Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Relación de ejercicios
2. Introducción a los Métodos Numéricos

Ej. 1 — El problema del cálculo del punto de corte de dos rectas con pendiente similar es un problema mal condicionado. Comprobarlo hallando el punto de corte de las rectas

$$y = \frac{1}{2}(3-x), \qquad y = \frac{1}{2.002}(3-x),$$

y el de

$$y = \frac{1}{2}(3-x), \qquad y = \frac{1}{2.002}(3-0.998x).$$

Ej. 2 — Si se resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 10^4 x + 10^{-10} = 0$ con el método normal, al calcular la raíz

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-10^4+\sqrt{10^8-4\cdot 10^{-10}}}{2}$$

en Matlab, a pesar de trabajar con 16 dígitos, se aproxima por 0, que no es la solución. Sin embargo, al calcular la otra raíz,

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-10^4-\sqrt{10^8-4\cdot 10^{-10}}}{2},$$

en Matlab, se obtiene el valor -10^4, que es una buena aproximación. Comprobar todo esto, y que si calculamos primero la segunda raíz y posteriormente la primera mediante

$$x_1 = \frac{c}{ax_2}$$

en Matlab se obtiene -10^{-14}.

Ej. 3 — Sea la ecuación $e^{x-3} = 2 - x$. Trabajando en aritmética de cinco dígitos:

(a) Acotar su solución entre los dos enteros más cercanos y usarlos como intervalo de partida para dar cuatro iteraciones del método de bipartición. Acotar el error cometido y deducir de esa cota cuántos decimales correctos debe tener la aproximación encontrada.

(b) Tomando como valor inicial la última aproximación obtenida en el apartado anterior, dar tres iteraciones del método de Newton. Comprobar si la aproximación encontrada tiene cuatro decimales correctos.

Ej. 4 — Trabajando en aritmética de cuatro dígitos, encontrar la intersección de las gráficas de las funciones $y = e^x$ y $y = x^2$:

(a) Usando el método de Newton (dar 3 iteraciones). ¿Tiene la solución obtenida tres cifras decimales correctas?

(b) Usando un método de punto fijo (dar 3 iteraciones empezando tomando como punto de partida el mismo que se haya tomado en el apartado anterior). ¿Tiene la solución obtenida tres cifras decimales correctas?

Ej. 5 — Se pretende aproximar el número $\sqrt[3]{5}$. Usando aritmética de cinco dígitos:

(a) Dar cuatro pasos del método de bipartición a partir del intervalo $[a, b] = [1, 2]$. ¿Cuántos pasos habría que dar con este método para obtener una aproximación con cuatro decimales correctos?

(b) Utilizar para ello el método de Newton a partir de la última aproximación obtenida en el apartado anterior, realizando tantas iteraciones como sea necesario para obtener cuatro decimales correctos. Comprobar que la aproximación obtenida tiene los decimales correctos requeridos.

Ej. 6 — Se pretende aproximar el número π, usando la función $f(x) = \text{sen}(x)$. Usando aritmética de cinco dígitos:

(a) Acotar la primera raíz positiva entre dos números enteros consecutivos y usarlos como intervalo inicial para dar tres pasos del método de Regula Falsi. ¿Tiene la solución obtenida tres cifras decimales correctas?

(b) A partir del valor obtenido en el apartado anterior, dar tantas iteraciones del método de Newton como sea necesario para que los cuatro dígitos decimales obtenidos sean correctos.

Ej. 7 — Sea la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. Trabajando en aritmética de cuatro dígitos:

(a) Acotar su raíz positiva entre los dos enteros más cercanos y usarlos para dar tres iteraciones del método de Regula Falsi. ¿Tiene la aproximación encontrada dos decimales correctos?

(b) ¿Tiene la función anterior un punto crítico en el intervalo $[-3, -2]$? Justificar la respuesta y, en caso afirmativo, aproximarlo dando tres iteraciones del método de de la secante a partir de ese intervalo.

Ej. 8 — Sea la ecuación $e^{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x} + 1.24$. Usando aritmética de cinco dígitos:

(a) Acotar la primera solución positiva de la ecuación entre los enteros más próximos y utilizarlos como intervalo inicial para dar tres iteraciones del método de la secante.

(b) Aproximar la misma raíz del apartado anterior utilizando los dos métodos de punto fijo que salen de despejar la variable x de la ecuación. Para ello, tomar como valor inicial el número entero siguiente a la aproximación de la raíz encontrada en el apartado anterior y realizar tres iteraciones. Comentar los resultados, y si en alguno de los casos éste es bueno, comprobar cuántos decimales correctos tiene la solución.

Ej. 9 — Sea la función $f(x) = e^x + x$, que tiene su única raíz en el intervalo $[-1, 0]$. Trabajando con redondeo y cuatro cifras decimales no nulas:

(a) Partiendo del intervalo anterior y usando la cota de error conocida del método de bipartición, determinar cuántas iteraciones de dicho método es necesario realizar para poder asegurar que la aproximación obtenida tiene una cifra decimal correcta. Dar cuatro iteraciones de ese método partiendo del mismo intervalo y comprobar que la primera cifra decimal del valor x_4 obtenido es correcta. ¿Contradice esto el resultado anterior?

(b) Dar cuatro iteraciones del método de Newton a partir de $x_0 = 0$ y comprobar si las cuatro cifras decimales de x_4 son correctas.

Ej. 10 — Sea la ecuación $f(x) = \ln(x) + x = 0$. Trabajando con redondeo y cautro cuatro cifras decimales no nulas:

(a) Comprobar que tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$ y dar cuatro iteraciones del método de Newton a partir de $x_0 = 1$. Comprobar si las cuatro cifras decimales de x_3 son correctas.

(b) Determinar los dos métodos de punto fijo que se pueden obtener al despejar las x que se encuentran en la ecuación. Partiendo de $x_0 = 1$, comprobar que uno de ellos no converge y dar seis iteraciones del otro, comprobando a su vez si la primera cifra decimal del valor x_6 obtenido es correcta. ¿Y la segunda?

Ej. 11 — Se pretende reconstruir la trayectoria de un balón desde que el jugador lo golpea hasta que entra en la portería a 1 metro del suelo. La trayectoria del balón obedece a la siguiente ecuación, en la que x representa la distancia horizontal e y la altura sobre el suelo:

$$y = 2\cosh\left(\frac{5}{3}\right) - \left(e^{\frac{x-5}{3}} + e^{\frac{5-x}{3}}\right).$$

(a) Aproximar, dando tres iteraciones del método de Newton, la distancia desde la que el jugador golpeó el balón. Para ello, acotar la primera solución positiva entre dos números enteros consecutivos y usar como x_0 el primero de ellos.

(b) Usando como intervalo inicial el obtenido en el apartado anterior, dar cuatro pasos del método de bipartición. ¿Tiene la solución obtenida 4 dígitos correctos?

Ej. 12 — Nos ofrecen un crédito de 6000 euros a devolver en 50 mensualidades de 150 euros. Llamando C al importe del préstamo, n al número de pagos, a al importe del plazo, i al tipo de interés aplicado, y siendo $r = 1 + i$, se satisface la siguiente ecuación:

$$Cr^n = a\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

(a) Utilizar el método de Newton para obtener el interés del crédito partiendo de la estimación inicial $r = 1.1$, hasta alcanzar un error menor que 10^{-5}.

(b) Utilizar dos métodos de punto fijo distintos para hacer un estudio alternativo, dando cuatro iteraciones con cada uno de ellos y analizando en cada caso su convergencia.

Ej. 13 — Un método de punto fijo $x_{n+1} = g(x_n)$ para el que $g \in C^1([a, b])$ y existe una constante $0 < L < 1$ tal que $|g'(x)| < L$, para todo $x \in [a, b]$, converge localmente. Es más, el error cometido puede acotarse como sigue:

$$|e_n| = |x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L}|x_1 - x_0|.$$

Suponiendo que estamos trabajando con un método de punto fijo convergente para el que $|g'(x)| < 0.7$ para todo x en nuestro intervalo de interés y para el que, si $x_0 = 10$, se obtiene el valor $x_1 = 11.8400$, determinar cuántas iteraciones de este método sería necesario realizar para poder asegurar que la aproximación obtenida tiene 4 cifras decimales correctas.

Ej. 14 — Un sistema de ecuaciones no lineales $f(x) = 0$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y f un campo vectorial de n componentes, se puede resolver con el método de Newton para sistemas:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (Jf(x^{(k)}))^{-1} f(x^{(k)}),$$

donde Jf denota la matriz jacobiana de f. Aproximar la solución del siguiente sistema no lineal mediante tres iteraciones del método de Newton a partir de $x = 1,\ y = 1$:

$$\left.\begin{array}{rcr} x^2 + y^2 &=& 10 \\ x^2 - y^2 &=& 1 \end{array}\right\}$$

Ej. 15 — La tabla

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 0$
$x_1 = \pi/6$	$f(x_1) = 0.5774$
$x_2 = \pi/3$	$f(x_2) = 1.732$

corresponde a la función tangente. Trabajando en aritmética de cuatro dígitos:

(a) Calcular el polinomio de interpolación correspondiente a los datos de la tabla y utilizarlo para aproximar el valor de la tangente en $\pi/4$. Utilizarlo también para aproximar el valor de la tangente en $\pi/2$ y calibrar el error cometido en ese caso.

(b) Utilizar los datos de la tabla para construir un polinomio de interpolación que nos permita aproximar el valor de la función arcotangente en 1. Calcular dicha apoximación.

Ej. 16 — La tabla

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 0$
$x_1 = \pi/8$	$f(x_1) = 0.4142$
$x_2 = \pi/4$	$f(x_2) = 1$

corresponde a la función tangente. Trabajando en aritmética de cuatro dígitos:

(a) Aproximar $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$ usando la regla del punto medio, usando la regla del trapecio, y usando la regla de Simpson, y los valores adecuados de la tabla para cada caso.

(b) Acotar el error cometido en las aproximaciones obtenidas en el apartado anterior con la regla del punto medio y la regla del trapecio. Teniendo en cuenta que una primitiva de $\operatorname{tg} x$ es $-\ln(\cos x)$, ¿el logaritmo neperiano de qué número se ha aproximado en el apartado anterior?

Ej. 17 — Usando la tabla del ejercicio anterior y trabajando en aritmética de cuatro dígitos:

(a) Aproximar la derivada de la tangente en $\pi/8$ usando una fórmula de derivación descentrada y la fórmula de derivación centrada de dos puntos. Utilizar la expresión del error conocida para dichas aproximaciones para acotar el error cometido en cada caso.

(b) Aproximar $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$ utilizando la regla del trapecio compuesta (usando únicamente los puntos de la tabla).

Ej. 18 — Sea el vector $x = (-\pi/3, -\pi/6, 0, \pi/6, \pi/3)$.

(a) Aproximar la derivada de la función $\operatorname{tg} x$ en $x_0 = 0$ usando la fórmula de derivación centrada de dos puntos y los dos valores de h posibles si sólo se permite usar valores de la tangente en los puntos del vector x. Estimar el error cometido en cada caso.

(b) Aproximar también dicha derivada usando la fórmula de derivación centrada de cuatro puntos siguiente:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h}.$$

Comparar el resultado con los obtenidos en el apartado anterior y con el valor exacto de la derivada de $\operatorname{tg} x$ en $x_0 = 0$.

Ej. 19 — La siguiente tabla recoge la temperatura a distintas distancias de uno de los extremos de un conducto de metal de 4 metros de longitud:

x_i	0	1	2	3	4
$T(x_i)$	50	48	44	38	30

Trabajando en aritmética de cuatro dígitos:

(a) Calcular el polinomio de interpolación correspondiente a los datos de la tabla.

(b) Calcular el polinomio de aproximación mínimo-cuadrática $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$. Para ello, escribir el sistema sobredeterminado $Ma = y$, el sistema compatible determinado $Ga = z$ y resolver este último para hallar $\varphi(x)$.

Ej. 20 — Usando la tabla del ejercicio anterior y trabajando en aritmética de cuatro dígitos:

(a) La temperatura media del conducto viene dada por $\frac{1}{4}\int_0^4 T(x)\, dx$. Aproximarla usando el polinomio de interpolación obtenido anteriormente, y a continuación, usando el polinomio de aproximación de grado uno.

(b) Aproximar también la temperatura media usando la fórmula del trapecio. Tanto la última aproximación obtenida en el apartado anterior como la obtenida en éste se basan en la utilización de un polinomio de grado uno: justificar cuál de las dos ofrece *a priori* una mejor aproximación.

Ej. 21 — Sea la función $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + e^{-x}$.

(a) Encontrar el polinomio $g(x)$ de grado 1 que mejor aproxima a $f(x)$ en $[0, 1]$ utilizando aproximación continua. Calcular $g(1)$ y $g(0.25)$.

(b) Encontrar el polinomio $P(x)$ que interpola el valor de $f(x)$ en los nodos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.5$. Calcular $P(1)$ y $P(0.25)$.

Ej. 22 — Sea una fórmula de integración numérica

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(-1) + a_1 f(0) + a_2 f(1) + a_3 f(2).$$

(a) Deducir los coeficientes a_i de forma que sea lo más exacta posible, y explicitar su error de truncamiento.

(b) Estimar con ella $\int_0^2 \frac{1}{1+t^2} dt$ usando aritmética de cuatro dígitos y especificar el error cometido.

Ej. 23 — Sea la integral $\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + x - 3)dx$.

(a) Estimar su valor y el error cometido mediante la fórmula del trapecio.

(b) Estimar su valor y el error cometido mediante la fórmula de Simpson, comentando el resultado obtenido.

Ej. 24 — Sea la función $f(x) = 2^x$.

(a) Calcular su polinomio interpolador usando los valores de x del conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y establecer, a partir de dicho polinomio, el valor de $\sqrt{2}$.

(b) Aproximar la integral de la función mediante el método de Simpson compuesto a partir de los cinco puntos anteriormente calculados.

Ej. 25 — Los siguientes polinomios son los primeros de la serie conocida como familia de polinomios de Legendre:

$$1,\ x,\ \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),\ \ldots$$

(a) Comprobar que los polinomios anteriores son ortogonales en $[-1, 1]$.

(b) Utilizarlos para calcular el polinomio de aproximación mínimo-cuadrática de grado 3 para la función $\operatorname{sen}(\pi x)$ en $[-1, 1]$.

Ej. 26 — La siguiente tabla corresponde a la función $\cos(\pi x)$:

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 0.25$	$f(x_1) = 0.7071$
$x_2 = 0.5$	$f(x_2) = 0$

Trabajando en aritmética de 4 dígitos:

(a) Aproximar $\int_0^{1/2} \cos(\pi x)\, dx$ utilizando la regla de Simpson y acotar el error cometido.

(b) Aproximar $\int_0^{1/2} \cos(\pi x)\, dx$ utilizando la regla del trapecio compuesta y acotar el error cometido.