf{i}z - 6\mathbf{i} = 0$.



Lección 1º. El sistema de los números complejos

Topología del plano complejo

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, definimos $d(z,w) = |z-w| \geq 0$.

1. $d(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$.
2. $d(z,w) = d(w,z)$.
3. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$.

Se verifican las siguientes desigualdades,

$$|z+w| \leq |z| + |w|, \quad \Big||z| - |w|\Big| \leq |z-w|.$$

Ejemplo

Probar que todas las raíces de $z^7 + z + 4$ están fuera del disco unidad.

Lección 1º. El sistema de los números complejos

Límites de sucesiones

- Una sucesión de números complejos $\{z_n = x_n + \mathbf{i}y_n\}$ tiene límite $z \in \mathbb{C}$ y escribiremos $\lim z_n = z = a + \mathbf{i}b$ cuando

$$\lim x_n = a, \quad \text{y} \quad \lim y_n = b.$$

Capítulo 1º. El sistema de los números complejos. Funciones de variable compleja

Lección 2º. Funciones de variable compleja

- Parte real e imaginaria de una función de variable compleja.
- Límite y continuidad de las funciones de variable compleja.
- Funciones polinómicas y racionales.
- Funciones exponencial y logarítmica.
- Funciones trigonométricas.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Parte real e imaginaria de una función de variable compleja

Sea $f : G \to \mathbb{C}$ donde $G \subset \mathbb{C}$ una función. Definimos,

- $\mathrm{Re}(f) : G \to \mathbb{R}$ por $\mathrm{Re}(f)(x + \mathbf{i}y) = \mathrm{Re}\Big(f(x + \mathbf{i}y)\Big)$.
- $\mathrm{Im}(f) : G \to \mathbb{R}$ por $\mathrm{Im}(f)(x + \mathbf{i}y) = \mathrm{Im}\Big(f(x + \mathbf{i}y)\Big)$.

Escribiremos $u(x, y) = \mathrm{Re}\Big(f(x + \mathbf{i}y)\Big)$ y $v(x, y) = \mathrm{Im}\Big(f(x + \mathbf{i}y)\Big)$, así

$$f(x + \mathbf{i}y) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y).$$

Ejemplo

Obtener las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ para $f(z) = 1/z^2$.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Si $a = x_0 + \mathbf{i}y_0$, se tiene el siguiente resultado clave:

$$\lim_{z\to a} f(z) = \omega = \alpha + \mathbf{i}\beta \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \text{ y } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta.$$

Ejemplos

Calcula, si existen, los siguientes límites,

- $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)}{z}$.
- $\lim_{z\to 0} \frac{z\mathrm{Re}(z)}{|z|}$.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Continuidad de funciones de variable compleja

Sea $f : G \to \mathbb{C}$ donde $G \subset \mathbb{C}$ una función y $a \in G$

- Si $f = u + \mathbf{i}v$, entonces f es continua en $a = x_0 + \mathbf{i}y_0$ si y sólo si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas en (x_0, y_0).
- Una función f se dice continua en G si lo es en cada uno de sus puntos.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Propiedades de la continuidad de funciones de variable compleja

- La continuidad de funciones de variable compleja cumple propiedades similares a la continuidad de funciones de variable real.
- En particular, si $f : K \to \mathbb{C}$ es continua y K es compacto, entonces $f(K)$ es compacto.
- Si G es un abierto, entonces $f : G \to \mathbb{C}$ es continua en $a \in G$ si y sólo si $f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$.

Ejemplo

Sea $f(z) = \frac{z^2+4}{z-2\mathbf{i}}$ si $z \neq 2\mathbf{i}$ y $f(2\mathbf{i}) = 3 + 4\mathbf{i}$. Estudia su continuidad.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Funciones polinómicas y racionales

- Funciones polinómicas,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n,$$

$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

- Funciones racionales,

$$g(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m},$$

donde $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Algunos ejemplos importantes

- Transformaciones lineales, $f(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$.
- Transformaciones afines, $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$.
- La inversión, $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- Transformaciones de Möbius (homografías o bilineales),

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y satisfacen $ad - bc \neq 0$.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Transformaciones de Möbius

- Si $c = 0$, entonces T es una transformación lineal o afín.
- Si $c \neq 0$, entonces

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}$$

y T es la composición de giros, dilataciones, traslaciones y la inversión.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Ejemplos

- Representar gráficamente el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$.
  Representar el conjunto $f(A)$ siendo $f(z) = (1+\mathbf{i})z$.
- Sea la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{z+2}{z-2}.$$

Descomponer T como composición de giros, dilataciones, traslaciones y la inversión.
Obtener la imagen por T de,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$$

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Función exponencial

Se define la función exponencial por, $f(z) = e^z = e^x(\cos y + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\, y)$.
Propiedades.

1. $f(x) = e^x$ si $x \in \mathbb{R}$.
2. $|f(z)| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.
3. $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$.
4. $f(z+w) = f(z)f(w), \quad f(0) = 1$.
5. $f(z)$ es continua en $\mathbb{C}$.

Ejemplo

Obtener la imagen por la función exponencial de $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 2\}$ y $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = \pi/4\}$.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Función logarítmica

Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, se define $\mathrm{Ln}(z) = \{\omega \in \mathbb{C} : e^{\omega} = z\}$.

- $\mathrm{Ln}(z) = \left\{ \ln|z| + \mathbf{i}\theta : \theta \in \mathrm{Arg}(z) \right\}$. El logaritmo complejo no es una función.
- Se llama rama principal del logaritmo (ln) a la siguiente,

$$G = \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

$$\ln(z) = \ln|z| + \mathbf{i}\theta,$$

donde $\theta \in \mathrm{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi)$.

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Ejemplos

El logaritmo complejo cumple formalmente las mismas propiedades que el logaritmo real, pero en este caso se trata de igualdades entre conjuntos.

$$\mathrm{Ln}(-1) = \left\{(2k+1)\pi\mathbf{i} : k \in \mathbb{Z}\right\}, \;\; \mathrm{Ln}(\mathbf{i}) = \left\{\frac{4k+1}{2}\pi\mathbf{i} : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\mathrm{Ln}(-\mathbf{i}) = \left\{\frac{4k+3}{2}\pi\mathbf{i} : k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathrm{Ln}(-1) + \mathrm{Ln}(\mathbf{i}).$$

Si tomamos $\ln(\mathbf{i})$ y $\ln(-1+\mathbf{i})$, entonces

$$\ln(\mathbf{i}(-1+\mathbf{i})) \neq \ln(\mathbf{i}) + \ln(-1+\mathbf{i})$$

Lección 2º. Funciones de variable compleja

Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}, \quad \cos z = \frac{e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}}{2}, \quad \tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$$

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Ejemplos

- Demuestra que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
- Calcula $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\right)$ y determina los números complejos que cumplen $\cos z = 2$.

Capítulo 2º. Funciones analíticas e Integración

Lección 3º. Derivación de funciones de variable compleja

- Derivada de una función de variable compleja.
- Funciones analíticas.
- Condiciones de Cauchy-Riemann.
- Derivada de las funciones elementales.

Lección 3º. Derivación de funciones de variable compleja

Derivación compleja

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Se dice que f es derivable en $z_0 \in \Omega$ si existe,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}.$$

Si tal límite existe lo escribimos $f'(z_0)$ y lo llamamos derivada de f en z_0.

- Si f es derivable en cada punto de Ω diremos que f es derivable en Ω y obtenemos una nueva función $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ (función derivada de f).

Ejemplos

- $f(z) = z^2$.
- $f(z) = \bar{z}$.
- $f(z) = z\bar{z}$.

Lección 3º. Derivación de funciones de variable compleja

Propiedades

- Si f es derivable en z_0, entonces f es continua en z_0.
- La derivación compleja obedece las mismas reglas (incluyendo la regla de la cadena) que la derivación de funciones reales de variable real.

Funciones analíticas

Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica (holomorfa) en $z_0 \in \Omega$ si f es derivable en todo un abierto contenido en Ω y que contenga a z_0.

- Se dice que f es analítica cuando lo sea en todos los puntos de Ω.
- Se dice que f es analítica en un conjunto $A \subset \Omega$, no necesariamente abierto, cuando es analítica en algún abierto G con $A \subset G \subset \Omega$.
- Se dice que f es entera cuando es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Lección 3º. Derivación de funciones de variable compleja

Teorema de Cauchy-Riemann

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f(x + \mathbf{i}y) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)$. Supongamos que las derivadas parciales primeras de u y v existen y son continuas sobre Ω. Entonces f es analítica en Ω si y sólo si u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann sobre Ω.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En este caso, $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial y}$.

Lección 3º. Derivación de funciones de variable compleja

Ejemplos

- Probar que $f(z) = e^z$ es entera y obtener $f'(z)$.
- Estudiar la derivabilidad de $f(z) = \bar{z}\mathrm{Re}(z)$.

Derivada de las funciones elementales

- $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \Rightarrow f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$.
- $f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$.
- $f(z) = \mathrm{sen}\, z \Rightarrow f'(z) = \cos z$.
- $f(z) = \cos z \Rightarrow f'(z) = -\mathrm{sen}\, z$.
- $f(z) = \ln(z) \Rightarrow f'(z) = 1/z$.
- $f(z) = \mathrm{senh}\, z \Rightarrow f'(z) = \cosh z$.
- $f(z) = \cosh z \Rightarrow f'(z) = \mathrm{senh}\, z$.

Capítulo 2º. Funciones analíticas e Integración

Lección 4º. Integración compleja. Teorema de Cauchy-Goursat

- Integración compleja.
- Algunas consideraciones topológicas.
- Teorema de Cauchy-Goursat.
- Fórmula integral de Cauchy.
- Fórmula integral de Cauchy para las derivadas sucesivas de las funciones analíticas.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Definiciones básicas

- Llamaremos arco o curva en $\mathbb{C}$ a toda función continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si escribimos $\gamma(t) = x(t) + \mathbf{i}y(t)$, entonces las funciones de variable real x e y son continuas.
- Los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ se llaman origen y extremo, respectivamente, de la curva γ.
- Un arco γ se dice simple cuando la función γ es inyectiva y se dice cerrado cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Un arco γ se dice cerrado y simple cuando es cerrado y $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ cuando $t_1, t_2 \in]a, b[$.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Definición (Integral de funciones complejas de variable real)

Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = x(t) + \mathbf{i}y(t)$ es una curva en $\mathbb{C}$. Definimos

$$\int_a^b \gamma(t)dt = \int_a^b x(t)dt + \mathbf{i}\int_a^b y(t)dt,$$

Propiedades

- $\int_a^b \Big[z\gamma(t) + w\alpha(t)\Big]dt = z\int_a^b \gamma(t)dt + w\int_a^b \alpha(t)dt$, $(z, w \in \mathbb{C})$.
- $\Big|\int_a^b \gamma(t)dt\Big| \leq \int_a^b |\gamma(t)|dt$.
- $\int_a^c \gamma(t)dt + \int_c^b \gamma(t)dt = \int_a^b \gamma(t)dt$ para cada $c \in]a,b[$.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

- Diremos que γ es un arco diferenciable cuando existen y son continuas x' e y'. En tal caso definimos $\gamma'(t) = x'(t) + \mathbf{i}y'(t)$.
- Llamaremos longitud del arco γ a $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.
- El Teorema Fundamental del Cálculo implica que si $\Gamma'(t) = \gamma(t)$, entonces $\int_a^b \gamma(t)dt = \Gamma(b) - \Gamma(a)$.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Integral de funciones de variable compleja a lo largo de una curva

Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Supongamos que $f \circ \gamma$ tiene sentido y es continua.

Se define la integral de f a lo largo de γ por:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Esta definición se extiende al caso en que γ sea diferenciable a trozos.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Ejemplos

Calcula el valor de las siguientes integrales.

- Para γ el contorno del cuadrado de vértices $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$ *recorrido en sentido habitual*, $\int_\gamma |z|^2 dz$.
- Para γ la circunferencia unidad, $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$.
- Para γ la circunferencia unidad, $\int_\gamma z^2 dz$.

Estas integrales no dependen de la parametrización.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Propiedades

Si f y g son funciones continuas sobre una curva C y $w_0 \in \mathbb{C}$,

- $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$, donde $-C$ es la curva que recorre la misma traza pero en sentido opuesto.
- La integral es $\mathbb{C}$-lineal.
- Desigualdad $M - L$

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq M \cdot L(C),$$

  donde M es cualquier cota superior de $|f(z)|$ sobre la curva C.

Ejemplo

Probar que $|\int_C (e^z - |z|)dz| \leq 60$, donde C es el triángulo de vértices $0, 3\mathbf{i}, -4$.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Teorema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva diferenciable a trozos con traza contenida en Ω. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua con primitiva $F : \Omega \to \mathbb{C}$ $(F' = f)$, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es cerrada $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Cada función de variable real y continua sobre un intervalo tiene primitiva.

Ejemplo

Probar que $f(z) = |z|^2$ es continua pero carece de primitiva.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Consideraciones topológicas

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Se dice que Ω es conexo si cumple la siguiente condición,

- Para cada dos puntos $z_0, z_1 \in \Omega$ existe una curva diferenciable a trozos γ con imagen contenida en Ω, origen en z_0 y extremo en z_1.

Un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo se llama un dominio o una región.

- Un subconjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice convexo si para cada dos puntos $z_0, z_1 \in \Omega$ el segmento que los une está contenido en Ω.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Teorema (existencia de primitiva)

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua definida sobre el abierto conexo Ω. Entonces son equivalentes:

- f admite primitiva en Ω.
- Para toda curva diferenciable a trozos cerrada γ con imagen contenida en Ω se tiene $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
- Si γ_1 y γ_2 son curvas diferenciables a trozos contenidas en Ω que comparten origen y extremo, entonces $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

Si escribimos $f = u + \mathbf{i}v$, entonces f admite primitiva si y sólo si los campos de vectores $X = (u, -v)$ e $Y = (v, u)$ son campos gradientes. Si $F(z) = U + \mathbf{i}V$ con $F'(z) = f(z)$, entonces $X = \nabla U$ e $Y = \nabla V$.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Consideraciones topológicas II

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, diremos que Ω es simplemente conexo si para cada curva cerrada $\alpha : [a, b] \to \Omega$ con $\alpha(a) = z_0$ contenida en Ω existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$ de forma que,

1. $H(0, t) = \alpha(t)$
2. $H(1, t) = z_0$
3. $H(s, a) = H(s, b) = z_0$

La aplicación H es una "deformación" continua de la curva cerrada α en la constante z_0.

Todo conjunto Ω abierto y convexo es simplemente conexo.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Teorema de Cauchy-Goursat

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica en el abierto simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si γ es una curva diferenciable a trozos cerrada con su imagen contenida en Ω, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

- La primera demostración fue obtenida por Cauchy en 1825 bajo las hipótesis de continuidad de f' y γ diferenciable cerrada y simple.
- Goursat en 1884 eliminó la continuidad de f'.
- La versión que hemos enunciado se debe a Pringsheim y fue obtenida en 1901.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Fórmula de Green-Riemann

Sea γ una curva diferenciable cerrada y simple. $X = (P, Q)$ un campo de vectores con P y Q admitiendo primeras derivadas parciales continuas. Entonces, $\int_\gamma X \, d\gamma = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$, donde R es el recinto encerrado por γ.

Demostración (bajo las hipótesis usadas por Cauchy)

Sea $f = u + \mathbf{i}v$, entonces para $X = (u, -v)$ e $Y = (v, u)$,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma X \, d\gamma + \mathbf{i} \int_\gamma Y \, d\gamma =$$

$$\int_R (-v_x - u_y) dxdy + \mathbf{i} \int_R (u_x - v_y) dxdy = 0.$$

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Teorema

Sea $f : \Omega - \{z_1, z_2, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ una función analítica donde Ω es un abierto simplemente conexo .
Sea Γ una curva diferenciable a trozos cerrada y simple con su imagen contenida en Ω y que *rodea* a $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$.
Sean $\gamma_1, ..., \gamma_n$ curvas diferenciables a trozos rodeadas por Γ cerradas y simples de forma que *rodeen* a cada z_j. Entonces,

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Teorema. Fórmula integral de Cauchy

Supongamos que f es una función analítica en un disco abierto $B(\xi, R)$. Sea $z_0 \in B(\xi, R)$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

donde γ es cualquier curva diferenciable a trozos cerrada y simple que contenga a z_0 y contenida en $B(\xi, R)$.

Calcula

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(e^z)}{z} dz,$$

donde γ es la circunferencia unidad centrada en el origen.

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Teorema. Fórmula integral de Cauchy para las derivadas

Supongamos que f es una función analítica en un disco abierto $B(\xi, R)$. Entonces para cada $z_0 \in B(\xi, R)$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f^{(n)}(z_0)$ con

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathbf{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

donde γ es cualquier curva diferenciable a trozos cerrada y simple que contenga a z_0 y contenida en $B(\xi, R)$.

Calcula

$$\int_\gamma \frac{\tan z}{(z - \pi/4)^2} dz,$$

donde γ es la circunferencia unidad centrada en el origen.

Ejemplos

- $\int_{|z|=1} \frac{1-\sin(z)}{z^2} dz$
- $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{z^2-1} dz$
- $\int_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)(z-4)} dz$
- $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz$
- $\int_{|z|=1} \frac{\sin^6(z)}{(z-\pi/6)^3} dz$
- $\int_{|z-1|=1/2} \frac{\sin(1/z)}{z-1} dz$

Sea Γ la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Calcular $\int_\Gamma \frac{1}{z} dz$ y demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Lección 4º. Integración compleja. Teor. de Cauchy-Goursat

Funciones armónicas

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Se dice que u es armónica si admite derivadas parciales de segundo orden continuas y,

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \text{(Ecuación de Laplace)}.$$

- Si $f = u + v\mathbf{i}$ es analítica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces u y v son funciones armónicas.
- Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica, se dice que v es armónica conjugada de u cuando $f = u + \mathbf{i}v$ es analítica en Ω.

Probar que la función $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ es armónica. Encontrar su armónica conjugada.

Capítulo 2º. Funciones analíticas e Integración

Lección 5º. Series de potencias

- Teorema de Taylor.
- Series de Laurent.

Lección 5º. Series de potencias

Teorema de Taylor

Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función analítica en el disco abierto $D = B(z_0, R)$. Entonces para cada $z \in D$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \text{ (Serie de Taylor)}$$

Lección 5º. Series de potencias

Observaciones

- Para obtener la serie de Taylor no necesitamos hacer hipótesis sobre el orden de derivabilidad de la función y la convergencia está asegurada.
- El desarrollo en serie de Taylor es válido en discos abiertos, por tanto no necesariamente el mismo desarrollo será válido en todo el dominio de la función.

Además,

- $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1}$.

Lección 5º. Series de potencias

Ejemplos

Desarrollar en series de Taylor, en el punto que se indica,

- $f(z) = e^z$, $f(z) = \operatorname{sen} z$, $f(z) = \cos z$ en $z_0 = 0$.
- $f(z) = e^{z-\mathbf{i}}$ en $z_0 = \mathbf{i}$.
- $f(z) = \frac{1}{z-1}$ en $z_0 = 2$.
- $f(z) = \frac{1}{z}$ en $z_0 = 3$.
- $f(z) = \frac{1}{z^2}$ en $z_0 = 3$.
- $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$ en $z_0 = 5$.

Lección 5º. Series de potencias

Sucesiones dobles de números complejos

Una aplicación $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ se denomina sucesión doble de números complejos.

Escribiremos $\{z_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ para referirnos a s cuando $s(n) = z_n$.

Series dobles de números complejos

Sea $\{z_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ una sucesión doble de números complejos.

Se dice que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ es convergente cuando,

- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ son convergentes.

Se dice que, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Lección 7º. Series de potencias

Ejemplo

$$\dots + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} + 1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \dots$$

Lección 7º. Series de potencias

Teorema de Laurent

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ analítica sobre $A = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Entonces para cada $z \in A$ y cada $R_1 < \rho < R_2$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{(Serie de Laurent)}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

y $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{\mathbf{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Lección 7º. Series de potencias

Observaciones

- El Teorema de Laurent es válido cuando $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$
- Se distinguirán dos sucesiones $a_n = c_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $b_n = c_{-n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Así escribiremos,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

- Si la función f es analítica en el disco $|z - z_0| < R_2$ todos los coeficientes b_n se anulan y la serie de Laurent coincide con la de Taylor.

Lección 5º. Series de potencias

Ejemplos

Obtener los desarrollos en serie de Laurent de las siguientes funciones indicando sus recintos de validez,

1. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ en potencias de z.
2. $f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$ en potencias de $z+1$.

Capítulo 2º. Funciones analíticas e Integración

Lección 6º. Propiedades de las funciones analíticas

- Desigualdad de Cauchy.
- Teorema de Liouville y Teorema fundamental del Álgebra.

Lección 6º. Propiedades de las funciones analíticas

Desigualdad de Cauchy

Sea f es una función analítica en un disco abierto $D = B(z_0, R)$. Si $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in D$ entonces, $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}$.

Teorema de Liouville

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y acotada, esto es $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Teorema Fundamental del Álgebra

Si $P(z)$ es un polinomio con coeficientes complejos y de grado mayor o igual que 1, entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ de forma que $P(z_0) = 0$.

Capítulo 3º. Aplicaciones

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

- Clasificación de las singularidades aisladas.
- Residuo de una función en una singularidad aislada.
- Teorema de los Residuos.
- Aplicaciones del Teorema de los Residuos al cálculo de integrales reales.

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Definición

Se dice que una función $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe $R > 0$ de manera que $f(z)$ es analítica en $B(z_0, R) - \{z_0\}$ pero no en $B(z_0, R)$.

Ejemplos

- $f(z) = 1/z$ tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$.
- $f(z) = \frac{1}{sen(\pi/z)}$ tiene una singularidad no aislada en $z_0 = 0$.

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Consideremos el desarrollo en serie de Laurent en potencias de $(z - z_0)$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \;\; 0 < |z - z_0| < R.$$

Pueden presentarse tres alternativas.

Clasificación de las singularidades aisladas

1. Todos los coeficientes b_n se anulan. Se dice que z_0 es una singularidad evitable de f.
2. Existe $m \geq 1$ de manera que $b_n = 0$ para $n > m$ pero $b_m \neq 0$. Se dice que z_0 es un polo de orden m de f.
3. Existen infinitos coeficientes b_n no nulos. Se dice que z_0 es una singularidad esencial de f.

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Criterio (Caracterización de los polos de una función)

$z_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de orden $m \geq 1$ de una función $f(z)$ si y sólo si existe algún $R > 0$ de forma que sobre $0 < |z - z_0| < R$ es posible escribir,

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m},$$

donde φ es analítica en $|z - z_0| < R$ y $\varphi(z_0) \neq 0$.

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Definición

Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0, llamaremos residuo de $f(z)$ en z_0 al coeficiente b_1 del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en potencias de $(z - z_0)$. Escribiremos $\mathrm{Res}(f(z); z = z_0)$.

Teorema de los residuos

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y simplemente conexo. Supongamos que $f(z)$ es analítica en $\Omega - \{z_1, z_2, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$. Sea γ una curva diferenciable a trozos cerrada y simple con traza en Ω, que contenga en el recinto acotado que determina al conjunto $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ pero no lo interseque. Entonces,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi \mathbf{i} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z); z = z_j).$$

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Residuo en los polos

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de orden $m \geq 1$ de una función $f(z)$. Supongamos que sobre $0 < |z - z_0| < R$, $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, donde φ es analítica en $|z - z_0| < R$ y $\varphi(z_0) \neq 0$.
Entonces,

$$\mathrm{Res}(f(z); z = z_0) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Ejemplos

Obtener el valor de las siguientes integrales.

1. $$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z+4)}.$$

2. $$\int_{|z+2|=3} \frac{dz}{z^3(z+4)}.$$

3. $$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\,dz.$$

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, se define la integral impropia,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R f(x)dx + \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^0 f(x)dx,$$

si ambos límites existen y son finitos.

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, se define el valor principal de Cauchy por,

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

si el límite existe y es finito. Si la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe, entonces existe su valor principal $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ y ambos coinciden.

- Si f es una función par, la existencia del valor principal $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ implica la existencia de la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ y ambos coinciden, además

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Aplicaciones al cálculo de integrales reales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios reales y $Q(x)$ sin raíces reales.

$$\boxed{\text{Desigualdades básicas}}$$

$$|z+w| \leq |z| + |w|, \quad \Big||z| - |w|\Big| \leq |z-w|$$

Probar que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Aplicaciones al cálculo de integrales reales

$$\int_0^{2\pi} F(\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = \int_{|z|=1} \frac{F\left(\frac{z-z^{-1}}{2\mathbf{i}}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)}{\mathbf{i}z}\,dz,$$

Probar que,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{\operatorname{sen} t}{2}}\,dt = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{(3+\cos t)^2}\,dt = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Lección 8º. Residuos y Aplicaciones

Ejemplos.

1. $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos^2(t)}$$

2. $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos(t))^2}$$

3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)(x^2+4)} dx$$

4. $$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx$$

CAPÍTULO 4º TRANSFORMADAS INTEGRALES

Capítulo 4º. Transformadas Integrales

- Lección 9º. Transformada de Fourier.
- Lección 10º. Transformada de Laplace.

Capítulo 4º. Transformadas integrales

Lección 9º. Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier.
- Fórmula integral de Fourier.
- Propiedades de la transformada de Fourier.

Lección 9º. Transformada de Fourier

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función absolutamente integrable. Esto es, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$.
Se define su transformada de Fourier por,

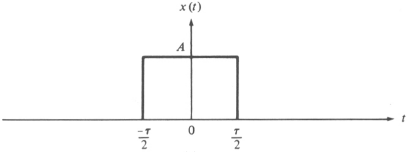
$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\omega t \mathbf{i}}\, dt = \widehat{f}(\omega).$$

Ejemplo

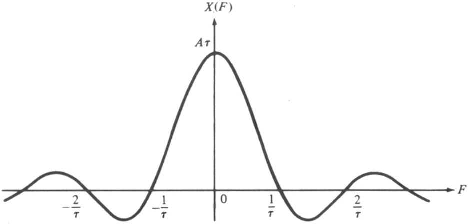
$$\mathcal{F}[\Pi_{[-b,b]}(t)](\omega) = \frac{2\operatorname{sen}\omega b}{\omega}, \;\; \omega \neq 0,$$

$\mathcal{F}[\Pi_{[-b,b]}(t)](0) = 2b.$

Lección 9º. Transformada de Fourier



(a)



(b)

Lección 9º. Transformada de Fourier

Transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{\omega t \mathbf{i}}\, d\omega.$$

Teorema integral de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función absolutamente integrable. Si además,

1. $f(t)$ es continua salvo en un conjunto discreto de puntos $\{t_1, t_2, ...t_n, ...\}$ y existen y son finitos los límites laterales de $f(t)$ en cada t_j.
2. $f(t)$ es derivable lateralmente en todo $\mathbb{R}$.

Entonces,

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\omega)](t).$$

Lección 9º. Transformada de Fourier

Ejemplos

- Utilizando que $\mathcal{F}[\Pi_{[-b,b]}(t)](\omega) = \frac{2\,\text{sen}\,\omega\, b}{\omega}$, probar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}\,\omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi, & \text{si } t \in]-1,1[\\ 0, & \text{si } |t| > 1 \\ \pi/2, & \text{si } t = \pm 1 \end{cases}$$

- Probar que,

$$\mathcal{F}[e^{-c|t|}](\omega) = \frac{2c}{\omega^2 + c^2}, \quad (c > 0).$$

  Utilizar el resultado anterior para calcular,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega}{\omega^2 + 1} d\omega.$$

Lección 9º. Transformada de Fourier

Ejemplos

- Calcular,

$$\mathcal{F}\left[(1-t^2)\Pi_{[-1,1]}(t)\right].$$

- Obtener el valor de,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} \cos(x/2)\, dx.$$

Lección 9º. Transformada de Fourier

- Calcula la transformada de Fourier de la función,

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in [-1, 1] \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

y deduce el valor de la integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} \cos 2\omega \, ds.$$

Lección 9º. Transformada de Fourier

- Calcula la transformada de Fourier de la función, $f(t) = te^{-t}$ si $t \geq 0$ y $f(t) = 0$ si $t \leq 0$.
  y deduce el valor de la integral,

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1-\omega^2)\cos\omega + 2\omega \operatorname{sen}\omega}{(1+\omega^2)^2} d\omega.$$

Lección 9º. Transformada de Fourier

Propiedades de la Transformada de Fourier

1. Linealidad, $\mathcal{F}[zf(t)+wg(t)] = z\mathcal{F}[f(t)] + w\mathcal{F}[g(t)]$.
2. Traslación, $\mathcal{F}[e^{\mathbf{i}bt}f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - b)$.
3. Cambio de escala,
$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(t)](\omega/a).$$
4. Derivación, ($f^{'}$ absolutamente integrable)
$$\mathcal{F}[f^{'}(t)](\omega) = \mathbf{i}\omega\mathcal{F}[f(t)](\omega).$$
5. Si $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$ es absolutamente integrable,
$$\mathcal{F}[\widehat{f}(t)](\omega) = 2\pi f(-\omega)$$

Capítulo 4º. Transformadas integrales

Lección 10º. Transformada de Laplace

- Transformada de Laplace.
- Propiedades de la transformada de Laplace.
- Aplicaciones.

Lección 10º. Transformada de Laplace

Definición

Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función.
Se define su transformada de Laplace por,

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-s\,t}\,dt = F(s).$$

Ejemplo

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

Lección 10º. Transformada de Laplace

Propiedades de la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0), \quad \mathcal{L}[tf(t)] = -sF'(s), \quad \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a).$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Lección 10º. Transformada de Laplace

Aplicaciones

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

1. $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$
2. $y''(t) + 4y(t) = \sin(3t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$
3. $y''(t) + 9y(t) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
4. $y''(t) + 6y'(t) + 34y(t) = 30\sin(2t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$
5. $y^{iv}(t) + 2y''(t) + y(t) = 4te^{t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$