3. Ampliación de EDO. Resolución numérica

Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Mª Luz Muñoz Ruiz
José Manuel González Vida
Francisco José Palomo Ruiz
Francisco Joaquín Rodríguez Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Índice

Índice

Definiciones

Definición

Una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)** de orden n es una ecuación de incógnita $y(x)$, $x \in [a, b]$, que se suele escribir en forma implícita:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{n)}(x)) = 0,$$

o bien en forma explícita:

$$y^{n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{n-1)}(x)).$$

Observación

Una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** es entonces una ecuación

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

como por ejemplo

$$y'(x) = -y(x) + x + 1.$$

Definiciones

Observación

Es usual suprimir la dependencia de y con respecto a x, con lo que una EDO se puede escribir, en forma implícita, simplemente como

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{n)}) = 0,$$

y en forma explícita, como

$$y^{n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1)}).$$

Una EDO de primer orden se escribiría entonces simplemente

$$y' = f(x, y),$$

y la de nuestro ejemplo,

$$y' = -y + x + 1.$$

Índice

Definiciones

Definición

Se llama **problema de valor inicial (PVI)** o **problema de Cauchy** al problema de encontrar una solución $y(x)$, $x \in [a, b]$, de la EDO

$$y^{n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{n-1)}(x))$$

que satisfaga las condiciones iniciales (CI)

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Observación

Un ejemplo de problema de valor inicial sería el de buscar $y(x)$, $x \in [0, 1]$, solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & -y(x) + x + 1, \\ y(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

Existencia y unicidad de solución

Teorema

Si la función f de un PVI es continua en su dominio, entonces el PVI tiene solución.
Y si f es también diferenciable en su dominio, entonces el PVI tiene solución y además ésta es única.

Observación

Existen resultados de existencia y unicidad de solución de un PVI bajo hipótesis más débiles.

Estabilidad

Definiciones

- Se dice que un PVI es **estable** si pequeñas variaciones en los datos del problema sólo producen cambios pequeños en la solución.
- Se dice que un PVI está **bien planteado** si tiene una única solución y es estable.

Teorema

Si la función f de un PVI es diferenciable en su dominio, entonces el PVI está bien planteado.

Observación

El resultado anterior también se puede probar bajo hipótesis más débiles.

Índice

Definiciones

Repasemos ahora un tipo particular de EDO (y de PVI asociado).

Definición

Se llama **ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes** a una ecuación diferencial de la forma

$$a_0 y^{n)}(x) + a_1 y^{n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = \phi(x),$$

con $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n.$

Definiciones

Definiciones

- Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$a_0 y^{n)}(x) + a_1 y^{n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = \phi(x)$$

  se dice **homogénea** si $\phi(x) = 0$, y **no homogénea** en caso contrario.
- Se llama **ecuación homogénea asociada a una ecuación completa** (no homogénea) a la que resulta de sustituir $\phi(x)$ por 0.
- Se llama **polinomio característico** asociado a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes al polinomio

$$p(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Solución de una ED lineal con coeficientes constantes

Teorema

La solución general de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es de la forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

donde $y_h(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada e $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación completa.

Veamos cómo buscar $y_h(x)$ e $y_p(x)$ para determinar la solución $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Solución general de la ecuación homogénea

Teorema

Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes homogénea es también solución de dicha ecuación.

Definición

Se llama **sistema fundamental de soluciones** de una ecuación diferencial con coeficientes constantes homogénea a un conjunto de soluciones $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ que sean linealmente independientes.

Solución general de la ecuación homogénea

Teorema

Dado un sistema fundamental de soluciones

$$\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\},$$

la solución general de la ecuación

$$a_0 y^{n)}(x) + a_1 y^{n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0$$

es de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

con $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constantes arbitrarias.

Solución general de la ecuación homogénea

Para encontrar la solución general de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes hemos de buscar pues un sistema fundamental de soluciones, para lo que tendremos que hallar todas las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$, y tener en cuenta lo siguiente:

- Si $\lambda = r$ es una raíz real simple, entonces la función e^{rx} pertenece al sistema fundamental de soluciones.
- Si $\lambda = r$ es una raíz real múltiple de orden M, entonces las funciones $e^{rx},\ xe^{rx},\ \ldots,\ x^{M-1}e^{rx}$ pertenecen al sistema fundamental de soluciones.
- Si $\lambda = \alpha \pm \beta i$ son raíces complejas simples, entonces las funciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ pertenecen al sistema fundamental de soluciones.
- Si $\lambda = \alpha \pm \beta i$ son raíces complejas múltiples de orden M, entonces las funciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{M-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^{M-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ pertenecen al sistema fundamental de soluciones.

Solución particular de la ecuación completa

Para el cálculo de una solución particular de

$$a_0 y^{n)}(x) + a_1 y^{n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = \phi(x)$$

existen varios métodos.
El método de variación de las constantes o método de Lagrange es un método general pero muy laborioso. Hay otros métodos más particulares que son más rápidos en su aplicación, pero que sólo son válidos en determinados casos.
Nosotros utilizaremos el siguiente:

- Si $\phi(x) = p(x) \in P_n$, buscaremos una solución particular de la forma $y_p(x) = q(x) \in P_{n+k},\ k = 0, 1, \ldots$
- Si $\phi(x) = Ka^x$, buscaremos una solución particular de la forma $y_p(x) = Cx^k a^x,\ k = 0, 1, \ldots$
- Si $\phi(x) = p(x)a^x$, con $p(x) \in P_n$, buscaremos una solución particular de la forma $y_p(x) = q(x)a^x$, con $q(x) \in P_{n+k},\ k = 0, 1, \ldots$
- Si $\phi(x) = \operatorname{sen}(ax)$ o $\phi(x) = \cos(ax)$, buscaremos una solución particular de la forma $y_p(x) = b\cos(ax) + c\operatorname{sen}(ax)$.
- $\ldots$

Solución del PVI asociado a una ED lineal con coeficientes constantes

Para resolver el PVI asociado a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se busca la solución general de la ecuación y se imponen las condiciones iniciales para particularizar el valor de las constantes que aparecen en ésta.

Ejemplo 1

Índice

Preliminares

Consideremos un PVI de primer orden:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha. \end{cases}$$

En lugar de buscar una solución $y(x)$, $x \in [a, b]$, pretendemos generar aproximaciones w_i del valor de y en ciertos nodos x_i del intervalo $[a, b]$:

$$w_i \simeq y(x_i), \quad i = 0, \ldots, N,$$

mediante una ecuación en diferencias finitas.

Definiciones

Definiciones

- Se llama **error de truncamiento local** $|\tau_i|$ en un cierto paso i, $i = 0, \ldots, N$, a la cantidad por la cual la solución exacta de la ecuación diferencial falla en satisfacer la ecuación en diferencias que se está usando en la aproximación; sirve para medir la precisión del método en un paso específico suponiendo que el método fuese exacto en el paso anterior.
- Se llama **error de truncamiento global** $|y(x_i) - w_i|$ en un cierto paso i, $i = 0, \ldots, N$, al error cometido al usar w_i como aproximación de $y(x_i)$ partiendo del valor inicial; refleja el error acumulado en un paso específico desde el error inicial.

Definiciones

Definiciones

- **Consistencia:** Un método se dice consistente cuando la ecuación en diferencias que utiliza tiende a la ecuación diferencial cuando el tamaño de paso h tiende a 0.
- **Estabilidad:** Un método se dice que es **(cero) estable** si la ecuación en diferencias que utiliza lo es, por lo que podremos hablar de métodos inestables, débilmente estables y fuertemente estables.
  Se dirá que un método es **absolutamente estable** cuando el paso h satisface
  $$M < h\frac{\partial f}{\partial y} < 0,$$
  donde M depende del método utilizado.
- **Convergencia:** Un método se dice convergente cuando la solución de la ecuación en diferencias que utiliza tiende a la solución de la ecuación diferencial cuando el tamaño de paso tiende a 0, esto es, cuando
  $$\lim_{h\to 0}\left(\max_{i=0,\dots,N}|y(x_i)-w_i|\right)=0.$$

Obtención de métodos

- **Desarrollo de Taylor:** Se usa el desarrollo de Taylor de $y(x)$ centrado en x_i y se aplica que $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$.
- **Integración numérica:** Se utiliza el teorema fundamental del cálculo

$$\int_{x_0}^{x_k} y'(x)dx = y(x_k) - y(x_0),$$

aplicando que $y'(x) = f(x, y(x))$ y sustituyendo la integral por una fórmula de integración numérica.
- **Coeficientes indeterminados:** Se impone que el error de truncamiento local sea lo más pequeño posible, para lo que se escribe el método en la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k y^{k)}(x_0) \simeq 0$$

y se impone que se anule la mayor cantidad posible de coeficientes c_k.

Índice

Preliminares

Definición

Se dice que un método de aproximación es un **método unipaso** si cada valor w_{i+1} se calcula únicamente a partir del valor anterior w_i.

Su expresión general es:

$$w_0 = \alpha, \quad w_{i+1} = w_i + h\,\varphi(x_i, w_i, h), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

donde vamos a considerar un paso fijo $h = \dfrac{b-a}{N}$.

Observación

El error de truncamiento local de un método de orden p viene dado por

$$\tau_{i+1} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \varphi(x_i, y(x_i), h) = O(h^p).$$

Métodos de Taylor

Los **métodos de Taylor** de orden n se obtienen a partir del polinomio de Taylor de orden n de $y(x)$ centrado en x_i.

Su expresión general es

$$w_0 = \alpha,\ w_{i+1} = w_i + h \underbrace{\left(f(x_i, w_i) + \frac{h}{2!} f'(x_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n+1}}{n!} f^{n-1)}(x_i, w_i) \right)}_{\varphi(x_i, w_i, h)},$$

donde las derivadas sucesivas de f se pueden calcular utilizando derivación implícita.

El error de truncamiento local se acota por

$$|\tau_{i+1}| \leq \frac{h^n M}{(n+1)!} = O(h^n),$$

donde

$$M = \max_{a \leq x \leq b} \left| y^{n+1)}(x) \right|.$$

Métodos de Taylor

El caso más simple y conocido de método de Taylor es el método de Taylor de orden 1, más conocido como **método de Euler**:

$$w_0 = \alpha,\ w_{i+1} = w_i + h \underbrace{\left(f(x_i, w_i)\right)}_{\varphi(x_i, w_i, h)}.$$

Su error de truncamiento local se acota por

$$|\tau_{i+1}| \leq \frac{hM}{2!} = O(h),$$

donde $M = \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|$, su error de truncamiento global por

$$|y(x_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{L(x_i - a)} - 1\right),$$

si f es lipschitziana para la variable y con constante de Lipschitz L, y su región de estabilidad absoluta viene dada por $-2 < h\dfrac{\partial f}{\partial y} < 0$.

Ejemplo 2

Métodos de Runge-Kutta

Los **métodos de Runge-Kutta** sustituyen las derivadas de f por el valor de dicha función en ciertos puntos.

Su expresión general es

$$w_0 = \alpha, \left\{ \begin{array}{ll} k_1 & = h\, f(x_i, w_i) \\ k_j & = h\, f\left(x_i + h d_j, w_i + \sum_{l=1}^{j-1} c_{jl} k_l \right), \quad j = 2, \ldots, p \end{array} \right\}, \; w_{i+1} = w_i + \sum_{j=1}^{p} b_j k_j.$$

El error de truncamiento local es

$$O(h^p) \text{ si } p \leq 4, \; O(h^{p-1}) \text{ si } 5 \leq p \leq 7, \; O(h^{p-2}) \text{ si } 8 \leq p \leq 9, \; O(h^{p-3}) \text{ si } 10 \leq p.$$

Métodos de Runge-Kutta

Los siguientes son ejemplos de **métodos de Runge-Kutta de orden 2**:

- **Método del punto medio:**

$$w_0 = \alpha, \left\{ \begin{array}{ll} k_1 &= h\,f(x_i, w_i) \\ k_2 &= h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right) \end{array} \right\}, \; w_{i+1} = w_i + k_2.$$

- **Método de Euler modificado:**

$$w_0 = \alpha, \left\{ \begin{array}{ll} k_1 &= h\,f(x_i, w_i) \\ k_2 &= h\,f\,(x_i + h, w_i + k_1) \end{array} \right\}, \; w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

- **Método de Heun:**

$$w_0 = \alpha, \left\{ \begin{array}{ll} k_1 &= h\,f(x_i, w_i) \\ k_2 &= h\,f\left(x_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{2k_1}{3}\right) \end{array} \right\}, \; w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Métodos de Runge-Kutta

El siguiente es un ejemplo de **método de Runge-Kutta de orden 3**:

$$w_0 = \alpha, \left\{ \begin{aligned} k_1 &= h\,f(x_i, w_i) \\ k_2 &= h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h\,f(x_i + h, w_i - k_1 + 2k_2) \end{aligned} \right\}, \; w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).$$

Métodos de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta más usado es el **método de Runge-Kutta de orden 4**:

$$w_0 = \alpha, \left\{ \begin{aligned} k_1 &= h\, f(x_i, w_i) \\ k_2 &= h\, f\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h\, f\left(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h\, f(x_i + h, w_i + k_3) \end{aligned} \right\}, \; w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Su región de estabilidad absoluta viene dada por

$$-2.78 < h\frac{\partial f}{\partial y} < 0.$$

Ejemplo 3

Índice

Preliminares

Definición

Se dice que un método de aproximación es un **método multipaso** si cada valor w_{i+1} se calcula a partir de m valores anteriores $w_i, w_{i-1}, w_{i-2}, \ldots, w_{i-(m-1)}$.

Su expresión general es:

$$w_0 = \alpha_0,\; w_1 = \alpha_1,\; \ldots,\; w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

$$w_{i+1} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j w_{i-j} + h\,\varphi(x_i, w_{i+1}, w_i, \ldots, w_{i-(m-1)}, h), \quad i = m-1, \ldots, N-1,$$

donde $h = \dfrac{b-a}{N}$.

Observación

El error de truncamiento local de un método de m pasos (el número de pasos no tiene por qué coincidir con el orden del método) viene dado por

$$\tau_{i+1} = \frac{y(x_{i+1}) - \sum_{j=0}^{m-1} a_i y(x_{i-j})}{h} - \varphi(x_i, y(x_{i+1}), y(x_i), \ldots, y(x_{i-(m-1)}), h).$$

Métodos explícitos

Se dice que un método multipaso es **explícito** cuando en el cálculo de w_{i+1} no aparece el propio w_{i+1} en la parte derecha de la expresión del método.

Como ejemplos tenemos los siguientes métodos obtenidos a partir de fórmulas abiertas de integración:

- **Método del punto medio modificado** (orden 2):

$$w_k = \alpha_k,\ k = 0, 1, \quad w_{i+1} = w_{i-1} + 2h\, f(x_i, w_i).$$

- **Método de Milne** (orden 4):

$$w_k = \alpha_k,\ k = 0, 1, 2, 3, \quad w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}\left(2f(x_i, w_i) - f(x_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, w_{i-2})\right).$$

Métodos implícitos

Se dice que un método multipaso es **implícito** cuando en el cálculo de w_{i+1} aparece el propio w_{i+1} en la parte derecha de la expresión del método.

Como ejemplos tenemos los siguientes métodos obtenidos a partir de fórmulas cerradas de integración:

- **Método del trapecio** (orden 2):

$$w_0 = \alpha_0, \quad w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\,\left(f(x_{i+1}, w_{i+1}) + f(x_i, w_i)\right).$$

- **Método de Simpson** (orden 4):

$$w_k = \alpha_k,\ k = 0, 1, \quad w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}\,\left(f(x_{i+1}, w_{i+1}) + 4f(x_i, w_i) + f(x_{i-1}, w_{i-1})\right).$$

Índice

Definiciones

Definición

Una **ecuación en diferencias finitas (EDF)** de orden m es una ecuación de incógnita $f(x)$, $\forall x = x_0 + nh$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$F(x; f(x), f(x+h), f(x+2h), \ldots, f(x+mh)) = 0.$$

Observación

Haciendo un cambio de variable, una EDF puede escribirse como una ecuación de incógnita $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$:

$$F(x; f(x), f(x+1), f(x+2), \ldots, f(x+m)) = 0.$$

Definiciones

Definición

Una ecuación en diferencias finitas es una **ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes (EDLCC)** si tiene la forma

$$a_0 f(x) + a_1 f(x+1) + \ldots + a_m f(x+m) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

con $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, m$, y $a_0 a_m \neq 0)$.

Observación

Una EDLCC se puede escribir en forma de recurrencia, tomando $y_{n+k} = y(n+k) = f(x+k)$, $k = 0, \ldots, m$, y $g_n = g(n) = g(x)$, como una ecuación de incógnita y_n, $n \in \mathbb{Z}$:

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + \ldots + a_m y_{n+m} = g_n.$$

Definiciones

Definiciones

- Una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes

$$a_0 f(x) + a_1 f(x+1) + \ldots + a_m f(x+m) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

  se dice **homogénea** si $g(x) = 0$, y **no homogénea** en caso contrario.
- Se llama **EDLCC homogénea asociada a una EDLCC completa** (no homogénea) a la que resulta de sustituir $g(x)$ por 0.
- Se llama **ecuación característica** asociada a una EDLCC a la ecuación algebraica

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_m r^m = 0.$$

Índice

Solución de una EDLCC

Teorema

La solución general $f(x)$ de una EDLCC es suma de la solución general de la EDLCC homogénea asociada, $f_h(x)$, y de una solución particular de la ecuación completa, $f_p(x)$, es decir,

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x),$$

o en modo de recurrencia, llamando $y_h(n)$ a la solución general de la EDLCC homogénea asociada, e $y_p(n)$ a la solución particular de la ecuación completa,

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n).$$

Veamos ahora cómo buscar la solución general de una ecuación homogénea y una solución particular de una ecuación completa.

Solución general de la EDLCC homogénea

Teorema

Toda combinación lineal de soluciones de una EDLCC homogénea es también solución de dicha ecuación.

Definición

Se llama **sistema fundamental de soluciones** de una ecuación EDLCC homogénea de orden m a un conjunto de soluciones $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}$ que sean linealmente independientes.

Solución general de la EDLCC homogénea

Teorema

Dado un sistema fundamental de soluciones

$$\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\},$$

la solución general de la ecuación

$$a_0 f(x) + a_1 f(x+1) + \ldots + a_m f(x+m) = 0$$

es de la forma

$$f_h(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_m f_m(x),$$

con $C_1, C_2, \ldots, C_m$ constantes arbitrarias.

Solución general de la EDLCC homogénea

Para encontrar la solución general de la EDLCCs homogéneas buscaremos pues un sistema fundamental de soluciones. Para ello se obtienen las raíces de la ecuación característica asociada, y se tiene en cuenta lo siguiente:

- Si r es una raíz real simple, entonces
  r^x pertenece al sistema fundamental de soluciones.
- Si r es una raíz real múltiple de multiplicidad M, entonces
  $r^x,\ xr^x,\ \ldots,\ x^{M-1}r^x$ pertenecen al sistema fundamental de soluciones.
- Si $\rho(\cos(\alpha) \pm i\,\mathrm{sen}(\alpha))$ son raíces complejas simples, entonces
  $\rho^x\cos(\alpha x),\ \rho^x\,\mathrm{sen}(\alpha x)$ pertenecen al sistema fundamental de soluciones.
- Si $\rho(\cos(\alpha) \pm i\,\mathrm{sen}(\alpha))$ son raíces complejas múltiples de multiplicidad M, entonces
  $\rho^x\cos(\alpha x),\ \rho^x\,\mathrm{sen}(\alpha x),\ x\rho^x\cos(\alpha x),\ x\rho^x\,\mathrm{sen}(\alpha x),\ \ldots,\ x^{M-1}\rho^x\cos(\alpha x),\ x^{M-1}\rho^x\,\mathrm{sen}(\alpha x)$
  pertenecen al sistema fundamental de soluciones.

▸ Ejemplo 4

Solución particular de la EDLCC completa

Para encontrar una solución particular de

$$a_0 f(x) + a_1 f(x+1) + \ldots + a_m f(x+m) = g(x)$$

probamos con una función $f_p(x)$ que depende del tipo de función que sea $g(x)$ y que venga dada en función de ciertos parámetros, que ajustamos imponiendo que sea solución de la ecuación completa:

- Si $g(x) = p(x) \in P_n$ probamos con $f_p(x) = q(x) \in P_{n+k}$, $k = 0, 1, \ldots$.
- Si $g(x) = Ka^x$ probamos con $f_p(x) = Cx^k a^x$, $k = 0, 1, \ldots$.
- Si $g(x) = p(x)a^x$, $p(x) \in P_n$, probamos con $f_p(x) = q(x)a^x$, $q(x) \in Pn + k$, $k = 0, 1, \ldots$.
- Si $g(x) = \operatorname{sen}(ax)$ o $g(x) = \cos(ax)$, probamos con $f_p(x) = b\cos(ax) + c\operatorname{sen}(ax)$.
- $\ldots$

Ejemplo 5

Solución de una EDLCC con condiciones iniciales

Teorema

Dada una EDLCC de orden m, existe una única $f(x)$ solución de dicha EDLCC que satisfaga las condiciones iniciales

$$f(x_0) = k_0,\ \ f(x_0+1) = k_1,\ \ldots,\ f(x_0+m-1) = k_{m-1},$$

para un $x_0 \in \mathbb{Z}$ dado.

Ejemplo 6

Estabilidad

Definición

Una EDLCC se dice **estable** si el error cometido en el cálculo de un cierto término es menor que el error cometido en el cálculo de los anteriores.

Teorema

Una EDLCC es estable si y sólo si todas las raíces de su ecuación característica asociada tienen módulo menor o igual que uno, y las raíces de módulo uno son raíces simples.

Definiciones

- Una EDLCC estable se dice **fuertemente estable** si su ecuación característica tiene todas sus raíces de módulo estrictamente menor que uno salvo quizás $+1$.
- Una EDLCC estable se dice **débilmente estable** si su ecuación característica asociada tiene raíces de módulo uno distintas de $+1$.

▸ Ejemplo 7

Índice

Preliminares

La transformada Z es la versión discreta de la transformada de Laplace, del mismo modo que la transformada de Fourier discreta lo es de la transformada de Fourier.

Al igual que la DFT, se utiliza para *transformar* unas funciones en otras con las que sea más fácil realizar ciertas operaciones y, una vez hechas éstas, se realiza una transformación inversa.

En concreto, se utiliza para resolver EDLCCs.

Comenzamos entonces definiendo la transformada Z de una serie temporal.

Definiciones

Definiciones

- Una **señal** es una función matemática que modela un fenómeno dinámico.
- Una **señal en tiempo continuo** es una función $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, y una **señal en tiempo discreto** es una función $f(t_n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Una **serie temporal** es una señal en tiempo discreto $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Una **serie temporal causal** es aquélla tal que $f(n) = 0$, $\forall n < 0$, y una **serie temporal anticausal** es aquélla tal que $f(n) = 0$, $\forall n \geq 0$.

Definiciones

Observaciones

- Son ejemplos de series temporales el llamado **pulso unitario**:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

el **salto unitario**:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

y también:

$$u(-n-1) = \begin{cases} 1, & n \leq -1, \\ 0, & n > -1. \end{cases}$$

- Toda serie temporal $f(n)$ se puede escribir como suma de una serie anticausal, $f_a(n)$, y una serie causal, $f_c(n)$:

$$f(n) = f_a(n) + f_c(n) = f(n) \cdot u(-n-1) + f(n) \cdot u(n).$$

Definiciones

Definición

Dada una serie temporal $y(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, se define su **transformada Z** como la serie

$$Y(z) = Z(y(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{y(n)}{z^n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Observación

Con la notación $y(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z)$ queremos decir que $Y(z)$ es la **transformada Z** de $y(n)$, o bien que $y(n)$ es la **transformada Z inversa** de $Y(z)$.

Definiciones

Observación

Como la transformada Z es una serie, podemos hablar de su **región de convergencia**:

- Si $y(n)$ es causal, la región de convergencia de $Y(z)$ es

$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| > r_c\}\,.$$

- Si $y(n)$ es anticausal, la región de convergencia de $Y(z)$ es

$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < r_a\}\,.$$

- Si $y(n) = y_a(n) + y_c(n)$, la región de convergencia de $Y(z)$ es

$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, r_c < |z| < r_a\}\,.$$

Ejemplo 8

Propiedades

Sean $x(n)$, $y(n)$ y $v(n)$ series temporales (la última de ellas causal) de transformadas Z, $X(z)$, $Y(z)$ y $V(z)$, con regiones de convergencia $R_x = \{z / r_c < |z| < r_a\}$, $R_y = \{z / r_{c'} < |z| < r_{a'}\}$ y $R_v = \{z / r_c < |z|\}$, respectivamente. Entonces:

	Serie temporal	Transformada Z	Región de convergencia
L	$ax(n) + by(n)$	$aX(z) + bY(z)$	Al menos $R_x \cap R_y$
DT	$x(n+m)$	$z^m X(z)$	R_x
DTC	$v(n+m)$	$z^m V(z) - \sum_{k=1}^{m} z^k v(m-k)$	R_v
ME	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\|a\| r_c < \|z\| < \|a\| r_a$
MT	$nx(n)$	$-z\frac{dX}{dz}(z)$	R_x
TT	$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{r_a} < \|z\| < \frac{1}{r_c}$
C	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$	$X(z)Y(z)$	Al menos $R_x \cap R_y$

Transformada Z inversa

	Serie temporal	Transformada Z	Región de convergencia
1	$\delta(n-m)$	$\dfrac{1}{z^m}$	$\mathbb{C}^*$ si $m=0$ $\mathbb{C}^*-\{0\}$ si $m>0$ $\mathbb{C}^*-\{+\infty\}$ si $m<0$
2	$u(n)$ $u(-n-1)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$ $\lvert z\rvert<1$
3	$a^n u(n)$ $-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$ $\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
4	$na^n u(n)$ $-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$ $\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
5	$a^{\lvert n\rvert}$	$\dfrac{(a+1)(a-1)z}{(z-a)(az-1)}$	$\lvert a\rvert<\lvert z\rvert<\dfrac{1}{\lvert a\rvert}$
6	$\operatorname{sen}(nw)u(n)$	$\dfrac{z\operatorname{sen}(w)}{z^2-2z\cos(w)+1}$	$\lvert z\rvert>1$
7	$a^n\operatorname{sen}(nw)u(n)$	$\dfrac{az\operatorname{sen}(w)}{z^2-2az\cos(w)+a^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
8	$\cos(nw)u(n)$	$\dfrac{z(z-\cos(w))}{z^2-2z\cos(w)+1}$	$\lvert z\rvert>1$
9	$a^n\cos(nw)u(n)$	$\dfrac{z(z-a\cos(w))}{z^2-2az\cos(w)+a^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
10	$a^{n-1}u(n-1)$ $-a^{n-1}u(-n)$	$\dfrac{1}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$ $\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$

Índice

Solución de una EDLCC mediante la transformada Z

Para resolver una EDLCC utilizando la transformada Z primero hemos de seguir los siguientes pasos:

- Aplicar la transformada Z a la ecuación, y usar la propiedad de linealidad (L) de ésta.
- Utilizar las propiedades de desplazamiento en el tiempo (DT) o desplazamiento en el tiempo causal (DTC) para expresar $Y(z)$ como una función racional, y descomponer esta función en fracciones simples.
- Aplicar la transformada Z inversa, y usar de nuevo la propiedad de linealidad (L), para obtener $y(n)$.

Ejemplo 9

Ejemplo 1

Resolver el PVI

$$\begin{cases} y'(x) &= -y(x) + x + 1, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Para empezar, buscamos la solución de la ecuación diferencial lineal

$$y'(x) + y(x) = x + 1.$$

Para ello, buscaremos en primer lugar la solución general $y_h(x)$ de la ecuación homogénea asociada, esto es, buscamos $y_h(x)$ tal que

$$y_h'(x) + y_h(x) = 0.$$

Como la ecuación característica asociada es $r + 1 = 0$, cuya única raíz es $r = -1$, tenemos que

$$y_h(x) = Ce^{-x}.$$

Y a continuación, buscaremos una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación completa. Como el segundo miembro es un polinomio de primer grado, probamos con una solución particular que también lo sea, $y_p(x) = ax + b$. De imponer que, efectivamente, sea solución,

$$y_p'(x) + y_p(x) = x + 1,$$

deducimos que $a = 1$ y $b = 0$, luego

$$y_p(x) = x.$$

Ejemplo 1 (continuación)

Por tanto, la solución general de la EDO es

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= Ce^{-x} + x. \end{aligned}$$

Para terminar, imponemos que satisfaga la condición inicial:

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad Ce^{-0} + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Por tanto, la solución del PVI es

$$y(x) = e^{-x} + x.$$

Volver

Ejemplo 2

Aplicar el método de Euler para hallar $y(x)$, $x \in [0, 1]$, solución del PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & -y(x) + x + 1, \\ y(0) & = & 1, \end{array} \right.$$

con $h = 0.1$.

En este caso, $f(x, y) = -y + x + 1$, $a = 0$, $b = 1$ y $\alpha = 1$, y como $h = 0.1$, el método de Euler queda:

$$\begin{array}{rcl} w_{i+1} & = & w_i + h\, f(x_i, w_i) \\ & = & w_i + 0.1(-w_i + x_i + 1), \end{array}$$

siendo el valor inicial $w_0 = 1$.
Con él obtenemos las siguientes aproximaciones w_i de $y(x_i)$:

$$\begin{array}{llll} x_0 = 0.0 & w_0 = 1.0000 & & \\ x_1 = 0.1 & w_1 = 1.0000 & x_6 = 0.6 & w_6 = 1.1314 \\ x_2 = 0.2 & w_2 = 1.0100 & x_7 = 0.7 & w_7 = 1.1783 \\ x_3 = 0.3 & w_3 = 1.0290 & x_8 = 0.8 & w_8 = 1.2305 \\ x_4 = 0.4 & w_4 = 1.0561 & x_9 = 0.9 & w_9 = 1.2874 \\ x_5 = 0.5 & w_5 = 1.0905 & x_{10} = 1.0 & w_{10} = 1.3487 \end{array}$$

Ejemplo 3

Aplicar el método de Runge-Kutta de orden 4 para hallar $y(x)$, $x \in [0, 0.3]$, solución del PVI

$$\begin{cases} y'(x) &= -10y(x), \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

con $h = 0.1$.

En este caso, $f(x,y) = -10y$, $a = 0$, $b = 0.3$, $\alpha = 1$ y $h = 0.1$, así que tenemos:

$$x_0 = 0.0 \qquad w_0 = 1.0000$$

$$\begin{cases} k_1 = h\,f(x_0, w_0) = -h \cdot 10 w_0 = -1.0000 \\ k_2 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{k_1}{2}\right) = -h \cdot 10\left(w_0 + \frac{k_1}{2}\right) = -0.5000 \\ k_3 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{k_2}{2}\right) = -h \cdot 10\left(w_0 + \frac{k_2}{2}\right) = -0.7500 \\ k_4 = h\,f\left(x_0 + h, w_0 + k_3\right) = -h \cdot 10\left(w_0 + k_3\right) = -0.2500 \end{cases}$$

$$x_1 = 0.1 \qquad w_1 = w_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 0.3750$$

Volver

Ejemplo 3 (continuación)

$$x_1 = 0.1 \qquad w_1 = w_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.3750$$

$$\begin{cases} k_1 = h\,f(x_1, w_1) = -h \cdot 10 w_1 = -0.3750 \\ k_2 = h\,f\left(x_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{k_1}{2}\right) = -h \cdot 10\left(w_1 + \frac{k_1}{2}\right) = -0.1875 \\ k_3 = h\,f\left(x_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{k_2}{2}\right) = -h \cdot 10\left(w_1 + \frac{k_2}{2}\right) = -0.2812 \\ k_4 = h\,f\left(x_1 + h, w_1 + k_3\right) = -h \cdot 10\left(w_1 + k_3\right) = -0.09375 \end{cases}$$

$$x_2 = 0.2 \qquad w_2 = w_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.1406$$

$$\begin{cases} k_1 = h\,f(x_2, w_2) = -h \cdot 10 w_2 = -0.1406 \\ k_2 = h\,f\left(x_2 + \frac{h}{2}, w_2 + \frac{k_1}{2}\right) = -h \cdot 10\left(w_2 + \frac{k_1}{2}\right) = -0.07030 \\ k_3 = h\,f\left(x_2 + \frac{h}{2}, w_2 + \frac{k_2}{2}\right) = -h \cdot 10\left(w_2 + \frac{k_2}{2}\right) = -0.1054 \\ k_4 = h\,f\left(x_2 + h, w_2 + k_3\right) = -h \cdot 10\left(w_2 + k_3\right) = -0.03515 \end{cases}$$

$$x_3 = 0.3 \qquad w_3 = w_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.05273$$

Volver

Ejemplo 4

Determinar la solución general de la EDLCC homogénea

$$f(x+5) - 7f(x+4) + 20f(x+3) - 20f(x+2) - 16f(x+1) + 32f(x) = 0.$$

La ecuación característica asociada a esta EDLCC es

$$r^5 - 7r^4 + 20r^3 - 20r^2 - 16r + 32 = 0.$$

Buscando sus raíces, podemos escribirla como

$$(r+1)(r-2)^2(r-(2+2i))(r-(2-2i)) = 0.$$

Por tanto, la solución general buscada es

$$f_h(x) = C_1(-1)^x + C_2 2^x + C_3 x\, 2^x + C_4 \left(2\sqrt{2}\right)^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + C_5 \left(2\sqrt{2}\right)^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

Volver

Ejemplo 5

Determinar la solución general de la EDLCC

$$f(x+5) - 7f(x+4) + 20f(x+3) - 20f(x+2) - 16f(x+1) + 32f(x) = 40x - 66.$$

Ya conocemos la solución general de la ecuación homogénea asociada, $f_h(x)$, gracias al Ejemplo 4, de modo que sólo necesitamos determinar una solución particular de la ecuación completa, $f_p(x)$.
Como el segundo miembro de la ecuación es un polinomio de grado 1, buscamos una solución particular de la forma $f_p(x) = ax + b$.
De imponer que satisfaga la ecuación obtenemos que $a = 4$ y $b = 1$, luego

$$f_p(x) = 4x + 1.$$

La solución general de la ecuación es por tanto

$$\begin{aligned} f(x) &= f_h(x) + f_p(x) \\ &= C_1(-1)^x + C_2 2^x + C_3 x\, 2^x + C_4 \left(2\sqrt{2}\right)^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + C_5 \left(2\sqrt{2}\right)^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 4x + 1. \end{aligned}$$

Volver

Ejemplo 6

Determinar la solución general de la EDLCC del Ejemplo 5 que satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$f(0) = 5,\ f(1) = 9,\ f(2) = 23,\ f(3) = 19,\ f(4) = -29.$$

De imponer que la solución obtenida en el Ejemplo 5 verifique las condiciones iniciales obtenemos un sistema de ecuaciones lineales que hemos de resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 8 & 0 & 8 \\ -1 & 8 & 24 & -16 & 16 \\ 1 & 16 & 64 & -64 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 14 \\ 6 \\ -46 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la única solución de la EDLCC que satisface las condiciones iniciales impuestas es

$$f(x) = 2 \cdot (-1)^x + 2^x + \left(2\sqrt{2}\right)^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \left(2\sqrt{2}\right)^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 4x + 1.$$

Volver

Ejemplo 7

Estudiar la establidad de la EDLCC del Ejemplo 5.

En el Ejemplo 4 vimos que la ecuación característica asociada a esta EDLCC era

$$r^5 - 7r^4 + 20r^3 - 20r^2 - 16r + 32 = 0,$$

o equivalentemente,

$$(r+1)(r-2)^2(r-(2+2i))(r-(2-2i)) = 0.$$

Por tanto, tiene raíces de módulo mayor que uno, por lo que esta EDLCC no es estable.

Volver

Ejemplo 8

Calcular la transformada Z, y su región de convergencia, para la serie temporal

$$y(n) = 0.5^n u(n) + 3 \cdot 4^n u(-n-1).$$

Usando la definición, la transformada Z de $y(n)$ es:

$$\begin{aligned} Z\left(y(n)\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{0.5^n u(n) + 3 \cdot 4^n u(-n-1)}{z^n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{0.5^n u(n)}{z^n} + 3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4^n u(-n-1)}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{0.5}{z}\right)^n + 3 \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{4}{z}\right)^n . \end{aligned}$$

Volver

Ejemplo 8 (continuación)

La serie procedente de aplicar la transformada Z a la parte causal de $y(n)$ converge si y sólo si $\left|\frac{0.5}{z}\right| < 1$, o equivalentemente, $|z| > 0.5$, y en tal caso su suma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{0.5}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{0.5}{z}} = \frac{z}{z-0.5} = \frac{2z}{2z-1}.$$

Y al aplicar la transformada Z a la parte anticausal de $y(n)$ obtenemos

$$3\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{4}{z}\right)^n = 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^{-k} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^k,$$

que converge si y sólo si $\left|\frac{z}{4}\right| < 1$, es decir, $|z| < 4$, y entonces

$$3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^k = 3\frac{\frac{z}{4}}{1-\frac{z}{4}} = \frac{3z}{4-z}.$$

Por tanto,

$$Z\left(y(n)\right) = \frac{2z}{2z-1} + \frac{3z}{4-z},$$

y su región de convergencia es $\{z \in \mathbb{C} \ / \ 0.5 < |z| < 4\}$.

Ejemplo 9

Determinar, usando la transformada Z, la serie temporal causal que satisface la EDLCC

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = \delta(n),$$

con condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \; y(1) = 3.$$

Primero aplicamos la transformada Z a la ecuación, con lo que

$$Z(y(n+2) - y(n+1) - 6y(n)) = Z(\delta(n)),$$

y por tanto,

$$Z(y(n+2) - y(n+1) - 6y(n)) = 1.$$

A continuación, aplicamos la propiedad de linealidad (L):

$$Z(y(n+2)) - Z(y(n+1)) - 6Z(y(n)) = 1.$$

Y, como nos piden una serie temporal causal y nos dan condiciones iniciales, la propiedad de desplazamiento en el tiempo causal (DTC):

$$(z^2 Z(y(n)) - zy(1) - z^2 y(0)) - (zZ(y(n)) - zy(0)) - 6Z(y(n)) = 1.$$

Ejemplo 9 (continuación)

Sustituimos el valor de las condiciones iniciales y despejamos $Y(z) = Z(y(n))$:

$$Z(y(n)) = \frac{3z+1}{z^2 - z - 6}.$$

Y descomponemos $Y(z) = Z(y(n))$ en fracciones simples:

$$Z(y(n)) = \frac{1}{z+2} + \frac{2}{z-3}.$$

Ahora aplicamos la transformada Z inversa:

$$y(n) = Z^{-1}\left(\frac{1}{z+2} + \frac{2}{z-3}\right).$$

Y la propiedad de linealidad de ésta:

$$y(n) = Z^{-1}\left(\frac{1}{z+2}\right) + 2Z^{-1}\left(\frac{1}{z-3}\right).$$

Volver

Ejemplo 9 (continuación)

Consultando nuestra tabla de transformada Z inversa, y recordando que buscamos una serie causal, obtenemos que

$$y(n) = (-2)^{n-1}u(n-1) + 2 \cdot 3^{n-1}u(n-1),$$

o equivalentemente,

$$y(n) = \left((-2)^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}\right) u(n-1).$$

Volver