Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Relación de ejercicios
3. Ampliación de EDO. Resolución numérica

Ej. 1 — Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{x}, \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

(a) Calcular $y(3)$ usando los métodos de Euler y del punto medio, con paso $h = 1$ en ambos casos.

(b) Sabiendo que la solución exacta es $y(x) = 3/x$, indicar cuál de los dos métodos proporciona una aproximación mejor.

Ej. 2 — Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \left(\dfrac{y(x)}{x}\right)^2, \\ y(2) = 2. \end{cases}$$

(a) Calcular $y(5)$ usando los métodos de Euler y de Euler modificado, con paso $h = 1$ en ambos casos.

(b) Sabiendo que la solución exacta es $y(x) = x$, indicar cuál de los dos métodos proporciona una aproximación mejor.

Ej. 3 — Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -x \cdot y(x)^2, \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

(a) Calcular $y(3)$ usando los métodos de Euler y de Heun, con paso $h = 1$ en ambos casos.

(b) Sabiendo que la solución exacta es $y(x) = \dfrac{6}{3x^2 - 1}$, indicar cuál de los dos métodos proporciona una aproximación mejor.

Ej. 4 — Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) &= 1 - x + 4y, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Considerando aritmética de 7 dígitos redondeados, aproximar su solución en el intervalo $[0, 0.3]$, utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$.

Ej. 5 — Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -2x(y(x))^2, & x \in [0,1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Usando el método clásico de Runge-Kutta de orden 4 y aritmética de cuatro dígitos se han obtenido valores aproximados $w_1 = 0.9411$ y $w_2 = 0.7999$ del valor de $y(x)$ en $x_1 = 0.25$ y $x_2 = 0.50$, respectivamente. Utiliza dicho método para obtener una aproximación w_3 del valor de $y(x)$ en $x_3 = 0.75$.

Ej. 6 — Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) & = & \dfrac{y(x-y)}{x^2}, \\ y(1) & = & 2. \end{cases}$$

Considerando aritmética de 6 dígitos redondeados, utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso $h = \frac{1}{128}$ para aproximar el valor de $y\left(1 + \frac{2}{128}\right)$. Sabiendo que la solución exacta es $y(x) = \left(\frac{1}{2} + \ln(x)\right)^{-1}$, comprobar cuántos decimales correctos tiene la aproximación obtenida.

Ej. 7 — Sea la ecuación en diferencias

$$f(x+3) - f(x+2) + f(x+1) - f(x) = 3 \cdot 2^x.$$

(a) Calcular su solución general.

(b) Calcular la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales

$$f(0) = 5/3, \quad f(1) = 7/3, \quad f(2) = 5/3.$$

Ej. 8 — Sea la ecuación en diferencias

$$f(x+4) + 2f(x+3) + 2f(x+2) + 2f(x+1) + f(x) = 8x + 24.$$

(a) Calcular su solución general.

(b) Estudiar su estabilidad.

Ej. 9 — Respoder a las siguientes cuestiones:

(a) Expresar el salto unitario $u(n)$ en términos del pulso unitario $\delta(n)$, y el pulso unitario en términos del salto unitario.

(b) Demostrar la propiedad de la transformada Z que afirma que, si $x(n)$ es una serie temporal no causal ni anticausal, entonces

$$\mathcal{Z}\left(x(n+m)\right) = z^m \mathcal{Z}\left(x(n)\right).$$

(c) Demostrar que

$$\mathcal{Z}\left(a^n u(n)\right) = \frac{z}{z-a},$$

con región de convergencia $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| > |a|\}$.

Ej. 10 — Determinar la series temporales causales que satisfacen la siguientes EDLCCs mediante la transformada Z:

(a) $y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = \delta(n) \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 3.$

(b) $y(n+2) - 7y(n+1) + 12y(n) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

(c) $y(n+2) + 2y(n+1) - 15y(n) = 0, \qquad y(0) = 5, \quad y(1) = -9.$