Tema 1: Circuitos Combinacionales

<u>Contenidos</u>

1.1 Introducción

1.2 Aritmética

1.3 Álgebra de Boole

1.1 Introducción

Señales y Sistemas

Un sistema es un conjunto de partes o elementos que interactúan entre sí para lograr un objetivo.
Los sistemas abiertos reciben (entrada) datos, energía o materia del ambiente y proveen (salida) información, energía o materia.
El sistema establece una relación entre las salidas y las entradas
En nuestro campo un Sistema es una función matemática que se aplica a la entrada

$$T : \Sigma \rightarrow \Omega$$

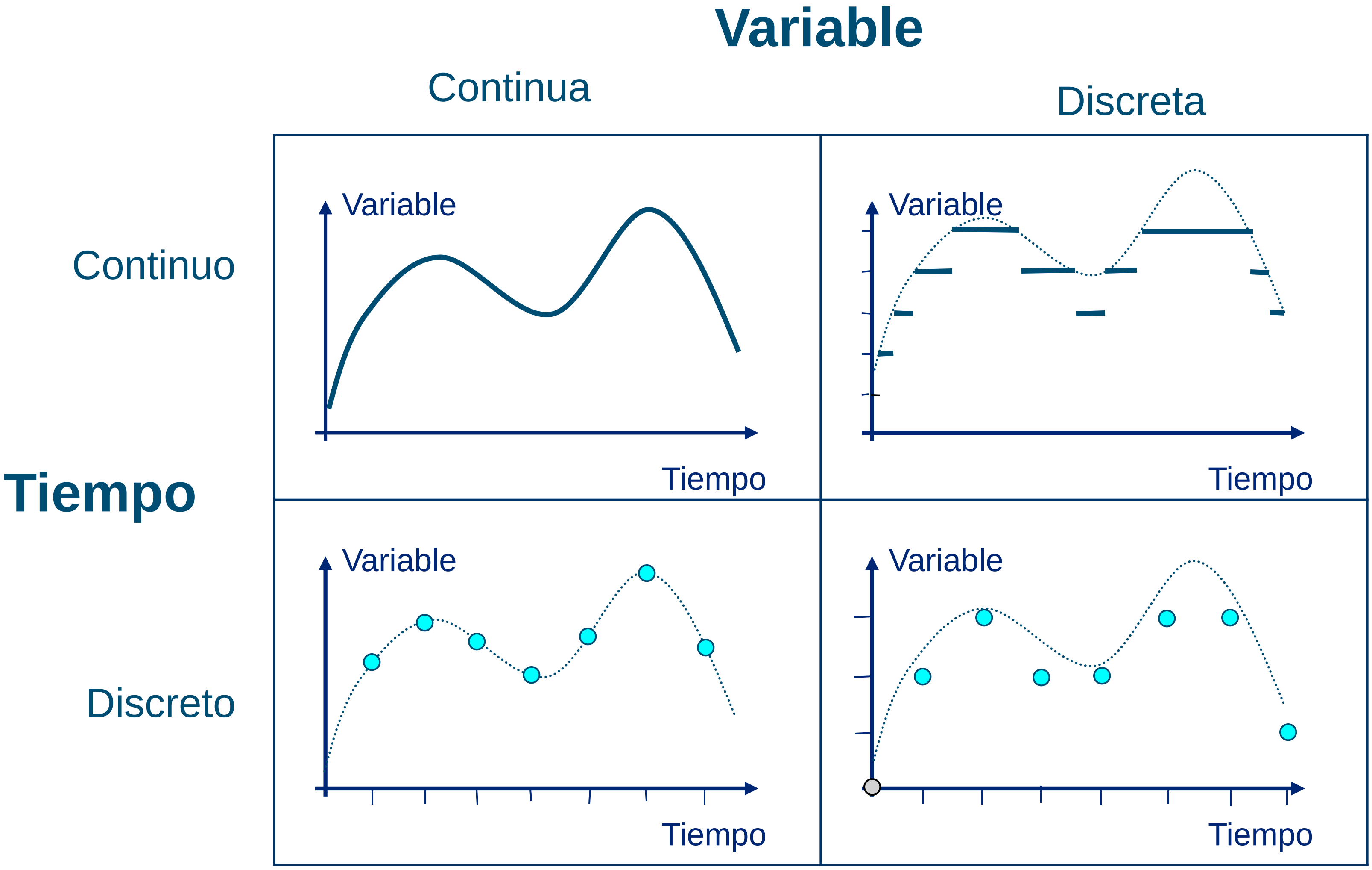
$$\sigma \in \Sigma \rightarrow \omega = T(\sigma) \in \Omega$$

Σ: Alfabeto de entrada

Ω: Alfabeto de salida

1.1 Introducción

Clasificación de las Señales



1.1 Introducción

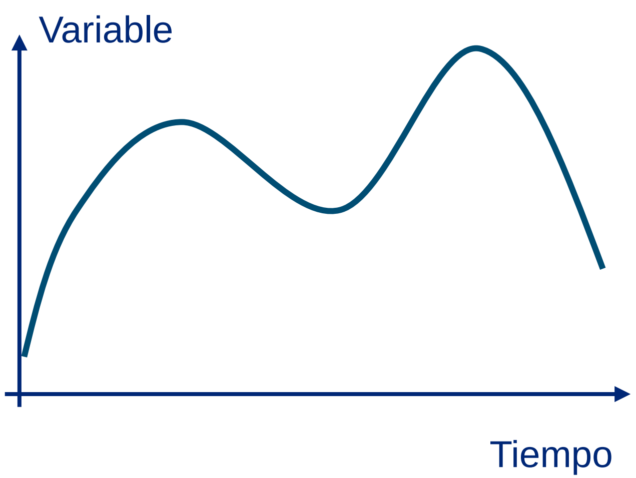
Clasificación de Señales

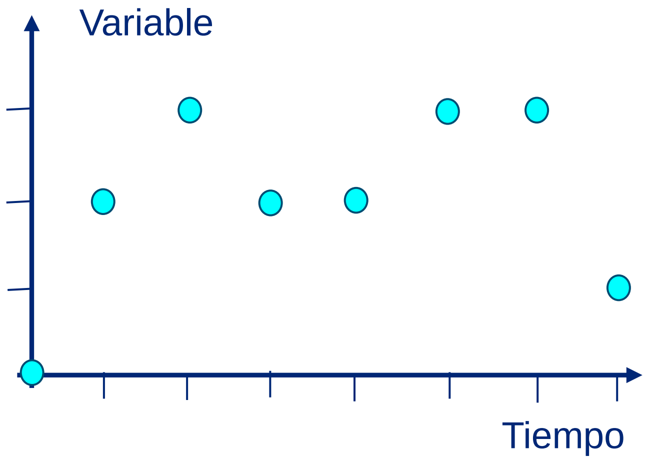
Señales Analógicas

Variable Continua
Tiempo Continuo

Señales Digitales

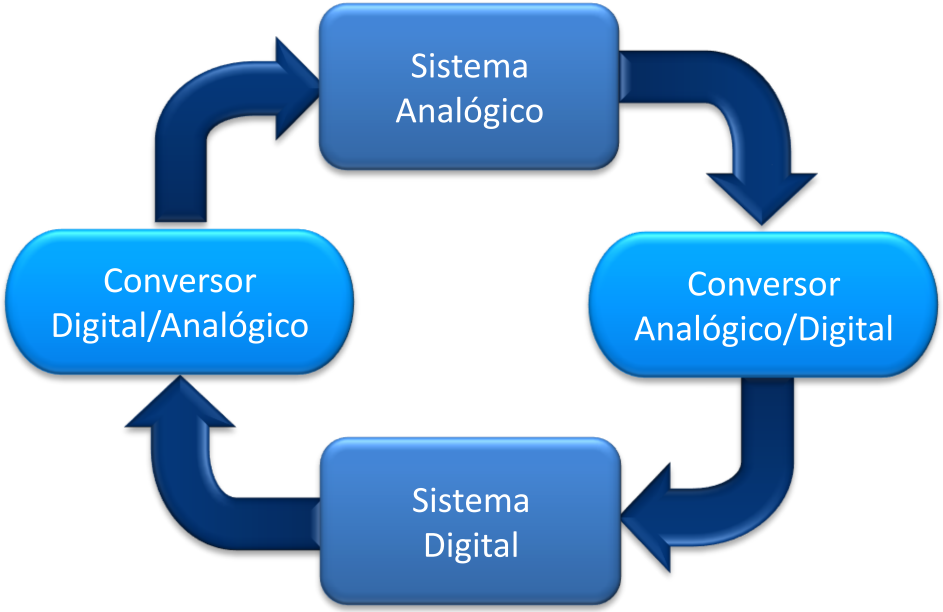
Variable Discreta
Tiempo Discreto





1.1 Introducción

Interconexión entre Sistemas Analógicos y Digitales



1.1 Introducción

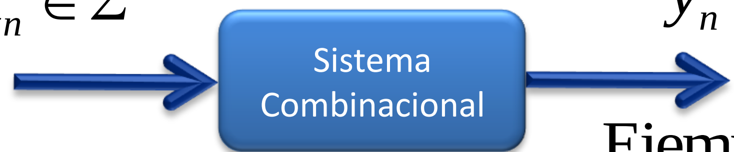
Clasificación de los Sistemas Electrónicos Digitales

- **Sistemas Combinacionales**

No tienen memoria

$$x_n \in \Sigma$$

$$y_n = T(x_n) \in \Omega$$



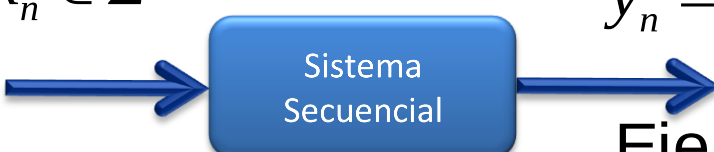
$$\text{Ejemplo}: y_{n+1} = x_{n+1} + 2$$

- **Sistemas Secuenciales**

Tienen memoria

$$x_n \in \Sigma$$

$$y_n = T(x_n, y_{n-j}) \in \Omega$$



Ejemplo: $y_{n+1} = x_{n+1} + 2 + y_n$

1.2 Aritmética

- Representaciones numéricas en distintas **BASES**
- Operaciones Aritméticas con números positivos
- Números negativos. Representación en **Complemento A2**
- Operaciones Aritméticas con números negativos

1.3 Álgebra de Boole

Definición

Se define *álgebra de Boole* como:

•Un conjunto finito *B* con al menos 2 elementos, *N* (elemento nulo), *U* (elemento universal)

•Dos operaciones (*,+) que cumplen los siguientes axiomas:

• Las operaciones *,+, , deben ser cerradas

$$\forall x, y \in B \begin{cases} x \cdot y \in B \\ x + y \in B \end{cases}$$

• Las operaciones con los elementos N,U deben cumplir las siguientes propiedades

$$x \cdot N = N \qquad x + N = x$$

$$x \cdot U = x \qquad x + U = U$$

• Propiedad distributiva:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

• Propiedad conmutativa:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x + y = y + x$$

• Corolario de complementación:

$$\forall x \in B, \exists \bar{x} \in B \begin{cases} x \cdot \bar{x} = N \\ x + \bar{x} = U \end{cases}$$

1.3 Álgebra de Boole

Propiedades deducidas de los postulados

- Propiedad de Idempotencia:

$$x \cdot x = x$$

Dem: $$x + x = x$$

$$x = x \cdot U = x(x + \overline{x}) = x \cdot x + x \cdot \overline{x} = x \cdot x + N = x \cdot x$$

- Propiedad Asociativa:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

- Propiedad del Involución:

$$\overline{\left(\overline{x}\right)} = x$$

- Propiedad de Absorción:

$$x + (x \cdot y) = x$$

$$x \cdot (x + y) = x$$

- Propiedad del Consenso:

$$x + (\overline{x} \cdot y) = x + y$$

$$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

- Leyes de De Morgan:

$$\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{(x + y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

1.3 Álgebra de Boole

Conjunto y Operaciones

- Conjunto Binario:

$$B = \{0,1\}$$

$$N = 0$$

$$U = 1$$

- Operaciones:

Suma Lógica
OR

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Producto Lógico
AND

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Negación Lógica
NOT

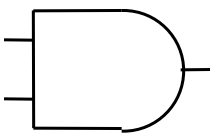
—	
0	1
1	0

1.3 Álgebra de Boole

Implementación de funciones booleanas

AND

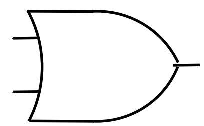
$$z = x_1 \cdot x_2$$



x_1x_2	z
00	0
01	0
10	0
11	1

OR

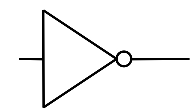
$$z = x_1 + x_2$$



x_1x_2	z
00	0
01	1
10	1
11	1

NOT

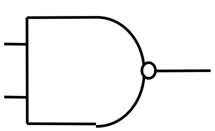
$$z = \overline{x}_1$$



x_1	z
0	1
1	0

NAND

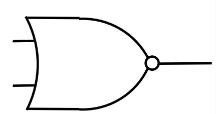
$$z = \overline{x_1 \cdot x_2}$$



x_1x_2	z
00	1
01	1
10	1
11	0

NOR

$$z = \overline{x_1 + x_2}$$

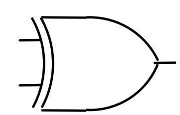


x_1x_2	z
00	1
01	0
10	0
11	0

XOR

$$z = x_1 \oplus x_2$$

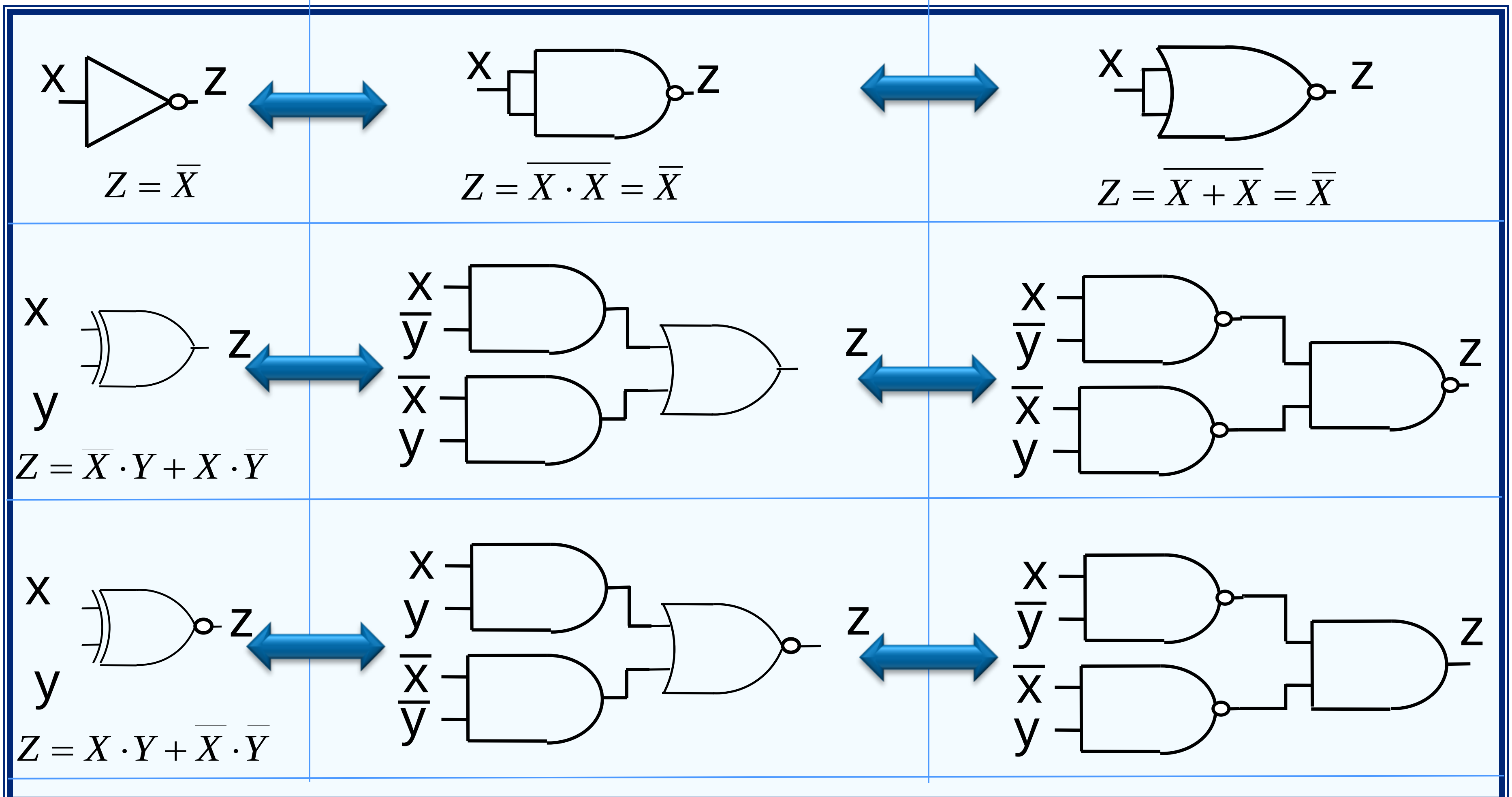
$$z = x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1x_2$$



x_1x_2	z
00	0
01	1
10	1
11	0

1.3 Álgebra de Boole

Equivalencias



1.3 Álgebra de Boole

Formas normales de una función booleana

- **Mintérmino**: Producto de todas las variables de la función, negadas o no

- **Maxtérmino**: Suma de todas las variables de la función, negadas o no

$$m0 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \qquad M0 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$m1 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \qquad M1 = x_1 + x_2 + \overline{x}_3$$

$$m2 = \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \qquad M2 = x_1 + \overline{x}_2 + x_3$$

$$m3 = \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad M3 = x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$$

$$m4 = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \qquad M4 = \overline{x}_1 + x_2 + x_3$$

$$m5 = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \qquad M5 = \overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3$$

$$m6 = x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \qquad M6 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3$$

$$m7 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad M7 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$$

1.3 Álgebra de Boole

Formas normales de una función booleana

- Forma normal conjuntiva: Producto de maxtérminos

$$Mi \cdot Mj \cdot Mk \qquad \left(x_1 + \overline{x}_2\right) \cdot \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2\right)$$

- Forma normal disyuntiva: Suma de mintérminos

$$mi + mj + mk + ml \qquad \left(x_1 \cdot \overline{x}_2\right) + \left(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} mi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \qquad \prod_{i=1}^{2^n-1} Mi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

1.3 Álgebra de Boole

Tabla de verdad

Mintérminos	Maxtérminos
$(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3)$	$(x_1 + x_2 + x_3)$
$(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3)$	$(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)$
$(\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3)$	$(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)$
$(\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$	$(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$
$(x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3)$	$(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$
$(x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3)$	$(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$
$(x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3)$	$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)$
$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$	$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$

$x_1x_2x_3$	z
000	0
001	0
010	1
011	1
100	0
101	0
110	1
111	0

$$\boxed{z = (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z = {} & (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \\ & \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \end{aligned}}$$

1.3 Álgebra de Boole

Ejemplo (Diseño de sumador binario)

Tabla de verdad

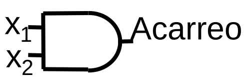
x_1x_2	Acarreo	Suma
00	0	0
01	0	1
10	0	1
11	1	0

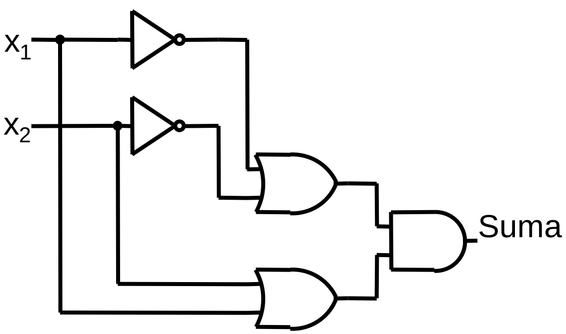
Formas canónicas

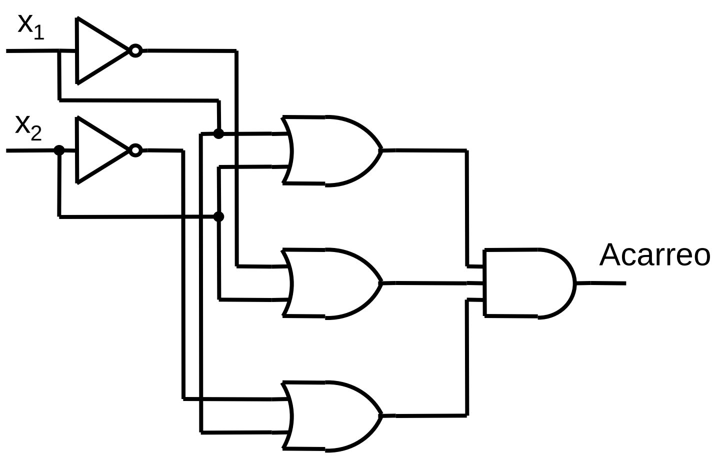
$$Acarreo = x_1 \cdot x_2 = (x_1 + x_2)\cdot(x_1 + \bar{x}_2)\cdot(\bar{x}_1 + x_2)$$

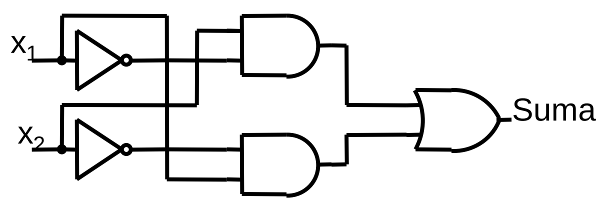
$$Suma = \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\cdot(x_1 + x_2)$$

Realización









1.3 Álgebra de Boole

Simplificación de funciones booleanas (Mapas de Karnaugh)

2 variables

x_1 / x_2	0	1
0	0	1
1	2	3

3 variables

x_2x_1 / x_3	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Código Gray

4 variables

x_2x_1 / x_4x_3	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

5 variables

$x_5 = 0$

x_2x_1 / x_4x_3	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_5 = 1$

x_2x_1 / x_4x_3	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

1.3 Álgebra de Boole

Mapas de Karnaugh

Ejemplo Sumador:

$$Suma = \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 = \sum m(1,2)$$

x_1 / x_2	0	1
0	0	1
1	1	0

$$Acarreo = x_1 \cdot x_2 = \sum m(3)$$

x_1 / x_2	0	1
0	0	0
1	0	1

Ejemplo Comparador: $x_2 x_1 \geq x_4 x_3$

$$Comparador = \sum m(0,1,2,3,5,6,7,15,11,10)$$

$x_4x_3x_2x_1$	Valor
0 0 0 0	1
0 0 0 1	1
0 0 1 0	1
0 0 1 1	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	1
0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
....	

x_2x_1 / x_4x_3	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	0
10	0	0	1	1

1.3 Álgebra de Boole

Mapas de Karnaugh (Simplificación)

• Implicantes

x_2x_1 / x_4x_3	00	01	11	10
00	0 $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	0 $_{2}$
01	1 $_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	0 $_{6}$
11	1 $_{12}$	1 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	1 $_{8}$	1 $_{9}$	0 $_{11}$	0 $_{10}$

Agrupaciones de 2^n elementos adyacentes

$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$ +
$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}$ +
$\overline{x_2} \cdot x_3$ +
$x_1 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$ +
$\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$

• Implicantes primos

x_2x_1 / x_4x_3	00	01	11	10
00	0 $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	0 $_{2}$
01	1 $_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	0 $_{6}$
11	1 $_{12}$	1 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	1 $_{8}$	1 $_{9}$	0 $_{11}$	0 $_{10}$

No están totalmente incluidos en otro implicante

$x_1 \cdot \overline{x_4}$ +
$\overline{x_2} \cdot x_4$ +
$\overline{x_2} \cdot x_3$ +
$x_1 \cdot \overline{x_2}$

• Implicantes primos esenciales

x_2x_1 / x_4x_3	00	01	11	10
00	0 $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{3}$	0 $_{2}$
01	1 $_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	0 $_{6}$
11	1 $_{12}$	1 $_{13}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
10	1 $_{8}$	1 $_{9}$	0 $_{11}$	0 $_{10}$

Si se eliminan la función queda algún elemento sin agrupar

$x_1 \cdot \overline{x_4}$ +
$\overline{x_2} \cdot x_4$ +
$\overline{x_2} \cdot x_3$

1.3 Álgebra de Boole

Mapas de Karnaugh

Ejemplo Comparador: $x_2 x_1 \geq x_4 x_3$

$$Comparador == \sum m(0,1,2,3,5,6,7,15,11,10)$$

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	0
10	0	0	1	1

Simplificación

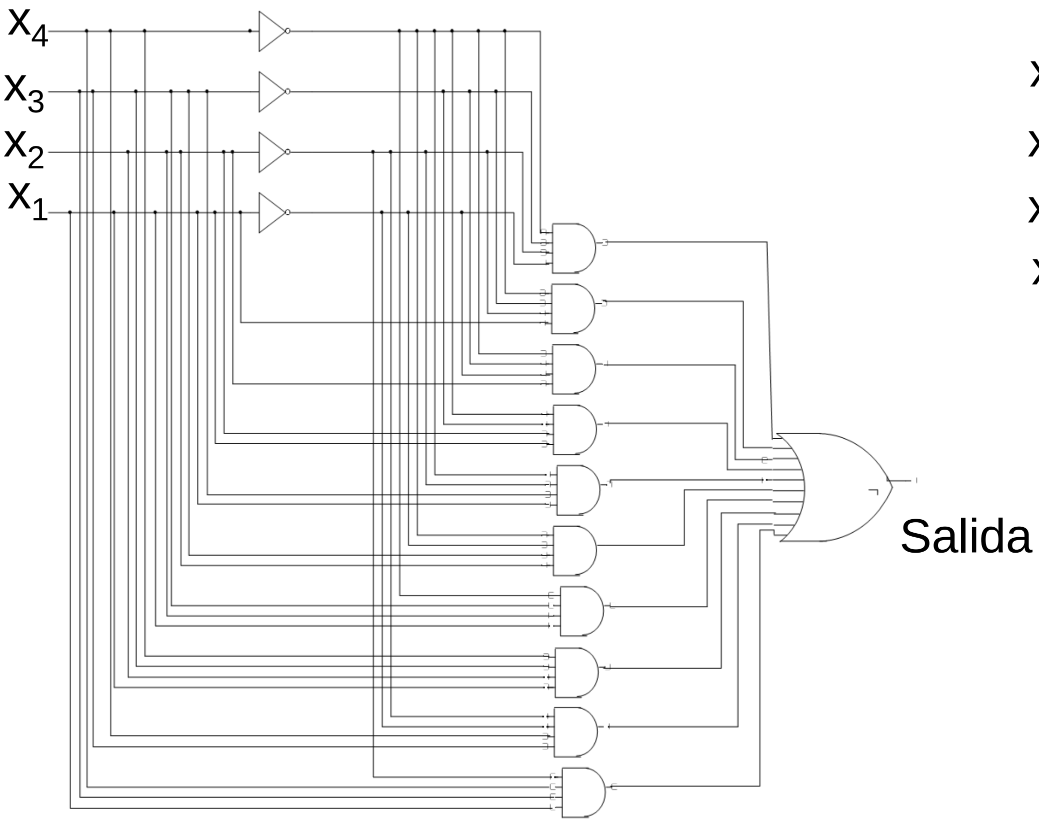
$$Comparador = \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_3 + x_2 \cdot x_1 + x_1 \cdot \bar{x}_4$$
$$+ x_2 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot \bar{x}_3$$

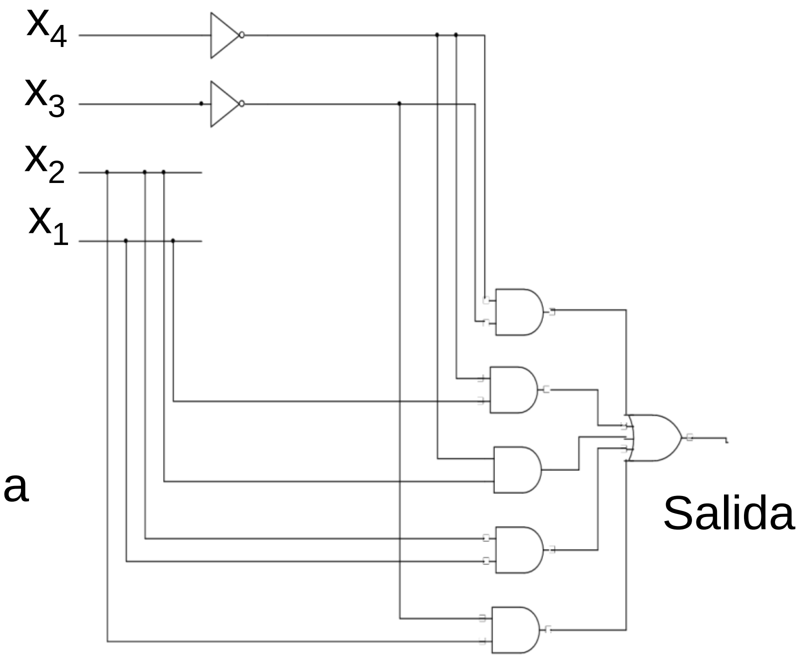
¡¡ Ojo que el mapa es cerrado o cíclico !!

1.3 Álgebra de Boole

Realización

Ejemplo Comparador: $x_2 x_1 \geq x_4 x_3$





1.3 Álgebra de Boole

Ejemplo

Diseñar un circuito con 4 entradas (**a**,**b**,**c**,**d**) y una salida **s** que opere de la siguiente manera:

- **s** es 0 si 3 o más entradas son 1 salvo que **a** sea 0
- Si **a** es 0 y otras dos entradas son 1, entonces **s** es 0
- Si **a** es 1 y otra entrada es 1, **s** es 0
- Si una sola entrada que no sea **b** es 1 entonces **s** es 1
- **s** es 1 si a=b=c=d=0

abcd	s
0000	1
0001	1
0010	1
0011	0
0100	-
0101	0
0110	0
0111	-
1000	1
1001	0
1010	0
1011	0
1100	0
1101	0
1110	0
1111	0

$$s = \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{d}$$

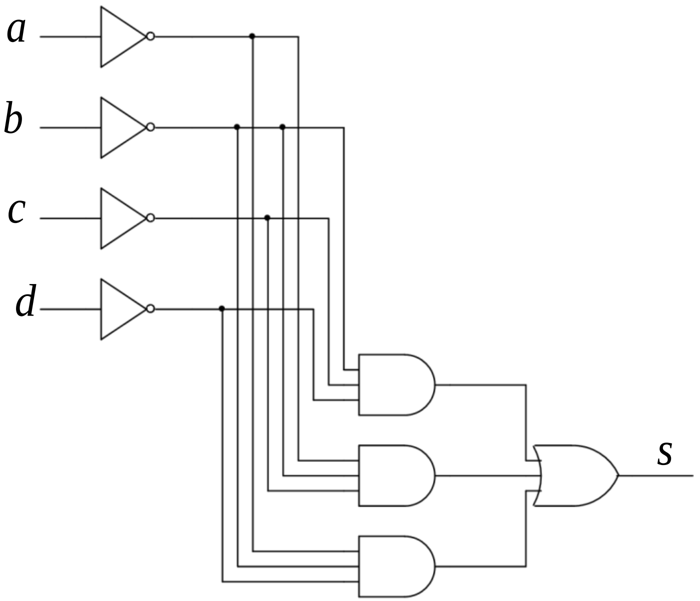
-,X Indiferencia

cd / *ab*	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1_{0}	1_{1}	0_{3}	1_{2}
01	X_{4}	0_{5}	X_{7}	0_{6}
11	0_{12}	0_{13}	0_{15}	0_{14}
10	1_{8}	0_{9}	0_{11}	0_{10}

1.3 Álgebra de Boole

Ejemplo

$$s = \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{d}$$



1.3 Álgebra de Boole

Ejemplo

En una unidad se reciben 4 bits en BCD. Determinar mediante un circuito la presencia de los múltiplos de 3 o de 4

	abcd	s3	s4
0	0000	0	0
1	0001	0	0
2	0010	0	0
3	0011	1	0
4	0100	0	1
5	0101	0	0
6	0110	1	0
7	0111	0	0
8	1000	0	1
9	1001	1	0
	1010	X	X
	1011	X	X
	1100	X	X
	1101	X	X
	1110	X	X
	1111	X	X

$$s3 = a \cdot d + \overline{b} \cdot c \cdot d + b \cdot c \cdot \overline{d}$$

cd / ab	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	1_{3}	0_{2}
01	0_{4}	0_{5}	0_{7}	1_{6}
11	X_{12}	X_{13}	X_{15}	X_{14}
10	0_{8}	1_{9}	X_{11}	X_{10}

$$s4 = a \cdot \overline{d} + b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}$$

cd / ab	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	0_{3}	0_{2}
01	1_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}
11	X_{12}	X_{13}	X_{15}	X_{14}
10	1_{8}	0_{9}	X_{11}	X_{10}

1.3 Álgebra de Boole

Ejemplo

$$s3 = a \cdot d + \overline{b} \cdot c \cdot d + b \cdot c \cdot \overline{d}$$

$$s4 = a \cdot \overline{d} + b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}$$