4. Ampliación de EDP. Resolución numérica

Ampliación de Matemáticas y Métodos Numéricos

Mª Luz Muñoz Ruiz
José Manuel González Vida
Francisco José Palomo Ruiz
Francisco Joaquín Rodríguez Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Índice

Índice

Definiciones

Definición

Una **ecuación en derivadas parciales (EDP)** es una ecuación en que la incógnita es un campo escalar u definido en $U \subset \mathbb{R}^n$ y en la que aparecen sus derivadas parciales, siendo el mayor índice de derivación parcial que aparece en la ecuación el que se llamará orden de la misma.

Observación

Nosotros estudiaremos estudiaremos el caso de dos variables independientes, esto es, el caso en que $u = u(x, y)$, con $(x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2)$. Estas EDP se pueden expresar en la siguiente forma:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0,$$

o, escribiendo las parciales de forma simplificada:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \dots) = 0.$$

Definiciones

Observación

A veces, en las aplicaciones físicas, la variable independiente y se identifica con el tiempo y se suele representar por t.

Por ejemplo, la ecuación

$$u_t + cu_x = 0$$

es una EDP de primer orden conocida como **ecuación del transporte** o **ecuación de advección**.

Índice

Definiciones

Observación

Para restringir las soluciones de una EDP se utilizan **condiciones iniciales** y/o **condiciones de contorno o de frontera**. Cuando se imponen condiciones de ambos tipos se habla de un problema mixto. Ejemplos de estos tipos de condiciones son las condiciones de Cauchy, de Dirichlet o de Neumann.

Definiciones

- **Condiciones de Cauchy:** Se dan generalmente en EDP en las que interviene el tiempo. Se buscan soluciones u conociendo el valor de u, u_t, $\ldots$ (tantas derivadas con respecto al tiempo como sean necesarias para determinar la solución) en $t = 0$.
- **Condiciones de Dirichlet:** Se buscan soluciones u en una determinada región $D \subseteq \mathbb{R}^n$ conociendo el valor de u en los puntos x pertenecientes a la frontera ∂D de la región.
- **Condiciones de Neumann:** Se buscan soluciones u en una determinada región $D \subseteq \mathbb{R}^n$ conociendo el valor de $\frac{\partial u}{\partial n}$ en los puntos x pertenecientes a la frontera, siendo n normal a ∂D.

Índice

Definiciones

Repasemos ahora un tipo particular de EDP, centrándonos en las de segundo orden.

Definición

Se dice que una EDP de segundo orden es una **EDP lineal con coeficientes constantes** si se puede escribir de la forma

$$A_1 u + A_2 u_x + A_3 u_y + A_4 u_{xx} + A_5 u_{xy} + A_6 u_{yy} = f(x, y),$$

con $A_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 6.$

Definiciones

Definición

Una EDP lineal con coeficientes constantes

$$A_1 u + A_2 u_x + A_3 u_y + A_4 u_{xx} + A_5 u_{xy} + A_6 u_{yy} = f(x,y),$$

se dice **homogénea** si $f(x,y) = 0$, y **no homogénea** en caso contrario.

Ejemplos

- **Ecuación de ondas:** Es la que satisface una función $u(x,t)$ que representa las oscilaciones de una cuerda:
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$
- **Ecuación del calor:** Describe la evolución de la temperatura de una barra homogénea de sección constante:
$$u_t - c^2 u_{xx} = 0.$$
- **Ecuación de Laplace:** describe el potencial u del campo eléctrico en las regiones de un plano que no contienen cargas:
$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Método de separación de variables

El método de separación de variables se basa en buscar una solución de la forma

$$u(x,y) = f(x)g(y).$$

Nosotros lo aplicaremos a la búsqueda de solución de la ecuación del calor y de la ecuación de ondas, por tanto, buscaremos soluciones

$$u(x,t) = f(x)g(t).$$

Método de separación de variables

Para ello, habremos de realizar los siguientes pasos:

- Obtener dos ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Hallar las soluciones de las dos ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas que cumplan las condiciones de frontera.
- Formar una apropiada combinación lineal de las soluciones halladas que satisfaga las condiciones iniciales del problema.

Solución de la ecuación del calor

La ecuación

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0,$$

en la que la constante c está relacionada con una propiedad del material conocida como difusividad térmica, describe la evolución de la temperatura en una barra homogénea de sección constante. Suponemos que la superficie de la barra está aislada, de modo que el calor sólo fluye longitudinalmente, y haremos coincidir la barra con el eje x. Buscamos una solución que satisfaga las condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$$

para todo t, es decir, los extremos de la barra están a temperatura 0. Consideramos además la condición inicial

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

para todo x, que nos da la distribución inicial de la temperatura en la barra.

Solución de la ecuación del calor

El método de separación de variables nos permite determinar la solución del problema anterior

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t},$$

con A_n los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en senos de la función $\varphi(x)$ en el intervalo $(0,l)$, es decir,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

▸ Ejemplo 1

Solución de la ecuación de ondas

La ecuación

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

en la que la constante c se refiere a la velocidad de propagación de la onda, modela las vibraciones de una cuerda extendida entre dos puntos $x = 0$ y $x = l$. El movimiento se produce en el plano xy, de manera que cada punto de la cuerda se mueve perpendicularmente al eje x. La función $u(x,t)$ denota el desplazamiento de la cuerda en el instante de tiempo $t > 0$ medido desde el eje x, con las condiciones de frontera

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$$

para todo t, esto es, nuestra cuerda está sujeta en los extremos. Además, consideramos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \end{aligned}$$

para todo x, siendo $\varphi(x)$ función que nos da la forma inicial de la cuerda y $\psi(x)$ las que nos da la velocidad inicial de la misma.

Solución de la ecuación de ondas

El método de separación de variables nos permite determinar la solución del problema anterior

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}\, t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}\, t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

donde A_n y B_n vienen dados por

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, \\ B_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Índice

Preliminares

Las ecuaciones en derivadas parciales rigen multitud de fenómenos físicos, de los que la difusión del calor, la propagación de ondas electromagnéticas o la vibración de una membrana son sólo algunos ejemplos.

Para estudiar estos fenómenos es necesario conocer además de las ecuaciones el dominio sobre el que se aplican y una cierta información adicional sobre la solución en la frontera del dominio, que hemos llamado condiciones de contorno si nos referimos a la frontera ”espacial” y condiciones iniciales si nos referimos a la frontera ”temporal”.

Cuando no se conoce la solución exacta de estos problemas (lo que supone la situación más frecuente) e incluso en algunas ocasiones en las que sí se conoce (pero su tratamiento no es operativo) se hace necesario recurrir a la obtención de aproximaciones numéricas.

Preliminares

Para obtener aproximaciones numéricas restringiremos el estudio a un número finito de puntos del dominio, lo que se conoce como **discretización** del dominio. Es para esos puntos para los que conoceremos la solución numérica aproximada. Entonces se realiza la **discretización** de las ecuaciones, proceso del que se obtendrá un sistema de ecuaciones algebraicas cuya solución es la aproximación buscada. El tamaño de este sistema suele requerir del uso de programas informáticos para su resolución.

Dependiente del tipo de discretización que se realice se obtendrá un tipo de método u otro. Los más usados son el **método de diferencias finitas (MDF)**, el **método de elementos finitos (MEF)** y el **método de volúmenes finitos (MVF)**. Nosotros estudiaremos únicamente el primero de ellos.

En todos estos métodos es necesario realizar también el estudio de la consistencia, estabilidad y convergencia, así como del orden de convergencia.

Índice

Preliminares

El método de diferencias finitas se basa en sustituir las derivadas de una ecuación diferencial por aproximaciones en diferencias finitas, que utilizan únicamente el valor de la función en un conjunto de nodos.

Recordemos las fórmulas de derivación ya estudiadas:

- **Fórmulas descentradas de dos puntos:**

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h),$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h).$$

- **Fórmula centrada de dos puntos:**

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2).$$

Preliminares

De modo análogo a como se obtienen las fórmulas anteriores se pueden obtener también aproximaciones para la segunda derivada.

La fórmula centrada estándar es:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

A continuación introduciremos el método de diferencias finitas con un ejemplo: la aproximación de la ecuación del calor.

Aproximación de la ecuación del calor

Vamos a considerar pues la ecuación de incógnita $u(x,t)$ siguiente:

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \ t \geq 0,$$

con condición inicial

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

y condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0.$$

Aproximación de la ecuación del calor

Discretizamos el dominio utilizando un tamaño de paso fijo $h = \Delta x$ para la variable espacial y un tamaño de paso fijo $k = \Delta t$ para la variable temporal.

De este modo, si dividimos $[0, l]$ en N subintervalos de igual tamaño, $h = \dfrac{l}{N}$, cada nodo x_j del eje x es de la forma

$$x_j = jh, \quad j = 0, \ldots, N.$$

Del mismo modo, cada nodo t_n del eje t es de la forma

$$t_n = nk, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vamos a buscar aproximaciones al valor de u en los puntos de la malla x_j, t_n, aproximaciones a las que llamaremos $u_{j,n}$, esto es,

$$u_{j,n} \approx u(x_j, t_n), \quad j = 0, \ldots, N, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

(Aunque lo hemos escrito así, evidentemente, en algún momento dejaremos de hacer iteraciones en tiempo).

Aproximación de la ecuación del calor

Para obtener un primer esquema aproximamos la derivada respecto al tiempo usando la primera de las fórmulas descentradas que hemos visto:

$$u_t(x_j, t_n) = \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{k} + O(k).$$

Y aproximamos la segunda derivada espacial usando la fórmula centrada antes introducida:

$$u_{xx}(x_j, t_n) = \frac{u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}}{h^2} + O(h^2).$$

Sustituyendo en la ecuación del calor obtenemos una ecuación en diferencias:

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{k} - c^2 \frac{u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}}{h^2} = 0,$$

que despejando $u_{j,n+1}$ queda:

$$u_{j,n+1} = u_{j,n} + c^2 \frac{k}{h^2} \left(u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}\right).$$

Aproximación de la ecuación del calor

Usando la notación

$$s = c^2 \frac{k}{h^2}$$

el esquema en diferencias finitas anterior se puede escribir como

$$u_{j,n+1} = su_{j-1,n} + (1-2s)u_{j,n} + su_{j+1,n}.$$

Las condiciones iniciales para la ecuación en diferencias anterior vienen dadas por

$$u_{j,0} = \varphi(x_j, 0), \quad j = 0, \ldots, N.$$

Asimismo, también disponemos de condiciones de contorno:

$$u_{0,n} = u(0, t_n) = 0, \quad u_{N.n} = u(l, t_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Aproximación de la ecuación del calor

Observaciones

- Fijémonos en que para calcular las aproximaciones correspondientes al tiempo t_{n+1}, $u_{j,n+1}$, hacemos uso, para cada nodo x_j, de los valores correspondientes al tiempo t_n denotados por $u_{j,n}$, $u_{j-1,n}$ y $u_{j+1,n}$.
  Esto es lo que se conoce como **dominio de dependencia numérico** o **stencil**.
- El esquema anterior es un ejemplo de **método explícito**, ya que en él los valores $u_{j,n+1}$ aparecen dados explícitamente, valga la redundancia (podemos expresarlo coloquialmente diciendo que aparecen ”despejados”).
- Desgraciadamente, a pesar lo intuitivo de su obtención, el esquema anterior presenta problemas de estabilidad, lo que además deriva en problemas de convergencia.

▸ Ejemplo 3

Aproximación de la ecuación del calor

Para intentar solventar este problema consideraremos la misma aproximación de la derivada con respecto al tiempo anterior:

$$u_t(x_j, t_n) = \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{k} + O(k),$$

pero una aproximación diferente de la segunda derivada espacial:

$$u_{xx}(x_j, t_n) = \frac{u_{j+1,n+1} - 2u_{j,n+1} + u_{j-1,n+1}}{h^2} + O(h^2),$$

lo que sustituyendo en la ecuación da lugar a

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{k} - c^2 \frac{u_{j+1,n+1} - 2u_{j,n+1} + u_{j-1,n+1}}{h^2} = 0,$$

o equivalentemente,

$$u_{j,n+1} = u_{j,n} + c^2 \frac{k}{h^2} \left(u_{j+1,n+1} - 2u_{j,n+1} + u_{j-1,n+1} \right).$$

Aproximación de la ecuación del calor

Usando de nuevo la notación

$$s = c^2 \frac{k}{h^2}$$

el esquema en diferencias finitas anterior se puede escribir como

$$u_{j,n+1} = u_{j,n} + s(u_{j-1,n+1} - 2u_{j,n+1} + u_{j+1,n+1}),$$

o bien como

$$-su_{j-1,n+1} + (1+2s)u_{j,n+1} - su_{j+1,n+1} = u_{j,n}.$$

De nuevo las condiciones iniciales vienen dadas por

$$u_{j,0} = \varphi(x_j, 0), \quad j = 0, \dots, N,$$

y las de contorno por

$$u_{0,n} = u(0, t_n) = 0, \quad u_{N.n} = u(l, t_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aproximación de la ecuación del calor

Observaciones

- Ahora, para calcular las aproximaciones $u_{j,n+1}$ hacemos uso de $u_{j,n}$, pero también de $u_{j-1,n+1}$, y $u_{j+1,n+1}$, por lo que este método tiene un stencil diferente.
- El esquema anterior es un ejemplo de **método implícito**, para cuya resolución hemos de resolver una sistema de ecuaciones acopladas.
- Este esquema es estable y convergente.

Ejemplo 4

Aproximación de la ecuación del calor

Observaciones

- Se pueden construir una gran variedad de métodos para la ecuación del calor utilizando distintas fórmulas de derivación.
- Que el anterior método explícito no sea estable no significa que no existan otros métodos explícitos que sí funcionen bien para esta ecuación, además de ser de más fácil resolución que los métodos implícitos.
- Una estrategia habitual es utilizar un promedio entre un esquema explícito y un esquema implícito. Un ejemplo, utilizando el esquema explícito y el esquema implícito anterior para la ecuación el calor, es el conocido como esquema de Crank-Nicolson.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación del calor en una barra de longitud 10 unidades, con $c = 1$, condiciones de contorno nulas y condición inicial

$$\varphi(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right).$$

Como la solución de la ecuación del calor es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t},$$

con A_n los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier en senos de la función $\varphi(x)$ en el intervalo $(0,l)$,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx,$$

en este caso tenemos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{10}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2 t}.$$

Ejemplo 1 (continuación)

Y como la condición inicial viene ya expresada como una serie de Fourier en que el único sumando no nulo es $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right)$, correspondiente a $n = 1$, deducimos que

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

por lo que, finalmente, tenemos que

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}x\right) e^{-\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 t}.$$

Volver

Ejemplo 2

Una cuerda de guitarra, de longitud l, está sujeta por sus extremos. Se tañe la cuerda en $x = a$, desplazándola una distancia h. Hállese la forma de la cuerda en cualquier instante posterior al tañido.

Hemos de resolver la ecuación de ondas con condiciones de contorno homogéneas, y condiciones iniciales la forma inicial de la cuerda,

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a, \\ \dfrac{h(l-x)}{l-a} & \text{si } a \leq x \leq l, \end{cases}$$

y la velocidad inicial de la misma,

$$u_t(x,0) = \psi(x) = 0.$$

Volver

Ejemplo 2 (continuación)

Como la solución de la ecuación de ondas es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

con

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\qquad B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l\psi(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

en este caso tenemos que $B_n=0$, y únicamente hemos de calcular A_n:

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{l}\int_0^a\frac{hx}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx+\frac{2}{l}\int_a^l\frac{h(l-x)}{l-a}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\\ &= \frac{2hl^2}{a(l-a)n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{l}\right).\end{aligned}$$

Por tanto, la forma de la cuerda en el instante t viene dada por

$$u(x,t)=\frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Ejemplo 3

Hacer una iteración del esquema explícito en el caso en que $N = 4$.

Como $N = 4$, se tiene que $h = \frac{l}{4}$, y los nodos espaciales son:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{l}{4}, \quad x_2 = \frac{l}{2}, \quad x_3 = \frac{3l}{4}, \quad x_4 = l.$$

Partimos de los valores de la función, conocidos en $t_0 = 0$, y hacemos una iteración en tiempo para aproximaciones de los valores de la función en $t_1 = k$.

Es decir, conocemos los siguientes valores gracias a las condiciones iniciales (que han de ser compatibles con las condiciones de contorno consideradas en los extremos del intervalo):

$$\begin{aligned} u_{0,0} &= \varphi(x_0) = 0, \\ u_{1,0} &= \varphi(x_1), \\ u_{2,0} &= \varphi(x_2), \\ u_{3,0} &= \varphi(x_3), \\ u_{4,0} &= \varphi(x_4) = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 (continuación)

Y buscamos aproximaciones de los valores de la función en $t_1 = k$, teniendo en cuenta que ya conocemos los valores correspondientes a la frontera:

$$
\begin{array}{lcllll}
u_{0,1} = 0, & & & & & \\
u_{1,1} = su_{0,0} + (1-2s)u_{1,0} + su_{2,0} & \rightarrow & u_{1,1} = & (1-2s)u_{1,0} & +su_{2,0} & , \\
u_{2,1} = su_{1,0} + (1-2s)u_{2,0} + su_{3,0} & \rightarrow & u_{2,1} = & su_{1,0} & +(1-2s)u_{2,0} & +su_{3,0}, \\
u_{3,1} = su_{2,0} + (1-2s)u_{3,0} + su_{4,0} & \rightarrow & u_{3,1} = & & su_{2,0} & +(1-2s)u_{3,0}, \\
u_{4,1} = 0. & & & & &
\end{array}
$$

Fijémonos en que lo anterior puede expresarse matricialmente (obviando los valores en la frontera, que serán siempre conocidos):

$$
\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2s & s & 0 \\ s & 1-2s & s \\ 0 & s & 1-2s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{pmatrix}.
$$

Volver

Ejemplo 4

Hacer una iteración del esquema implícito en el caso en que $N = 4$.

De nuevo, los nodos espaciales son:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{l}{4}, \quad x_2 = \frac{l}{2}, \quad x_3 = \frac{3l}{4}, \quad x_4 = l,$$

y partimos de los valores de la función en $t_0 = 0$ para obtener aproximaciones de los valores de la función en $t_1 = k$.

Conocemos pues los siguientes valores:

$$\begin{aligned} u_{0,0} &= \varphi(x_0) = 0, \\ u_{1,0} &= \varphi(x_1), \\ u_{2,0} &= \varphi(x_2), \\ u_{3,0} &= \varphi(x_3), \\ u_{4,0} &= \varphi(x_4) = 0. \end{aligned}$$

Volver

Ejemplo 4 (continuación)

Y buscamos aproximaciones de los valores de la función en $t_1 = k$, teniendo en cuenta que ya conocemos los valores correspondientes a la frontera. El esquema en este caso queda:

$$
\begin{array}{llllll}
u_{0,1} = 0, & & & & & \\
-su_{0,1} + (1+2s)u_{1,1} - su_{2,1} = u_{1,0} & \rightarrow & (1+2s)u_{1,1} & -su_{2,1} & & = u_{1,0}, \\
-su_{1,1} + (1+2s)u_{2,1} - su_{3,1} = u_{2,0} & \rightarrow & -su_{1,1} & +(1+2s)u_{2,1} & -su_{3,1} & = u_{2,0}, \\
-su_{2,1} + (1+2s)u_{3,1} - su_{4,1} = u_{3,0} & \rightarrow & & -su_{2,1} & +(1+2s)u_{3,1} & = u_{3,0}, \\
u_{4,1} = 0. & & & & &
\end{array}
$$

Por tanto, para encontrar los nuevos valores hemos de resolver el siguiente sistema:

$$
\begin{pmatrix} 1+2s & -s & 0 \\ -s & 1+2s & -s \\ 0 & -s & 1+2s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{pmatrix}.
$$

Volver