2. Introducción a los Métodos Numéricos

Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

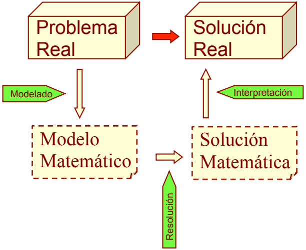
Mª Luz Muñoz Ruiz
José Manuel González Vida
Francisco José Palomo Ruiz
Francisco Joaquín Rodríguez Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Índice

1. Introducción
2. Resolución de ecuaciones
   - Introducción
   - Métodos de intervalos encajados
   - Métodos de punto fijo
3. Interpolación y aproximación polinómica
   - Introducción
   - Interpolación polinómica
   - Aproximación mínimo-cuadrática
4. Derivación e integración numérica
   - Introducción
   - Derivación numérica
   - Integración numérica
5. Ejemplos

Resolución de problemas científico-tecnológicos



Definiciones

- Llamaremos **modelo matemático** a un conjunto de ecuaciones con datos e incógnitas que describen algún problema real.
- Llamaremos **métodos numéricos** a las técnicas y algoritmos que se utilizan para obtener valores numéricos como solución a un problema matemático.
- El **análisis numérico** es la disciplina que se ocupa de la descripción y análisis de los métodos numéricos.

Factores a considerar en la resolución de problemas

- Errores de redondeo:
  - Reales de punto flotante (errores de medida y errores de representación).
  - Aritmética de punto flotante (manipulación de datos).
- Errores de truncamiento:
  - Antes de empezar los cálculos (discretización del método continuo).
  - Después de empezar (detención del proceso iterativo).
- Análisis de estabilidad:
  - **Problemas mal condicionados o inestables**, en que pequeñas variaciones en los datos producen grandes variaciones en los resultados, independientemente del método que se utilice para su resolución.
  - **Métodos mal condicionados o inestables**, que en ocasiones pueden producir malos resultados, por tener como entrada ciertos datos o por cómo se manipulan éstos.

Índice

1. Introducción
2. Resolución de ecuaciones
   - Introducción
   - Métodos de intervalos encajados
   - Métodos de punto fijo
3. Interpolación y aproximación polinómica
   - Introducción
   - Interpolación polinómica
   - Aproximación mínimo-cuadrática
4. Derivación e integración numérica
   - Introducción
   - Derivación numérica
   - Integración numérica
5. Ejemplos

Preliminares

Definición

Se dice que x^* es una **raíz** de f si

$$f(x^*) = 0.$$

Para buscar una raíz x^* construiremos una sucesión de aproximaciones x_n.

Esperamos que $x_n \to_{n\to\infty} x^*$. En tal caso, diremos que el método converge.

Si un método converge, cabe preguntarse con qué rapidez lo hace.

Ejemplo 1

Definiciones

Definición

Se dice que una sucesión x_n converge a x^* con **orden de convergencia** $\tau \geq 1$ y **constante de error asintótico** λ, y se denota por $x_n \xrightarrow{\lambda}_{\tau} x^*$, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\tau}} = \lambda,$$

con $e_n = x^* - x_n$.

Según el valor de τ, se dice que el orden es:

- **Lineal**, si $\tau = 1$.
- **Superlineal**, si $1 < \tau < 2$.
- **Cuadrático**, si $\tau = 2$.
- **Cúbico**, si $\tau = 3$.

Se puede establecer una relación entre el orden y la rapidez de convergencia. Si $x_n \xrightarrow{\lambda}_{\tau} x^*$ y $\hat{x}_n \xrightarrow{\hat{\lambda}}_{\hat{\tau}} x^*$, entonces:

- Si $\hat{\tau} > \tau$, $\hat{x}_n$ converge más rápido que x_n.
- Si $\hat{\tau} = \tau$ y $\hat{\lambda} < \lambda$, $\hat{x}_n$ converge más rápido que x_n.

Índice

1. Introducción
2. Resolución de ecuaciones
   - Introducción
   - Métodos de intervalos encajados
   - Métodos de punto fijo
3. Interpolación y aproximación polinómica
   - Introducción
   - Interpolación polinómica
   - Aproximación mínimo-cuadrática
4. Derivación e integración numérica
   - Introducción
   - Derivación numérica
   - Integración numérica
5. Ejemplos

Preliminares

Los métodos de intervalos encajados se basan en el teorema de Bolzano.

Teorema de Bolzano

Sea $f \in C([a,b])$ y tal que $f(a)\,f(b) < 0$.
Entonces existe al menos un $x^* \in (a,b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

El teorema se utiliza para mantener en todo momento la raíz dentro de un intervalo de longitud cada vez menor, por lo que estos métodos convergen, aunque son en general algo lentos.

Método de bipartición

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, partimos de un intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ tal que $f(a_n)\,f(b_n) < 0$, con $I_0 = [a, b]$, y calculamos el punto medio

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

que divide el intervalo en dos subintervalos iguales de longitud $l_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Entonces escogemos de éstos el que contiene a la raíz y reiteramos el proceso (a menos que, casualmente, $f(x_{n+1}) = 0$).

El error cometido al aproximar la raíz x^* de f por x_n es $|e_n| = |x^* - x_n| \leq l_n$. Como $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$, este método converge siempre. De hecho, es un método de orden 1 con constante de error asintótico $\lambda = 1/2$.

Ejemplo 2

Método de regula falsi

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, partimos de un intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ tal que $f(a_n)\, f(b_n) < 0$, con $I_0 = [a, b]$, y construimos la recta que pasa por $(a_n, f(a_n))$ y $(b_n, f(b_n))$ y calculamos su punto de corte con el eje de abcisas,

$$x_{n+1} = \frac{a_n\, f(b_n) - b_n\, f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)},$$

que divide el intervalo en dos subintervalos.

Entonces, escogemos de éstos el que contiene a la raíz y reiteramos el proceso (a menos que, casualmente, $f(x_{n+1}) = 0$).

Este método también converge siempre. Es lineal, al igual que el de bipartición, aunque algo más rápido en general.

Ejemplo 3

Índice

1. Introducción
2. Resolución de ecuaciones
   - Introducción
   - Métodos de intervalos encajados
   - Métodos de punto fijo
3. Interpolación y aproximación polinómica
   - Introducción
   - Interpolación polinómica
   - Aproximación mínimo-cuadrática
4. Derivación e integración numérica
   - Introducción
   - Derivación numérica
   - Integración numérica
5. Ejemplos

Preliminares

Los métodos de punto fijo se basan en expresar la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $g(x) = x$, de modo que los ceros de f coincidan con los puntos fijos de g.

Definición

Se dice que x^* es un **punto fijo** de g si

$$g(x^*) = x^*.$$

Un **método de punto fijo** para aproximar x^* consiste en escoger un x_0 inicial y construir la sucesión

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

Estos métodos son en general más rápidos que los de intervalos encajados, pero su convergencia no está garantizada. Hay que considerar qué valor tomar como punto inicial, la convergencia o no, la velocidad de convergencia, etc.

En general, los métodos de intervalos encajados sirven como inicio, esto es, para obtener un punto inicial para un método de punto fijo.

Ejemplo 4

Método de Newton

Partiendo de un x_0 inicial, para $n = 1, 2, \ldots$, construimos la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_n, f(x_n))$, y calculamos su punto de corte con el eje de abcisas,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Observaciones

- Es un método de los que se dicen unipunto: $x_{n+1} = g(x_n)$.
- Converge localmente con orden de convergencia 2 y constante de error asintótico $\lambda = \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|$, siempre que la raíz sea simple.
- No converge si, para algún n, $f'(x_n) = 0$, o bien la derivada se aproxima a cero cerca de la raíz.

Ejemplo 5

Método de la secante

Partiendo de un x_0 y un x_1 inicial, para $n = 2, 3, \ldots$, construimos la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$, y calculamos su punto de corte con el eje de abcisas (lo que equivale a sustituir la derivada en el método de Newton por un cociente incremental),

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Observaciones

- Es un método multipunto, en concreto, bipunto: $x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$.
- Si $f \in C^2([a,b])$ y $f'(x^*) \neq 0$, converge localmente, con orden superlineal.
- Se diferencia con el de la regula falsi en que la raíz no tiene por qué mantenerse dentro del intervalo considerado.

Ejemplo 6

Índice

1 Introducción

2 Resolución de ecuaciones
- Introducción
- Métodos de intervalos encajados
- Métodos de punto fijo

3 Interpolación y aproximación polinómica
- Introducción
- Interpolación polinómica
- Aproximación mínimo-cuadrática

4 Derivación e integración numérica
- Introducción
- Derivación numérica
- Integración numérica

5 Ejemplos

Preliminares

Supongamos que partimos de una función f de la que sólo conocemos su valor en un conjunto de nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, esto es, sólo sabemos que su gráfica pasa por los puntos del plano $(x_i, f(x_i)),\ i = 0, 1, \ldots, n$.

La **interpolación polinómica** consiste en buscar un polinomio $P_n(x)$, de grado menor o igual que n, que coincida con f en esos nodos y que nos sirva para aproximar su valor en otros puntos.

Por supuesto, también se interesa por acotar el error cometido al aproximar el valor de la función en un punto por el valor del polinomio en ese punto.

Preliminares

En otras ocasiones en que, o bien se conoce de f únicamente su valor un conjunto de puntos x_i, $i = 0, \ldots, m$, proveniente por ejemplo de datos experimentales, o bien se conoce f explícitamente en todo un intervalo $[a, b]$, pero su evaluación directa no es eficiente, nos conformamos con encontrar una función φ que aproxime *lo mejor posible* a f.

De hecho, si los datos contienen errores de medida, es más razonable buscar una función que se ajuste lo más posible a esos datos que una que coincida exactamente con ellos.

En la **aproximación mínimo-cuadrática**, la función que aproxima *lo mejor posible* a la de partida es la que hace mínima la norma 2 del error cometido al considerar esa aproximación.

Índice

1. Introducción
2. Resolución de ecuaciones
   - Introducción
   - Métodos de intervalos encajados
   - Métodos de punto fijo
3. Interpolación y aproximación polinómica
   - Introducción
   - Interpolación polinómica
   - Aproximación mínimo-cuadrática
4. Derivación e integración numérica
   - Introducción
   - Derivación numérica
   - Integración numérica
5. Ejemplos

Preliminares

Si consideramos la base canónica del conjunto de polinomios de grado n, esto es, la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, el polinomio $P_n(x)$ que buscamos se escribe en la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Como queremos que $P_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$, para encontrar los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ hemos de resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

La matriz de coeficientes anterior es una matriz de Vandermonde, cuyo determinante viene dado por $\prod_{j<k}(x_j - x_k)$. Por tanto, si todos los nodos son distintos, dicho determinante es distinto de cero, y el sistema anterior tiene una única solución.

Definiciones

Definición

Dado un conjunto de $n+1$ puntos del plano $(x_i, f(x_i)),\ i = 0, 1, \ldots, n$, se llama **polinomio de interpolación** asociado a esos puntos al único polinomio de grado menor o igual que n que pasa por esos puntos.

Observaciones

- Aunque acabamos de demostrar la existencia y unicidad del polinomio de interpolación, lo que sí encontraremos es distintos modos de expresarlo y distintos métodos para calcularlo.
- El error cometido al aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$ se puede expresar como

$$e_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

con ξ entre el mayor y el menor de los nodos.

Ejemplo 7

Interpolación de Lagrange

Definición

Dado un conjunto de $n+1$ puntos del plano $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$, se llama **polinomios de base de Lagrange** a los polinomios

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Observaciones

- Los polinomios de base de Lagrange constituyen una base del conjunto de polinomios de grado n que satisface

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i, \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- El polinomio de interpolación se puede escribir entonces como

$$P_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x).$$

Ejemplo 8

Interpolación de Newton

Definición

Se llama **diferencias divididas** a los coeficientes

$$f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i] = \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i] - f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_j}.$$

Observaciones

- Las diferencias divididas anteriores se pueden calcular usando el esquema

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_0]$			
				$f[x_0,x_1]$		
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
				$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
				$f[x_2,x_3]$		
3	x_3	$f(x_3)$	$f[x_3]$			

- El polinomio de interpolación se puede escribir entonces como

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1]\cdot(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1) + \ldots$$
$$\ldots + f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}).$$

▸ Ejemplo 9

Índice

1 Introducción

2 Resolución de ecuaciones
- Introducción
- Métodos de intervalos encajados
- Métodos de punto fijo

3 Interpolación y aproximación polinómica
- Introducción
- Interpolación polinómica
- Aproximación mínimo-cuadrática

4 Derivación e integración numérica
- Introducción
- Derivación numérica
- Integración numérica

5 Ejemplos

Preliminares

Buscaremos la función de aproximación $\varphi(x)$ en el conjunto de funciones generado por una base $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$, por lo que tendrá la forma

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x).$$

A este tipo de función $\varphi(x)$ se la llama **ajuste lineal**, por ser combinación lineal de los elementos de $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$.

Si $\varphi(x)$ es una función polinómica (utilicemos o no como base del conjunto de polinomios la canónica) se habla de **aproximación polinómica**, si $\varphi(x)$ es una función del conjunto generado por

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos((n-1)x), \sin((n-1)x), \cos(nx)\}$$

se habla de **aproximación trigonométrica**, etc.

Definiciones

Definiciones

- Si la información conocida de f es su valor un conjunto de puntos x_i, $i = 0, \ldots, m$, hablaremos de **aproximación discreta**.
- Si se conoce la función f explícitamente en todo un intervalo $[a, b]$ hablaremos de **aproximación continua**.

Aproximación mínimo-cuadrática discreta

Al aproximar una nube de puntos $\{(x_i, f(x_i)),\ i = 0, \ldots, m\}$, por una función $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$, el error cometido viene dado por el vector $e = (e(x_0), \ldots, e(x_m))$, con $e(x_i) = f(x_i) - \varphi(x_i)$, $i = 0, \ldots, m$.
La función φ que mejor aproxima en el sentido de los mínimos cuadrados a la nube de puntos es la que hace mínima la norma 2 del error:

$$\|e\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{m} |e(x_i)|^2 \right)^{1/2},$$

o equivalentemente, la que hace mínimo $S = \|e\|_2^2$:

$$S = \sum_{i=0}^{m} (f(x_i) - \varphi(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{m} (f(x_i) - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + \ldots + a_n\varphi_n(x_i)))^2 .$$

Como la derivada parcial de S respecto a cada una de las incógnitas a_k, $k = 0, \ldots, n$, ha de ser nula, se tienen las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = (-2) \sum_{i=0}^{m} (f(x_i) - (a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + \ldots + a_n\varphi_n(x_i)))\, \varphi_k(x_i) = 0,$$

o equivalentemente,

$$a_0 \sum_{i=0}^{m} \varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i) + a_1 \sum_{i=0}^{m} \varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i) + \ldots + a_n \sum_{i=0}^{m} \varphi_n(x_i)\varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\varphi_k(x_i).$$

Aproximación mínimo-cuadrática discreta

El conjunto de ecuaciones resultantes se puede expresar matricialmente como un sistema $Ga = z$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m}\varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) & \sum_{i=0}^{m}\varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) & \ldots & \sum_{i=0}^{m}\varphi_n(x_i)\varphi_0(x_i) \\ \sum_{i=0}^{m}\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum_{i=0}^{m}\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) & \ldots & \sum_{i=0}^{m}\varphi_n(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}\varphi_0(x_i)\varphi_n(x_i) & \sum_{i=0}^{m}\varphi_1(x_i)\varphi_n(x_i) & \ldots & \sum_{i=0}^{m}\varphi_n(x_i)\varphi_n(x_i) \end{pmatrix}}_{G} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\varphi_0(x_i) \\ \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\varphi_1(x_i) \end{pmatrix}}_{z}$$

Aproximación mínimo-cuadrática discreta

Observaciones

Si consideramos $\varphi_k(x) = x^k$, la matriz G y el vector z vienen dados por

$$g_{kj} = \sum_{i=0}^{m} x_i^{j+k}, \quad z_k = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)x_i^k.$$

- Si todos los x_i son distintos, G, además de simétrica, es definida positiva y se tiene asegurada la existencia de la solución única.
- Los cálculos para obtener el mejor polinomio de grado a lo sumo n no sirven para obtener el de grado a lo sumo $n+1$.
- Para valores grandes de m el problema de resolver $Ga = z$ está mal condicionado.

Aproximación mínimo-cuadrática discreta

Observación

El sistema $Ga = z$ puede escribirse como

$$\underbrace{M^tM}_{G}\, a = \underbrace{M^t y}_{z},$$

siendo $m_{kj} = \varphi_j(x_k)$, $y_k = f(x_k)$.
El sistema $Ma = y$ es un sistema sobredeterminado:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \dots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{pmatrix}}_{y}$$

Si G es regular, el vector a que minimiza la norma 2 del residuo $r = y - Ma$ es la solución del sistema $Ga = z$.

Ejemplo 10

Aproximación mínimo-cuadrática continua

Al aproximar una función $f(x)$, $x \in [a,b]$, por una función $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$, el error cometido viene dado por la función $e(x) = f(x) - \varphi(x)$, $x \in [a,b]$.
La función φ que mejor aproxima en el sentido de los mínimos cuadrados a la función dada es la que hace mínima la norma 2 del error:

$$\|e\|_2 = \left(\int_a^b |e(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

o equivalentemente, la que hace mínimo $S = \|e\|_2^2$:

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi_(x))^2 dx = \int_a^b \left(f(x) - (a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x))\right)^2 dx.$$

Como la derivada parcial de S respecto a cada una de las incógnitas a_k, $k = 0, \ldots, n$, ha de ser nula, se tienen las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = (-2)\int_a^b \left(f(x) - (a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x))\right)\varphi_k(x)dx = 0,$$

o equivalentemente,

$$a_0\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_k(x)dx + a_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_k(x)dx + \ldots + a_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx.$$

Aproximación mínimo-cuadrática continua

El conjunto de ecuaciones resultantes se puede expresar matricialmente como un sistema $Ga = z$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_0(x)dx & \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_0(x)dx & \dots & \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_0(x)dx \\ \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_1(x)dx & \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_1(x)dx & \dots & \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_1(x)dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_n(x)dx & \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_n(x)dx & \dots & \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)dx \end{pmatrix}}_{G} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} \int_a^b f(x)\varphi_0(x)dx \\ \int_a^b f(x)\varphi_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \end{pmatrix}}_{z}$$

Ejemplo 11

Aproximación mínimo-cuadrática continua

Observaciones

Si consideramos $\varphi_k(x) = x^k$, la matriz G y el vector z vienen dados por

$$g_{kj} = \int_a^b x^{j+k} dx, \quad z_k = \int_a^b f(x) x^k dx.$$

- La matriz G, además de simétrica, es regular y se tiene asegurada la existencia de solución única.
- Los cálculos para obtener el mejor polinomio de grado a lo sumo n no sirven para obtener el de grado a lo sumo $n+1$.
- El problema de resolver $Ga = z$ está mal condicionado y no se pueden obtener soluciones precisas ni siquiera con técnicas de pivotaje.

Aproximación mínimo-cuadrática continua

Observación

Si el conjunto de funciones $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ es ortogonal, se resuelve el mal condicionamiento del problema, ya que G pasa a ser una matriz diagonal con

$$g_{kk} = \int_a^b \varphi_k^2(x)dx, \quad z_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx,$$

y el sistema se resuelve directamente por sustitución diagonal, resultando:

$$a_k = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x)dx}.$$

Además, por ser G diagonal, el a_k calculado para $\varphi_k(x)$ no varía si se añade $\varphi_{n+1}(x)$.

Aproximación trigonométrica

Dado un conjunto de datos $\{(x_r, f(x_r)),\ r = 0, \ldots, 2n-1\}$, con nodos equiespaciados entre $x_0 = 0$ y $x_{2n} = 2\pi$ (esto es, $x_r = 2\pi r/2n,\ r = 0, \ldots, 2n-1$) y f una función periódica de periodo 2π, queremos ajustar un polinomio trigonométrico de la forma

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{2k-1}\cos(kx) + a_{2k}\operatorname{sen}(kx)) + a_{2n-1}\cos(nx), \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

Los $2n$ coeficientes a_r se pueden determinar a partir del sistema

$$\varphi(x_r) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{2k-1}\cos(kx_r) + a_{2k}\operatorname{sen}(kx_r)) + a_{2n-1}\cos(nx_r) = f(x_r), \quad r = 0, \ldots, 2n-1.$$

Aproximación trigonométrica

Si $2n$, además de par, es potencia de 2, usando la exponencial compleja

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta),$$

se pueden calcular los coeficientes

$$c_k = \sum_{r=0}^{2n-1} f(x_r) e^{-ikx_r}, \quad k = 0, \ldots, 2n-1,$$

(ayudándonos de que $c_{2n-k} = \overline{c_k}$), y a partir de ellos,
los coeficientes a_k, $k = 0, \ldots, 2n-1$, mediante las fórmulas

$$a_0 = \frac{c_0}{2n}, \quad a_{2n-1} = \frac{c_n}{2n}, \quad a_{2k-1} = \frac{c_k + c_{2n-k}}{2n}, \quad a_{2k} = \frac{c_k - c_{2n-k}}{2n}\, i, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Aproximación trigonométrica

Observaciones

- La obtención de los coeficientes c_k a partir de los valores de la función $f(x_r)$ se conoce como **transformada de Fourier discreta** o **DFT** (del inglés, *Discrete Fourier Transform*).
  La DFT se utiliza para *transformar* unas funciones en otras con las que sea más fácil realizar ciertas operaciones. Una vez efectuadas éstas, se cierra el proceso efectuando la transformación inversa.
- Se pueden recuperar los valores $f(x_r)$ a partir de los c_k, lo que corresponde a la **transformada de Fourier discreta inversa** o **IDFT** (*Inverse Discrete Fourier Transform*):

$$f(x_r) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} c_k e^{ikx_r}, \quad r = 0, \ldots, 2n-1.$$

Ejemplo 12

Aproximación trigonométrica

Observaciones

- En la práctica, la DFT (y la IDFT) puede ser calculada de forma eficiente utilizando el algoritmo de la **transformada rápida de Fourier** o **FFT** (*Fast Fourier Transform*).
  La FFT tiene una gran variedad de aplicaciones, desde el tratamiento digital de señales y el filtrado digital en general, hasta la resolución de ecuaciones en derivadas parciales o la multiplicación de grandes enteros en computación.
- Si f es periódica en un intervalo (a, b) distinto de $(0, 2\pi)$ se puede hacer un cambio de variable para pasar de uno a otro.

Índice

1 Introducción

2 Resolución de ecuaciones
- Introducción
- Métodos de intervalos encajados
- Métodos de punto fijo

3 Interpolación y aproximación polinómica
- Introducción
- Interpolación polinómica
- Aproximación mínimo-cuadrática

4 Derivación e integración numérica
- Introducción
- Derivación numérica
- Integración numérica

5 Ejemplos

Preliminares

Sea f una función de la que se conoce una tabla de valores $\{(x_i, f(x_i)),\ i = 0, \ldots, n\}$.

En la derivación numérica se pretende aproximar el valor de $f'(\alpha)$ y estimar el error cometido.

Encontramos un ejemplo de aproximación de la derivada de una función f en un punto x_0 si recordamos el modo en que se motiva el concepto de derivación:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

En la integración numérica lo que se pretende aproximar es el valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, además de estimar el error cometido.

Encontramos un ejemplo de aproximación de la integral de una función f en un intervalo $[a, b]$ si recordamos el modo en que se motiva el concepto de integración:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Índice

1 Introducción

2 Resolución de ecuaciones
- Introducción
- Métodos de intervalos encajados
- Métodos de punto fijo

3 Interpolación y aproximación polinómica
- Introducción
- Interpolación polinómica
- Aproximación mínimo-cuadrática

4 Derivación e integración numérica
- Introducción
- Derivación numérica
- Integración numérica

5 Ejemplos

Obtención de fórmulas

- **Desarrollo de Taylor.**
- **Derivación de una fórmula de interpolación:**

$$f(x) = P_n(x) + e_n(x) \quad \Rightarrow \quad f'(\alpha) = P_n'(\alpha) + e_n'(\alpha).$$

- **Método de los coeficientes indeterminados:** Se utiliza una fórmula

$$f'(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + E(f),$$

siendo $E(f)$ el error cometido al aproximar $f'(\alpha)$ por $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$. Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se determinan imponiendo que la fórmula sea exacta para los polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$, de lo que resulta el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\alpha \\ \vdots \\ n\alpha^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Para determinar el error de truncamiento, que se escribe como $E(f) = Kf^{n+1)}(\xi)$, con ξ entre el mayor y el menor de los nodos, hemos de determinar K, particularizando la fórmula para $f(x) = x^{n+1}$ (si $K = 0$ se prueba con $E(f) = Kf^{n+2)}(\xi)$ y $f(x) = x^{n+2}$, y así hasta obtener $K \neq 0$).

Ejemplos

- **Fórmulas descentradas de dos puntos:**

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2!}h, \quad x_0 < \xi < x_0 + h,$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2!}h, \quad x_0 - h < \xi < x_0.$$

- **Fórmula centrada de dos puntos:**

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{3!}h^2, \quad x_0 - h < \xi < x_0 + h.$$

Ejemplo 13

Índice

1. Introducción
2. Resolución de ecuaciones
   - Introducción
   - Métodos de intervalos encajados
   - Métodos de punto fijo
3. Interpolación y aproximación polinómica
   - Introducción
   - Interpolación polinómica
   - Aproximación mínimo-cuadrática
4. Derivación e integración numérica
   - Introducción
   - Derivación numérica
   - Integración numérica
5. Ejemplos

Obtención de fórmulas

- **Desarrollo de Taylor.**
- **Integración de una fórmula de interpolación:**

$$f(x) = P_n(x) + e_n(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b e_n(x)dx.$$

- **Método de los coeficientes indeterminados:** Se utiliza una fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + E(f),$$

siendo $E(f)$ el error cometido. Los coeficientes se determinan imponiendo que la fórmula sea exacta para $1, x, x^2, \ldots, x^n$, de lo que resulta el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ (b^3-a^3)/3 \\ \vdots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/(n+1) \end{pmatrix}.$$

Para determinar el error de truncamiento $E(f) = Kf^{n+1)}(\xi)$, con ξ entre el mayor y el menor de los nodos, hemos de determinar K, particularizando la fórmula para $f(x) = x^{n+1}$ (si $K = 0$ se prueba con $E(f) = Kf^{n+2)}(\xi)$ y $f(x) = x^{n+2}$, y así hasta obtener $K \neq 0$).

Ejemplos

- **Regla del punto medio:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

- **Regla del trapecio:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

- **Regla de Simpson:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{iv)}(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Observación

Cuando se dispone del valor de una función en un conjunto ”grande” de puntos y se pretende aproximar su integral usando toda la información disponible, de considerar el polinomio de interpolación correspondiente a los datos de la función e integrar éste se obtienen fórmulas del tipo de las anteriores, que utilizan más puntos. Pero suele ser más conveniente optar por una fórmula de integración compuesta.

Ejemplo 14

Ejemplos

- **Regla del punto medio compuesta:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{m+1}\sum_{j=0}^{m} f(x_{2j}) + \frac{(b-a)^3}{24(m+1)^2} f''(\xi), \quad a<\xi<b.$$

- **Regla del trapecio compuesta:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad a<\xi<b.$$

- **Regla de Simpson compuesta:**

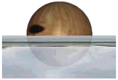
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6m}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{iv)}(\xi), \quad a<\xi<b.$$

Observación

Las **fórmulas de integración numérica compuestas** se obtienen al dividir el intervalo de integración en varios subintervalos en los que se aplica una fórmula simple.

Ejemplo 1

Supongamos que se sumerge en agua una esfera de radio $r = 10\ cm$, construida con un tipo de madera cuya densidad es $\rho = 0.638\ gr/cm^3$. ¿Cuánto vale la profundidad d a la que está sumergido el polo sur de la esfera?



La masa de la esfera viene dada por $M_e = 4\pi r^3\rho/3$. Y la masa M_a de agua desplazada cuando la esfera se sumerge es $M_a = \int_0^d \pi(r^2 - (x-r)^2)\ dx = \pi d^2(3r - d)/3$.

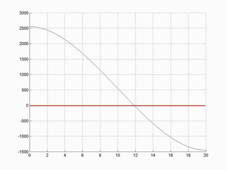
Aplicando el principio de Arquímedes obtenemos que $d^3 - 3d^2r + 4r^3\rho = 0$.

Por tanto, hemos de buscar *una* solución de la ecuación

$$d^3 - 30d^2 + 2552 = 0,$$

o lo que es lo mismo, *un* cero de la función

$$f(d) = d^3 - 30d^2 + 2552.$$



Observemos que, de hecho, nos interesa el que se encuentra cerca de $d = 12$.

Volver

Ejemplo 2

Aproximar la solución de la ecuación del Ejemplo 1 mediante tres iteraciones del método de bipartición, partiendo del intervalo $[10, 15]$, y acotar el error cometido al considerar dicha aproximación.

Como $f(10) > 0$ y $f(15) < 0$, por el teorema de Bolzano existe una raíz en ese intervalo, de modo que consideramos $[a_0, b_0] = [10, 15]$, y como primera aproximación y como cota del error cometido al considerarla, respectivamente:

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{10 + 15}{2} = 12.5000, \qquad l_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{15 - 10}{2} = 2.5000.$$

Como $f(12.5) < 0$, existe raíz entre 10 y 12.5, por lo que ahora consideramos el intervalo $[a_1, b_1] = [10, 12.5]$, y como segunda aproximación y cota del error cometido:

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{10 + 12.5}{2} = 11.2500, \qquad l_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{15 - 10}{2^2} = 1.2500.$$

Y como $f(11.25) > 0$, tomamos $[a_2, b_2] = [11.25, 12.5]$, y como tercera aproximación y cota del error:

$$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{11.25 + 12.5}{2} = 11.8750, \qquad l_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{15 - 10}{2^3} = 0.6250.$$

Ejemplo 3

Aproximar la solución de la ecuación del Ejemplo 1 mediante tres iteraciones del método de regula falsi, partiendo del intervalo $[10, 15]$.

Como $f(10) > 0$ y $f(15) < 0$, efectivamente podemos partir de $[a_0, b_0] = [10, 15]$, y la primera iteración será

$$x_1 = \frac{a_0\, f(b_0) - b_0\, f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{10\, f(15) - 15\, f(10)}{f(15) - f(10)} = 12.0073.$$

Como $f(12.0073) < 0$, ahora consideramos $[a_1, b_1] = [10, 12.0073]$, y la segunda iteración es

$$x_2 = \frac{a_1\, f(b_1) - b_1\, f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{10\, f(12.0073) - 12.0073\, f(10)}{f(12.0073) - f(10)} = 11.8650.$$

Y como $f(11.8650) < 0$, $[a_2, b_2] = [10, 11.8650]$, y

$$x_3 = \frac{a_2\, f(b_2) - b_2\, f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = \frac{10\, f(11.8650) - 11.8650\, f(10)}{f(11.8650) - f(10)} = 11.8616.$$

Volver

Ejemplo 4

Proponer dos métodos de punto fijo distintos para aproximar la solución de la ecuación del Ejemplo 1 y realizar tres iteraciones con cada uno de ellos, partiendo de 10 como valor inicial.

Recordemos que la ecuación es $\underbrace{x^3 - 30x^2 + 2552}_{f(x)} = 0$.

Algunas de las infinitas opciones posibles son:

Opción 1. Podemos, simplemente, sumar x a cada lado, con lo que queda:

$$x = \underbrace{x^3 - 30x^2 + x + 2552}_{g(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_0 = 10, \\ x_1 = 562, \\ x_2 = 168032122, \\ x_3 = 4.7444 \cdot 10^{24}. \end{cases}$$

Parece claro que podemos asumir que este método no converge a la solución.

Volver

Ejemplo 4 (continuación)

Opción 2. Podemos “despejar” la x que aparece al cuadrado:

$$x = \underbrace{\sqrt{\frac{x^3 + 2552}{30}}}_{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 10, \\ x_1 = 10.8812, \\ x_2 = 11.3142, \\ x_3 = 11.5475. \end{cases}$$

Parece que este método sí converge.

Opción 3. Podemos “despejar” la x que aparece al cubo:

$$x = \underbrace{\sqrt[3]{30x^2 - 2552}}_{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 10, \\ x_1 = 7.6517, \\ x_2 = 4.6329 + 8.0245i, \\ x_3 = 10.5766 + 12.5819i. \end{cases}$$

Este método tampoco converge a la solución.

Volver

Ejemplo 4 (continuación)

Opción 4. Podemos dividir toda la ecuación por $2x^2$ y después sumar x a cada lado:

$$x = \underbrace{\frac{3}{2}x - 15 + \frac{1276}{x^2}}_{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 10, \\ x_1 = 12.7600, \\ x_2 = 11.9770, \\ x_3 = 11.8607. \end{cases}$$

Este método sí converge a la solución buscada.

Volver

Ejemplo 5

Aproximar la solución de la ecuación del Ejemplo 1 mediante tres iteraciones del método de Newton, partiendo de 10 como valor inicial.

Para esta ecuación, el método de Newton viene dado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 30x_n^2 + 2552}{3x_n^2 - 60x_n},$$

de modo que al iterar obtenemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 10, \\ x_1 &= x_0 - \frac{x_0^3 - 30x_0^2 + 2552}{3x_0^2 - 60x_0} = 11.8400, \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^3 - 30x_1^2 + 2552}{3x_1^2 - 60x_1} = 11.8615, \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2^3 - 30x_2^2 + 2552}{3x_2^2 - 60x_2} = 11.8615. \end{aligned}$$

Volver

Ejemplo 6

Aproximar la solución de la ecuación del Ejemplo 1 mediante tres iteraciones del método de la secante, partiendo de 10 y 15 como valores iniciales.

Para esta ecuación, el método de la secante es

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\,f(x_n) - x_n\,f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

así que al iterar obtenemos:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 10,\ x_1 = 15,\\
x_2 &= \frac{x_0\,f(x_1) - x_1\,f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 12.0073,\\
x_3 &= \frac{x_1\,f(x_2) - x_2\,f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 11.8460,\\
x_4 &= \frac{x_2\,f(x_3) - x_3\,f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} = 11.8615.
\end{aligned}$$

(Al pedir el ejercicio realizar tres iteraciones llegamos hasta x_4).

Ejemplo 7

Para $f(x) = \cos x$, encontrar el polinomio de interpolación correspondiente a los nodos $x_0 = 0,\ x_1 = \pi/6,\ x_2 = \pi/3$, utilizarlo para aproximar el valor de $\cos(\pi/5)$ y acotar el error cometido al considerar dicha aproximación.

Nuestra tabla de valores es:

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = \pi/6$	$f(x_1) = \sqrt{3}/2$
$x_2 = \pi/3$	$f(x_2) = 1/2$

y el sistema a resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & \pi/6 & (\pi/6)^2 \\ 1 & \pi/3 & (\pi/3)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ -0.0343 \\ -0.4232 \end{pmatrix}.$$

El polinomio de interpolación es pues

$$P_2(x) = 1 - 0.0343x - 0.4232x^2,$$

y la aproximación que buscamos:

$$\cos(\pi/5) = f(\pi/5) \approx P_2(\pi/5) = 0.8114.$$

Ejemplo 7 (continuación)

Respecto al error cometido,

$$
\begin{aligned}
|e_2(x)| &= \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right| \\
&= \left| \frac{-\operatorname{sen} \xi}{3!}(x-0)(x-\pi/6)(x-\pi/3) \right| \\
&\leq \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{3}}{2} \left| x(x-\pi/6)(x-\pi/3) \right|,
\end{aligned}
$$

ya que ξ está entre 0 y $\pi/3$.
Entonces

$$
|e_2(\pi/5)| \leq \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{3}}{2} \left| \pi/5(\pi/5-\pi/6)(\pi/5-\pi/3) \right| = 0.0040.
$$

Volver

Ejemplo 8

Calcular el polinomio de interpolación correspondiente a los datos del Ejemplo 7 utilizando los polinomios de base de Lagrange.

En este caso los polinomios de base de Lagrange son:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-\pi/6)(x-\pi/3)}{(0-\pi/6)(0-\pi/3)} = \frac{(x-\pi/6)(x-\pi/3)}{(\pi/6)(\pi/3)},$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\pi/3)}{(\pi/6-0)(\pi/6-\pi/3)} = \frac{x(x-\pi/3)}{(\pi/6)(\pi/6-\pi/3)},$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-\pi/6)}{(\pi/3-0)(\pi/3-\pi/6)} = \frac{x(x-\pi/6)}{(\pi/3)(\pi/3-\pi/6)}.$$

Entonces el polinomio de interpolación es

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= 1\frac{(x-\pi/6)(x-\pi/3)}{(\pi/6)(\pi/3)} + (\sqrt{3}/2)\frac{x(x-\pi/3)}{(\pi/6)(\pi/6-\pi/3)} + (1/2)\frac{x(x-\pi/6)}{(\pi/3)(\pi/3-\pi/6)}, \end{aligned}$$

y

$$\cos(\pi/5) = f(\pi/5) \approx P_2(\pi/5) = 0.8114.$$

Ejemplo 9

Calcular el polinomio de interpolación correspondiente a los datos del Ejemplo 7 utilizando el esquema de Newton para el cálculo de las diferencias divididas.

Rellenamos el esquema:

$$
\begin{array}{l|llll}
x_0 = 0 & f[x_0] = 1 & & & \\
 & & f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = -0.2559 & & \\
x_1 = \pi/6 & f[x_1] = \sqrt{3}/2 & & f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = -0.4232 \\
 & & f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = -0.6991 & & \\
x_2 = \pi/3 & f[x_2] = 1/2 & & &
\end{array}
$$

El polinomio de interpolación es

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&= 1 - 0.2559(x-0) - 0.4232(x-0)(x-\pi/6) \\
&= 1 - 0.2559x - 0.4232x(x-\pi/6),
\end{aligned}
$$

y

$$\cos(\pi/5) = f(\pi/5) \approx P_2(\pi/5) = 0.8114.$$

Ejemplo 10

Supongamos que se desea encontrar la parábola $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ que mejor aproxima en el sentido de los mínimos cuadrados a los datos de la siguiente tabla:

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 2$	$f(x_1) = 3$
$x_2 = 3$	$f(x_2) = 3$
$x_3 = 5$	$f(x_3) = 5$
$x_4 = 6$	$f(x_4) = 4$

Siendo $a = (a_0, a_1, a_2)^t$, escribir el sistema sobredeterminado $Ma = y$ y el sistema compatible determinado $Ga = z$.

La matriz de coeficientes y el término independiente del sistema sobredeterminado son, respectivamente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 10 (continuación)

A partir de ellos podemos construir fácilmente G y z:

$$G = M^t M = \begin{pmatrix} 5 & 16 & 74 \\ 16 & 74 & 376 \\ 74 & 376 & 2018 \end{pmatrix}, \qquad z = M^t y = \begin{pmatrix} 16 \\ 64 \\ 308 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo cualquiera de estos dos sistemas (mejor el sobredeterminado si fuese un sistema grande, para evitar el mal condicionamiento) tenemos que

$$a = \begin{pmatrix} 0.9524 \\ 1.1429 \\ -0.0952 \end{pmatrix},$$

luego

$$\varphi(x) = 0.9524 + 1.1429x - 0.0952x^2.$$

Volver

Ejemplo 11

Encontrar el polinomio de aproximación mínimo-cuadrática de grado 2 para la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[0,1]$.

Hemos de resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 1\,dx & \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2\,dx \\ \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2\,dx & \int_0^1 x^3\,dx \\ \int_0^1 x^2\,dx & \int_0^1 x^3\,dx & \int_0^1 x^4\,dx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 1 \cdot sen(\pi x)\,dx \\ \int_0^1 x \cdot sen(\pi x)\,dx \\ \int_0^1 x^2 \cdot sen(\pi x)\,dx \end{pmatrix}.$$

Calculando las integrales resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ \left(\pi^2 - 4\right)/\pi^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0505 \\ 4.1225 \\ -4.1225 \end{pmatrix},$$

así que el polinomio de aproximación es $\varphi(x) = -0.0505 + 4.1225x - 4.1225x^2$.

Volver

Ejemplo 12

Calcular la transformada de Fourier discreta para los datos $(2, -1, 1, 4)^t$.

En este caso $2n = 4$ (que además de par es múltiplo de 2), y entonces $n = 2$ y $x_r = \frac{2\pi r}{2n}$, $r = 0, \ldots, 3$, así que estamos trabajando con una tabla de valores

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 2$
$x_1 = \pi/2$	$f(x_1) = -1$
$x_2 = \pi$	$f(x_2) = 1$
$x_3 = 3\pi/2$	$f(x_3) = 4$

Como

$$c_k = \sum_{r=0}^{3} f(x_r) e^{-ikx_r} = 2 \cdot e^{-i \cdot k \cdot 0} + (-1) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \pi/2} + 1 \cdot e^{-i \cdot k \cdot \pi} + 4 \cdot e^{-i \cdot k \cdot 3\pi/2},$$

para $k = 0, \ldots, 3$, se tiene:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 2 \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot 0} + (-1) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot \pi/2} + 1 \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot \pi} + 4 \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot 3\pi/2} = 6,\\
c_1 &= 2 \cdot e^{-i \cdot 1 \cdot 0} + (-1) \cdot e^{-i \cdot 1 \cdot \pi/2} + 1 \cdot e^{-i \cdot 1 \cdot \pi} + 4 \cdot e^{-i \cdot 1 \cdot 3\pi/2} = 1 + 5i,\\
c_2 &= 2 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot 0} + (-1) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi/2} + 1 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi} + 4 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot 3\pi/2} = 0,\\
c_3 &= 2 \cdot e^{-i \cdot 3 \cdot 0} + (-1) \cdot e^{-i \cdot 3 \cdot \pi/2} + 1 \cdot e^{-i \cdot 3 \cdot \pi} + 4 \cdot e^{-i \cdot 3 \cdot 3\pi/2} = 1 - 5i,
\end{aligned}$$

donde fijémonos que $c_3 = \overline{c_1}$, por lo que nos podíamos ahorrar su cálculo.

Ejemplo 13

La siguiente tabla recoge la temperatura a distintas distancias de uno de los extremos de un conducto de metal de 4 metros de longitud:

x_i	0	1	2	3	4
$T(x_i)$	50	48	44	38	30

Aproximar el valor de $T'(2)$ y $T'(2.5)$ utilizando la fórmula de derivación centrada, y el valor de $T'(0)$ y $T'(4)$ mediante una fórmula de derivación descentrada.

Consideramos las aproximaciones

$$\begin{aligned}
T'(2) &\approx \frac{T(3)-T(1)}{3-1} = \frac{38-48}{2} = -5,\\
T'(2.5) &\approx \frac{T(3)-T(2)}{3-2} = \frac{38-44}{1} = -6,\\
T'(0) &\approx \frac{T(1)-T(0)}{1-0} = \frac{48-50}{1} = -2,\\
T'(4) &\approx \frac{T(4)-T(3)}{4-3} = \frac{30-38}{1} = -8.
\end{aligned}$$

Ejemplo 14

Aproximar el valor de $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \, dx$ utilizando la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson, y acotar el error cometido en cada caso.

Utilizando la regla del punto medio tenemos que

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \, dx \approx (\pi/4) f\left(\frac{0+\pi/4}{2}\right) = (\pi/4) \operatorname{sen}(\pi/8) = 0.3006.$$

El error cometido se acota por

$$|E(f)| = \left| -\frac{(\pi/4-0)^3}{24} \operatorname{sen} \xi \right| \leq \frac{(\pi/4)^3}{24} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.0143,$$

al estar ξ entre 0 y $\pi/4$.

Volver

Ejemplo 14 (continuación)

Utilizando la regla del trapecio obtenemos la aproximación:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \, dx \approx \frac{\pi/4 - 0}{2} \left(f(0) + f(\pi/4) \right) = (\pi/8) \left(\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen}(\pi/4) \right) = 0.2777.$$

Acotemos el error cometido en este caso:

$$|E(f)| = \left| \frac{(\pi/4 - 0)^3}{12} \operatorname{sen} \xi \right| \leq \frac{(\pi/4)^3}{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.0285,$$

al estar ξ entre 0 y $\pi/4$.

Volver

Ejemplo 14 (continuación)

Utilizando la regla de Simpson obtenemos:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \, dx \approx \frac{\pi/4 - 0}{6} \left(f(0) + 4f\left(\frac{0 + \pi/4}{2}\right) + f(\pi/4) \right)$$
$$= (\pi/24)\,(\operatorname{sen} 0 + 4 \operatorname{sen}(\pi/8) + \operatorname{sen}(\pi/4)) = 0.2929.$$

Acotemos el error cometido:

$$|E(f)| = \left| -\frac{(\pi/4 - 0)^5}{2880} \operatorname{sen} \xi \right| \leq \frac{(\pi/4)^5}{2880} \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.7580 \cdot 10^{-4},$$

al estar ξ entre 0 y $\pi/4$.

Volver