

TEMA 2

CONDUCTORES, CONDENSADORES Y DIELECTRICOS

1.- Conductores en equilibrio electrostático

La gran diferencia entre el comportamiento eléctrico de los conductores y de los aislantes fue observada incluso antes del descubrimiento de la conducción eléctrica. Gilbert había clasificado los materiales de acuerdo con su capacidad para ser cargados: llamó **eléctricos** a los que podían ser cargados fácilmente (aislantes) y **no eléctricos** a los que no podían ser cargados (conductores). Utilizando sólo la sensación fisiológica para la detección de cargas, Cavendish comparó las posibilidades conductoras de muchas sustancias.

Debido a la enorme variación en la posibilidad para conducir la electricidad, es conveniente clasificar las sustancias en **superconductoras**, **conductoras**, **semiconductoras** y **aislantes**. La facilidad de un material para conducir se mide por su conductividad: la de un conductor típico es del orden de 10^{15} veces mayor que la de un aislante típico. Daremos una definición precisa de conductividad en el tema 3, cuando estudiemos la corriente eléctrica.

Una propiedad importante de los conductores es la disponibilidad de cargas libres para moverse. La fuente de esta carga libre en un conductor son los electrones que no están ligados a ningún átomo: por ejemplo, en un solo átomo de cobre 29 electrones están ligados al núcleo por atracción electrostática de su carga positiva; los electrones exteriores están ligados más débilmente que los interiores debido a la mayor distancia al núcleo positivo y a la repulsión de los electrones interiores (efecto pantalla). Cuando se combina un gran número de átomos de cobre para formar cobre metálico, las ligaduras de los electrones a un átomo simple se sustituye por la interacción con los átomos vecinos, con lo que uno o varios de los electrones exteriores de cada átomo dejan de estar ligados y quedan libres para moverse por todo el metal. Denominamos **conductores en equilibrio electrostático** a *aquellos que tienen toda su carga en reposo respecto de un observador inercial*. Para los conductores que cumplan esta condición, demostraremos que:

- a) El campo eléctrico en su interior es nulo (tanto si está cargado como si no lo está)
- b) Cualquier carga en exceso que posea el conductor debe residir en la superficie del mismo
- c) El campo eléctrico en la superficie de un conductor cargado y sus proximidades es perpendicular a dicha superficie y vale σ/ϵ_0

d) Todo el conductor (tanto si está cargado como si no lo está) es un volumen equipotencial

- a) El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio es nulo

En efecto, si colocamos un conductor en un campo eléctrico externo, la carga libre del conductor se mueve por él hasta crear un campo eléctrico tal que anula el campo exterior en el interior del conductor (Figura 1). Consideremos una

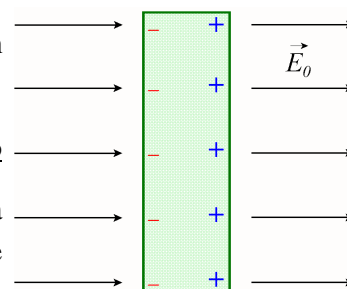


Figura 1

carga en el interior del conductor: si existiera un campo eléctrico, $\vec{E}_{int e}$, en el interior del conductor, existiría una fuerza $q\vec{E}_{int e}$ sobre dicha carga y, si está libre para moverse, se aceleraría, en contra de la hipótesis de que el conductor está en equilibrio. Así pues, el campo eléctrico en el interior del conductor es nulo.

El comportamiento de la carga libre de un conductor situado en un campo eléctrico es siempre el mismo, sin que importe la forma geométrica del conductor. El tiempo necesario para alcanzar el equilibrio depende de la conductividad de la sustancia conductora, pero es del orden de 10^{-16} s por lo que, en la práctica, podemos considerar que el equilibrio se alcanza instantáneamente.

b) El exceso de carga se sitúa en la superficie del conductor.

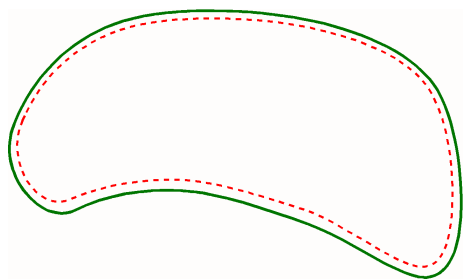


Figura 2: La línea discontinua representa la superficie gaussiana

Para demostrarlo, tomaremos una superficie gaussiana idéntica a la superficie del conductor, situada en su interior e infinitamente próxima a la superficie del conductor (Figura 2). Como en el equilibrio electrostático el campo es nulo en cualquier punto del interior del conductor, será nulo en cualquier punto de nuestra superficie gaussiana, con lo que el flujo a través de ella será nulo. Como dicho flujo, según la ley de Gauss, es igual a la carga neta encerrada por la superficie dividida por ϵ_0 , llegamos a la conclusión de que la carga neta en el interior del conductor (no olvidemos que nuestra superficie gaussiana está infinitamente próxima a la superficie del conductor) es nula y, por tanto, la carga neta que posea el conductor estará distribuida en su superficie.

c) El campo eléctrico en la superficie es perpendicular a ella y vale σ/ϵ_0

Para hallar el campo eléctrico justo en la parte exterior de un conductor en equilibrio, consideraremos una pequeña porción de la superficie del mismo (lo suficientemente pequeña como para poder considerarla plana) con una densidad de carga σ que tenga una variación despreciable en la porción escogida. Como superficie gaussiana escogeremos una caja cilíndrica con una cara justo en el exterior del conductor y paralela a su superficie y la otra justo en el interior del conductor (Figura 3). En la superficie del conductor, el campo ha de ser perpendicular a la misma ya que si tuviese alguna componente tangencial, ésta ejercería una fuerza sobre las cargas de la superficie y las movería: este movimiento redistribuiría las cargas hasta conseguir el equilibrio, es decir, hasta el reposo, con lo que dicha componente tangencial sería nula. El flujo del campo a través de nuestra superficie gaussiana es el flujo a través de la cara circular del cilindro situada en el exterior del conductor, ya que en la superficie lateral el campo es perpendicular a la superficie (con lo que $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$) y en la interior el campo es nulo. Así pues,

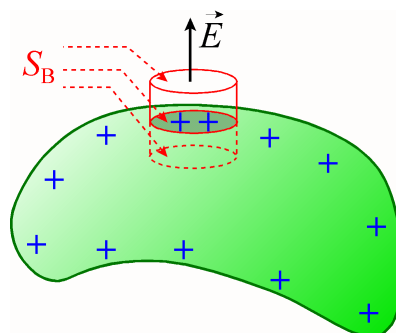


Figura 3

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_B} E dS = ES_B = \{\text{Teorema de Gauss}\} = \frac{q_{int e}}{\epsilon_0} = \{q_{int e} = \sigma S_B\} = \frac{\sigma S_B}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [2.1]$$

d) Un conductor en equilibrio electrostático es un volumen equipotencial

En efecto, en el tema anterior veíamos que el campo es perpendicular a las superficies equipotenciales. Acabamos de demostrar que el campo en la superficie de un conductor cargado y en equilibrio es perpendicular a su superficie, luego, la superficie del conductor es una superficie equipotencial.

Por otra parte, puesto que el campo eléctrico es nulo en cualquier punto del interior, la d.d.p. entre dos puntos cualesquiera del interior $\left(\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}\right)$ será cero, con lo que todos los puntos del interior del conductor están al mismo potencial. Como quiera que la función potencial es continua por definición (ya que es derivable), el valor del potencial en el interior debe coincidir con su valor en la superficie, con lo que queda demostrado que el conductor constituye un volumen equipotencial.

El hecho de que la superficie del conductor sea equipotencial hace que la carga se distribuya por la misma en forma inversa a su radio en cada punto. Para razonarlo podemos imaginar dos esferas de distinto radio cargadas al mismo potencial (con lo que, obviamente, tendrán cargas distintas)

$$V_1 = k_0 \frac{q_1}{R_1} = \left\{ q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2 \right\} = 4\pi k_0 \sigma_1 R_1 \quad * \quad V_2 = k_0 \frac{q_2}{R_2} = 4\pi k_0 \sigma_2 R_2$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow 4\pi k_0 \sigma_1 R_1 = 4\pi k_0 \sigma_2 R_2 \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

Si ahora ponemos en contacto las dos esferas (a través de un cable conductor, por ejemplo), no fluirá carga de una a otra debido a que están al mismo potencial y podemos considerar a las dos esferas como un único conductor. La expresión $\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$ nos dice que allí donde el radio sea menor, la densidad de carga será mayor. Puesto que el campo eléctrico en la superficie y en sus proximidades es directamente proporcional a σ , dicho campo es inversamente proporcional al radio de curvatura local de la superficie; si el conductor tiene puntas de pequeño radio de curvatura, el campo en la superficie de las puntas y en sus proximidades es muy intenso para potenciales relativamente bajos.

2.- Capacidad de un conductor. Unidades.

Definimos **capacidad de un conductor** como la *relación entre la carga que adquiere y el potencial utilizado para cargarlo*.

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad [2.2]$$

Es de destacar que la capacidad así definida es una magnitud intrínsecamente positiva, pues la carga de un conductor y su potencial son del mismo signo. Por otra parte, puesto que el potencial de un conductor es siempre directamente proporcional a su carga, *la capacidad* no depende ni de la carga ni del potencial: *depende sólo de la forma y tamaño del conductor*. Así, por ejemplo, para un conductor esférico, tenemos:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{k_0 \frac{Q}{R}} = \frac{R}{k_0} \Rightarrow C = \frac{R}{k_0} \quad [2.3]$$

La unidad de capacidad en el Sistema Internacional es el **Faradio**, que se define como la *capacidad de un conductor que adquiere una carga de un culombio a un potencial de un voltio*. El Faradio es una unidad muy grande, por eso son mucho más usados sus submúltiplos decimales: μF , nF y pF . (Si queremos que un conductor esférico tenga una capacidad de 1 F, su radio ha de ser de $\approx 9 \cdot 10^9 \text{ m}$!, ¡más de 20 veces la distancia de la Luna a la Tierra!).

3.- Condensadores

Un **condensador** es un *dispositivo constituido por dos conductores* (que suelen denominarse armaduras o placas) *separados por un medio aislante* (vacío, aire, vidrio, plástico, ...). Cuando dicho medio aislante no es el vacío se denomina dieléctrico. El condensador se usa para almacenar carga y energía. Al establecer una d.d.p. entre sus armaduras las placas adquieren una misma carga pero de signos opuestos entre sí. Se considera cargada positivamente la armadura conectada al potencial mayor y negativamente la conectada al potencial menor.

La **capacidad de un condensador** se define como la *relación entre la carga de una cualquiera de sus armaduras y la diferencia de potencial establecida entre esa armadura y la otra, para cargarlo*. Por lo tanto, es una magnitud positiva que, evidentemente, se mide en Faradios en el Sistema Internacional.

$$C \equiv \frac{Q_+}{V_+ - V_-} = \frac{Q_-}{V_- - V_+} \quad [2.4]$$

Puesto que $(V_+ - V_-)$ o $(V_- - V_+)$ son proporcionales a la carga de cada armadura, *la capacidad de un condensador depende sólo del tamaño, forma y disposición geométrica de los conductores, así como del medio aislante que haya entre sus placas*.

3.1.- Capacidad de los condensadores plano, esférico y cilíndrico

Los condensadores más comunes se componen de dos láminas conductoras, planas paralelas, muy próximas (Condensador plano), o de dos superficies cilíndricas coaxiales (Condensador cilíndrico) o de dos superficies esféricas conductoras y concéntricas (Condensador esférico).

3.1.1.- Condensador plano

Está constituido por dos láminas metálicas, planas, paralelas, de igual área S , separadas una distancia d muy pequeña, en comparación con las dimensiones de las láminas. En estas condiciones podemos despreciar el efecto de los bordes y suponer que el campo eléctrico entre las láminas es uniforme y en el exterior es nulo. En efecto, en esta situación la mayor parte de la carga se acumula en las caras opuestas de las láminas, creando cada una un campo de módulo igual a $\sigma/2\epsilon_0$ (σ es la carga total de la armadura positiva dividida por su área, o densidad superficial de carga). En la región exterior a las láminas los dos vectores son de sentidos opuestos, con lo que el campo total es nulo. En la región entre las

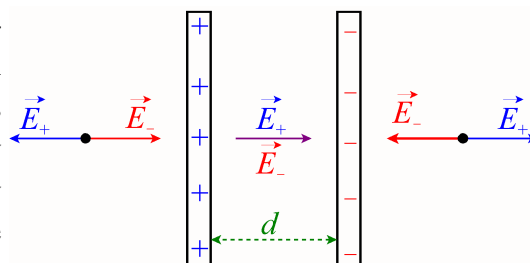


Figura 4

láminas, ambos vectores son de igual sentido, con lo que el campo valdrá (Figura 4),

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [2.5]$$

La d.d.p. entre la placa positiva y la negativa será:

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_+^- Ed\ell = E \int_+^- d\ell = Ed$$

con lo que la capacidad del condensador vendrá dada por:

$$C = \frac{Q_+}{V_+ - V_-} = \frac{Q_+}{Ed} = \frac{Q_+}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \left\{ \sigma = \frac{Q_+}{S} \right\} = \frac{Q_+ \epsilon_0}{\frac{Q_+}{S} d} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad [2.6]$$

donde S es el área de la intersección entre una de las dos armaduras y la proyección de la otra sobre ella: cambiando el valor de S , podemos variar la capacidad del condensador (Condensador variable).

3.1.2.- Condensador cilíndrico

Está constituido por un pequeño alambre o cilindro conductor de radio a y una corteza conductora cilíndrica de radio b ($b > a$) coaxial con el alambre (Figura 5). Usualmente el alambre se conecta al potencial más alto.

El campo eléctrico entre las armaduras, considerando que la longitud del alambre, ℓ , es muy grande frente a la distancia entre las armaduras, viene dado por [1.27]:

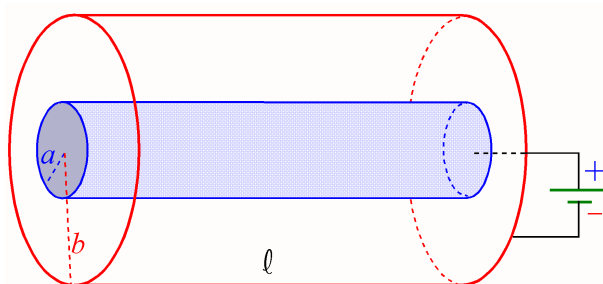


Figura 5: Condensador cilíndrico

$$E = \frac{2k_0 \lambda}{r}$$

siendo r la distancia del alambre al punto, entre a y b , considerado. La d.d.p. entre la armadura positiva y la negativa será:

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b 2k_0 \frac{\lambda}{r} dr = 2k_0 \lambda [\ln r]_a^b = 2k_0 \lambda \ln \left(\frac{b}{a} \right) = \left\{ \lambda = \frac{Q_+}{\ell} \right\} = 2k_0 \frac{Q_+}{\ell} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Con lo que la capacidad del condensador es:

$$C = \frac{Q_+}{V_+ - V_-} = \frac{Q_+}{2k_0 \frac{Q_+}{\ell} \ln \left(\frac{b}{a} \right)} = \frac{\ell}{2k_0 \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \quad [2.7]$$

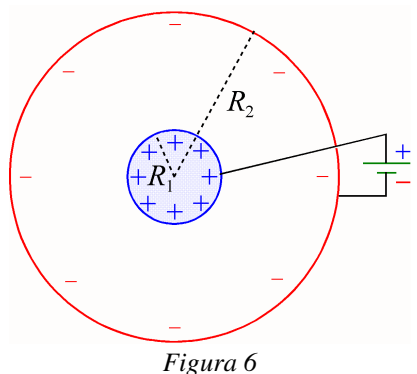


Figura 6

3.1.3.- Condensador esférico

Está constituido por una pequeña esfera conductora de radio R_1 y una corteza esférica, también conductora, concéntrica con ella, de radio R_2 ($R_2 > R_1$) (Figura 6). Generalmente la esfera interior se conecta al potencial mayor. El campo eléctrico entre las armaduras se debe exclusivamente a la esfera interior y vale

$$E = k_0 \frac{Q}{r^2}$$

siendo r la distancia del centro de la esfera interior al punto, entre R_1 y R_2 , considerado. La d.d.p. entre la armadura positiva y la negativa es

$$V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} k_0 \frac{Q}{r^2} dr = -k_0 Q \left[\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = k_0 Q \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Con lo que la capacidad del condensador vendrá dada por:

$$C = \frac{Q_+}{V_+ - V_-} = \frac{Q_+}{k_0 Q_+ \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} = \frac{R_1 R_2}{k_0 (R_2 - R_1)} \quad [2.8]$$

Es fácil demostrar que si hallamos el límite cuando R_2 tiende a infinito (con lo que sólo contaría la esfera interior y, por tanto, estaríamos hablando de un conductor esférico), la expresión [2.8] se convierte en la ecuación [2.3].

3.2.- Asociación de condensadores

En algunas ocasiones no se dispone del condensador con la capacidad adecuada para una aplicación determinada, o bien resulta conveniente cambiar un condensador por un conjunto de ellos. Así pues, es frecuente utilizar dos o más condensadores en combinación. Y, por tanto, es preciso conocer cuál es la capacidad equivalente de dicha combinación.

Tres son las formas de asociación: en paralelo, en serie y mixta.

a) Asociación en paralelo. La figura 7 muestra dos condensadores conectados en paralelo. Dos o más condensadores están asociados en paralelo cuando tienen “su primera armadura” conectadas entre sí mediante un conductor a un determinado potencial y “su segunda armadura” también conectadas entre sí mediante otro conductor a un potencial diferente del mencionado anteriormente. Así, diremos que las placas de cada condensador conectadas al punto de mayor potencial (punto a en la figura 7) tienen carga positiva, en tanto que la otra placa de cada condensador, que estará conectada al punto de menor potencial (punto b en la figura 7), tendrá carga negativa. Por tanto, la característica fundamental de

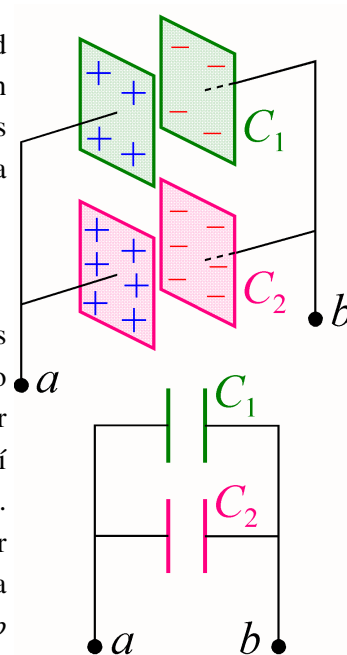


Figura 7

la asociación en paralelo es que en todos los condensadores que forman parte de la asociación, cuando están cargados, existe la misma d.d.p. entre sus placas.

Si C_1 y C_2 son las capacidades de cada uno de los condensadores y Q_1 y Q_2 la carga que, respectivamente, almacenan cuando se establece una d.d.p. entre sus armaduras igual a $V_a - V_b$, se cumplirá:

$$Q_t = Q_1 + Q_2 \quad [2.9]$$

$$Q_1 = C_1 (V_a - V_b) \quad * \quad Q_2 = C_2 (V_a - V_b)$$

$$C_{eq} = C = \frac{Q_t}{V_a - V_b} = \frac{C_1 (V_a - V_b) + C_2 (V_a - V_b)}{V_a - V_b} = C_1 + C_2 \quad [2.10]$$

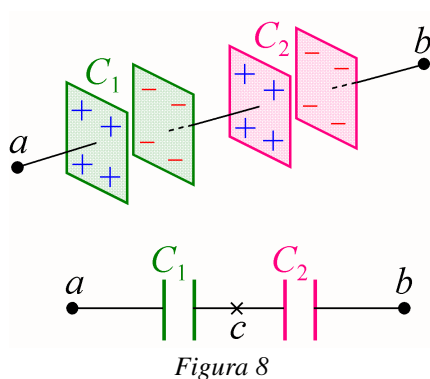


Figura 8

b) **Asociación en serie.** La figura 8 muestra dos condensadores conectados en serie. Dos condensadores están asociados en serie cuando tienen una armadura cada uno conectada entre sí mediante un conductor, quedando una armadura libre a cada condensador para poder realizar la conexión a una d.d.p. y así lograr cargar el sistema. Cuando se realice la conexión, la placa libre del condensador conectada al potencial mayor se dice que adquiere carga positiva, en tanto que la armadura libre del otro condensador, que estará conectada al potencial menor tendrá la misma carga pero negativa. Debido al fenómeno de carga por inducción, en las placas de los condensadores conectadas entre sí se origina una separación de cargas.

Éste es el motivo por el que, cuando se carga una asociación de condensadores en serie, las placas conectadas entre sí tienen cargas de distinto signo¹. La característica fundamental de la asociación en serie es que los dos condensadores adquieren exactamente la misma carga, que corresponde además con la carga de las placas del extremo y, por tanto, con la carga de toda la asociación (y del condensador equivalente).

$$Q = Q_1 = Q_2 \quad [2.11]$$

La caída de tensión total entre los extremos de la asociación es igual, evidentemente, a la suma de la d.d.p. entre los extremos de cada condensador.

$$(V_a - V_b) = (V_a - V_c) + (V_c - V_b) \quad [2.12]$$

como $(V_a - V_b) = Q/C$, $(V_a - V_c) = Q_1/C_1 = Q/C_1$ y $(V_c - V_b) = Q_2/C_2 = Q/C_2$, la ecuación [2.12] se transforma en

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad [2.13]$$

es decir, la capacidad equivalente de una asociación en serie es menor que la de cualquier condensador que forme parte de la serie.

c) **Asociación mixta.** Una asociación mixta es una mezcla de combinaciones en serie y en paralelo. Un ejemplo de este tipo de asociación se muestra en la figura 9: C_2 y C_3 están conectados en serie; el equivalente

¹ Nótese que si no se conecta la asociación a una d.d.p. para cargarla, seguimos teniendo una asociación en serie, pero descargada. En tal caso no podemos decir que tengamos "una placa positiva de un condensador unida a la negativa del otro"

de esta serie está conectado en paralelo con C_4 y el equivalente de este paralelo está en serie con C_1 .

Así pues, para hallar la capacidad equivalente de una asociación mixta, basta con aplicar ordenadamente las leyes de asociación en serie y paralelo.

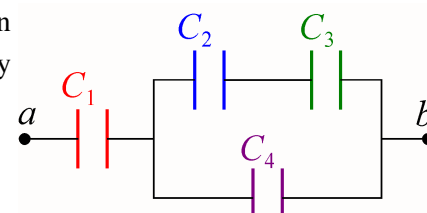


Figura 9

4.- Energía electrostática almacenada en un condensador. Densidad de energía del campo electrostático

El proceso de carga de un condensador supone la transferencia de carga de un conductor al otro, aumentando el potencial de la carga transferida. Por tanto, es preciso realizar un trabajo para cargar un condensador, trabajo que, en parte o en su totalidad (depende del proceso de carga), queda almacenado en el condensador en forma de energía potencial.

Consideremos el proceso de carga de un condensador cualquiera: al comenzar el proceso, ninguna de las armaduras posee carga, el campo eléctrico entre ellas es cero y también lo es la diferencia de potencial. Una vez que, mediante el proceso adecuado, se ha transferido una carga q de una armadura a la otra, la d.d.p. entre ambas es $V = q/C$. Si se transfiere a continuación una carga elemental dq , la energía potencial del condensador se ve aumentada (supondremos que el proceso de carga se realiza lentamente, de forma que se pueda considerar un problema electrostático, al despreciar la variación de energía cinética) en una cantidad

$$dU = (V - V') dq = (q dq)/C \quad [2.14]$$

El aumento total de energía potencial durante la carga (desde el instante inicial en que la carga y la d.d.p. son nulas hasta el instante final en que la carga es Q y la d.d.p. es $V_A - V_B$) será:

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad [2.15]$$

que también puede escribirse, teniendo en cuenta la definición de capacidad, en las dos formas equivalentes siguientes:

$$U = \frac{1}{2} Q(V_A - V_B) = \frac{1}{2} C(V_A - V_B)^2 \quad [2.15a]$$

En el proceso de carga de un condensador se crea un campo eléctrico entre las armaduras, de forma que podemos considerar que el trabajo realizado al cargar el condensador es el trabajo necesario para crear un campo eléctrico. Consideremos un condensador plano cargado a una d.d.p. ($V_A - V_B$); el trabajo realizado para cargarlo (Energía electrostática almacenada) viene dado por cualquiera de las ecuaciones [2.15]. Despreciando el efecto de los bordes, el campo eléctrico entre las armaduras del condensador plano es uniforme y de valor $E = (V_A - V_B)/d$. Así pues

$$W = U = \frac{1}{2} C(V_A - V_B)^2 = \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \\ V_A - V_B = Ed \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd \quad [2.16]$$

El producto (Sd) es el volumen de la región entre las placas ($\vartheta = Sd$) con lo que la ecuación [2.16] se puede escribir

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vartheta \quad [2.17]$$

Para obtener una ecuación más general, definimos la **densidad de energía del campo electrostático** (η_E) como la *energía electrostática almacenada por unidad de volumen*. De la ecuación [2.17] obtenemos, para nuestro caso en el que el campo electrostático es uniforme:

$$\eta_E \equiv \frac{U}{\vartheta} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [2.18]$$

Aunque la ecuación [2.18] la hemos deducido para el caso sencillo de un condensador plano, tiene validez general para cualquier campo electrostático. Por ello, podemos afirmar que la densidad de energía en cualquier campo electrostático es directamente proporcional al cuadrado del campo eléctrico en un punto dado. Si queremos calcular la energía electrostática almacenada en una región en la que existe un campo electrostático, deberemos utilizar la expresión anterior en la forma:

$$U = \int_{\vartheta} \eta_E d\vartheta = \int_{\vartheta} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\vartheta \quad [2.18a]$$

5.- Dieléctricos. Vector polarización

Un *material no conductor* (vidrio, papel, mica ...) se denomina **dieléctrico**. Faraday descubrió que cuando el espacio entre las armaduras de un condensador se llenaba totalmente de dieléctrico, la capacidad del condensador aumentaba en un factor ϵ_r característico de cada dieléctrico, llamando a ϵ_r **permitividad relativa** o **constante dieléctrica**. ¿Cómo explicar la aparición de este efecto eléctrico si los dieléctricos son aislantes? Comencemos con el hecho experimental del aumento de la capacidad y tratemos de ver cómo puede producirse.

Sea un condensador plano de placas paralelas, cargado y aislado, de área S separadas una distancia d . Si al introducir entre ellas un dieléctrico la capacidad aumenta en un factor ϵ_r , la d.d.p. entre las placas debe disminuir en el mismo factor, ya que la carga de las armaduras no ha cambiado (debido a que hemos supuesto que el condensador está aislado). Ahora bien, si disminuye la d.d.p., también debe disminuir, en la misma proporción, el campo eléctrico entre las armaduras (porque $E = (V_+ - V_-)/d$).

¿Cómo explicar este efecto? Sea el condensador de la figura 10 y consideremos la superficie gaussiana S' (representada por líneas discontinuas): puesto que el campo eléctrico ha disminuido, deducimos que la carga neta que encierra dicha superficie también ha disminuido al introducir el dieléctrico y eso sólo es explicable si admitimos que aparecen cargas de signo opuesto en la superficie del dieléctrico. Puesto que el campo disminuye pero no se anula, la densidad superficial de carga en el dieléctrico (σ_i) debe ser menor que la correspondiente a la armadura (σ).

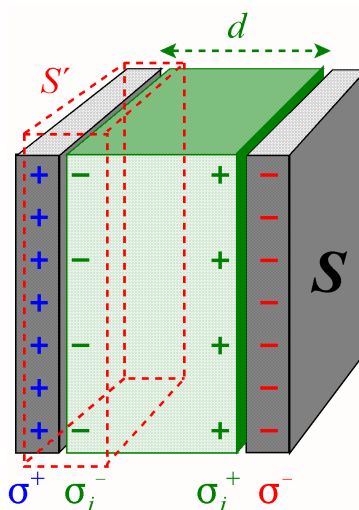


Figura 10

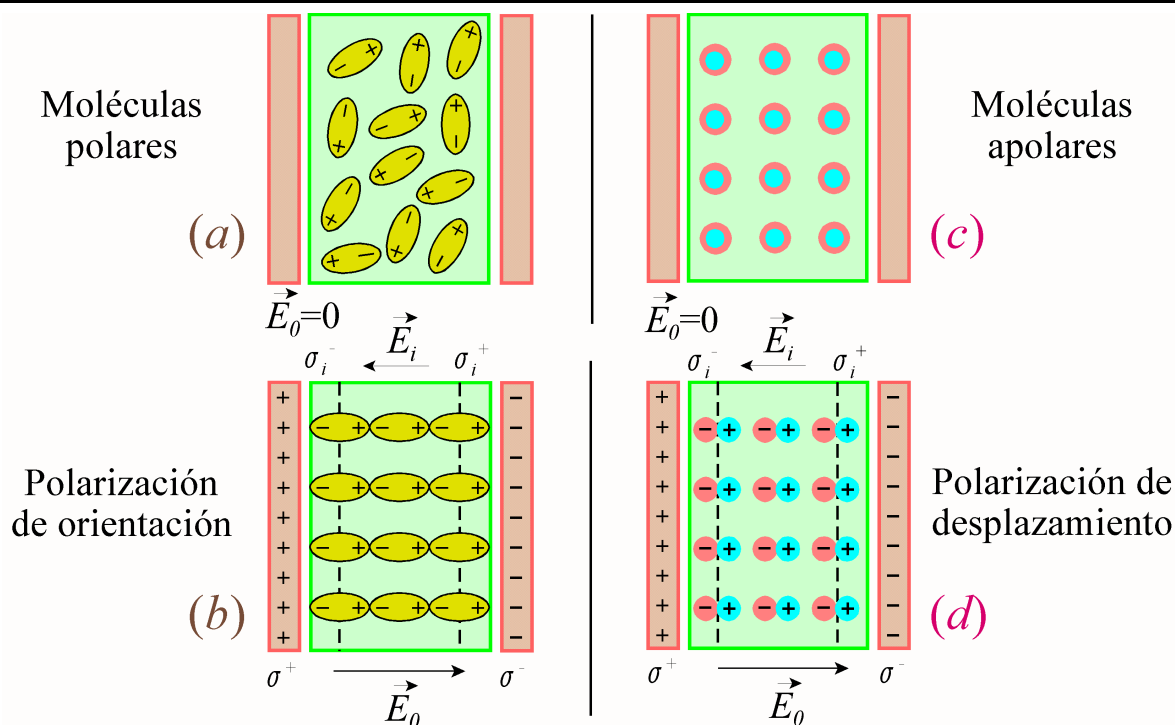


Figura 11

Podemos comprender este resultado en función de la polarización molecular del dieléctrico. **a)** Si las moléculas del dieléctrico son polares (presentan momento dipolar eléctrico permanente), sus momentos dipolares están inicialmente orientados al azar (figura 11a). En presencia de un campo eléctrico externo, los dipolos sufren un momento de torsión que tiende a alinearlos con dicho campo externo, produciéndose un campo eléctrico adicional (\vec{E}_i) que se opone al campo aplicado; decimos que el dieléctrico se ha polarizado: **polarización de orientación** (figura 11b). Este tipo de polarización depende tanto de la intensidad del campo eléctrico externo (que favorece la orientación) como de la temperatura (que la perjudica) **b)** Incluso en el caso de que las moléculas del dieléctrico no sean polares (apolares), figura 11c, el campo eléctrico provoca una separación de los centros de masas de las cargas positivas y negativas (figura 11d), con lo que se formarán dipolos inducidos ya orientados en la dirección del campo, y así el dieléctrico se polarizará igualmente: **polarización de desplazamiento**.

Así pues, el efecto neto de la polarización es la aparición de una densidad superficial de carga inducida o ligada σ_i sobre las caras del dieléctrico próximas a las placas del condensador. Se denomina **carga ligada** porque, a diferencia de la que existe en las armaduras del condensador, *no puede desplazarse libremente a través del dieléctrico* y su existencia se debe a las cargas libres de las armaduras (si éstas desaparecen, por descarga del condensador, las de polarización también desaparecen; pero no porque se desplacen, sino porque los dipolos desaparecen si eran inducidos, o se reorganizan al azar como antes de que existiera el campo externo). Sin embargo, estas cargas ligadas crean un campo eléctrico opuesto al que existía en ausencia de dieléctrico, por lo que el resultado será que el campo efectivo ahora se ha debilitado respecto del que existía antes. ¡¡Esto es justo lo que habíamos deducido a partir de la experiencia de Faraday!!

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_i| \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}| < |\vec{E}_0|$$

Con objeto de analizar el efecto macroscópico de la orientación (o inducción) de los dipolos, definimos el **vector polarización**, \vec{P} , como el *momento dipolar eléctrico por unidad de volumen*. Así, si ΔN es el número de dipolos (orientados o inducidos) que existe en un volumen $\Delta\vartheta$ de dieléctrico y $\langle\vec{p}\rangle$ es el momento dipolar eléctrico promedio de cada uno de esos dipolos, definimos el vector polarización en un punto del dieléctrico como:

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta\vartheta \rightarrow 0} \frac{\Delta N \langle\vec{p}\rangle}{\Delta\vartheta} \quad [2.19]$$

donde hemos supuesto que un dieléctrico en un campo eléctrico tiene una distribución continua de dipolos infinitesimales, es decir, una polarización continua (en realidad, los dipolos son discretos por ser moléculas polarizadas). Dicha suposición no conduce a ningún error apreciable puesto que se consideran volúmenes que contienen multitud de dipolos (es decir, regiones macroscópicas).

Cuando el vector polarización sea uniforme en una región dada de volumen ϑ donde haya N dipolos, cada uno de momento dipolar eléctrico promedio $\langle\vec{p}\rangle$, podremos utilizar la expresión más simple:

$$\vec{P} = \frac{N \langle\vec{p}\rangle}{\vartheta} \quad [2.19a]$$

Puede comprobarse que la unidad del vector polarización en el S.I. es C/m^2 , es decir la misma que la de densidad superficial de carga. A continuación comprobaremos que existe una relación entre la polarización y la densidad superficial de carga inducida.

En la figura 12 tenemos un esquema tridimensional del dieléctrico polarizado de la figura 11b, de forma que su volumen $\vartheta = S_n d$ contendrá $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$ dipolos orientados, cada uno de ellos de momento dipolar eléctrico promedio $\langle\vec{p}\rangle = q\vec{\ell}$. Así, el módulo del vector polarización vendrá dado por:

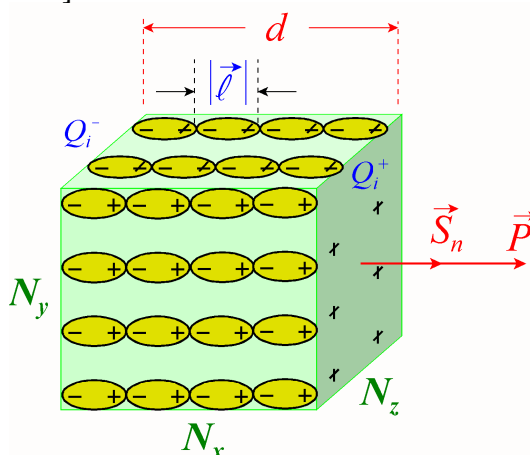


Figura 12

$$|\vec{P}| = \frac{N |\langle\vec{p}\rangle|}{\vartheta} = \frac{N_x N_y N_z |q\vec{\ell}|}{S_n d} = \frac{(N_y N_z |q|)(N_x |\vec{\ell}|)}{S_n d} = \frac{|Q_i| d}{S_n d} = \frac{|Q_i|}{S_n} = |\sigma_i| \quad [2.20]$$

Si, manteniendo la misma polarización, consideramos una superficie S del dieléctrico que forme un ángulo θ con S_n (figura 13), tendríamos:

$$|\vec{P}| = \frac{|Q_i|}{S_n} = \frac{|Q_i|}{S \cos \theta} \Rightarrow |\sigma_i| = \frac{|Q_i|}{S} = |\vec{P}| \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{u}_n \quad [2.20a]$$

donde \vec{u}_n es el vector unitario del vector superficie del dieléctrico, (recuerde que como se trata de una superficie cerrada su sentido es “hacia fuera”). Así pues, *la densidad superficial de carga inducida coincide con la componente del vector polarización normal a la superficie*. Además, la ecuación [2.20a] permite obtener el signo de la densidad de carga superficial inducida sobre cada superficie del dieléctrico. Nótese que en la cara con carga inducida negativa los vectores \vec{u}_n y \vec{P} forman un ángulo obtuso ($\pi/2 < \theta \leq \pi$), por lo que el resultado de su producto escalar también será negativo, en tanto que en la cara con carga inducida positiva los vectores \vec{u}_n

y \vec{P} forman un ángulo agudo ($0 < \theta < \pi/2$) por lo que su producto escalar también será positivo. Así, podemos escribir:

$$\sigma_i = \vec{P} \cdot \vec{u}_n \quad [2.20b]$$

Apliquemos la ecuación anterior a cada cara con carga inducida de la figura 13:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^+ &= P \cos \theta \\ \sigma_i^- &= P \cos \gamma = -P \cos \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_i^+ = -\sigma_i^-$$

Al ser θ y γ suplementarios sus cosenos son opuestos, con lo que, efectivamente, la expresión [2.20b] no sólo sirve para determinar el módulo de la densidad superficial de carga inducida, sino también su signo.

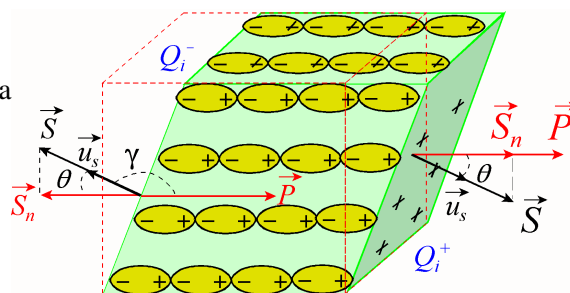


Figura 13

Finalmente, debemos indicar que en este desarrollo hemos asumido en todo momento que la polarización del dieléctrico era uniforme. En este caso no existe en el interior del dieléctrico ninguna acumulación de carga, ya que cualquier volumen macroscópico contendrá igual número de cargas positivas y negativas. Sin embargo, si la polarización no fuese uniforme aparecería una densidad volumétrica de carga de polarización (o carga inducida) en el interior del dieléctrico ρ_i , además de la densidad superficial de carga. Aunque no lo demostraremos, dicha densidad está también relacionada con la polarización según $\rho_i = -\nabla \cdot \vec{P}$.

5.1.- Campo eléctrico en el interior de un dieléctrico

En el espacio libre definimos el campo eléctrico como la fuerza por unidad de carga, es decir, **el campo eléctrico en el espacio libre es una cantidad mensurable**. Sin embargo, es imposible situar una carga en el interior de un dieléctrico para medir la fuerza que el campo ejerce sobre ella y, por tanto, **el campo eléctrico en el interior de un dieléctrico no es una cantidad mensurable, sino teórica**. No obstante, centramos la atención en los efectos externos del dieléctrico, las medidas internas son innecesarias ya que se puede formular una teoría para explicar el comportamiento del dieléctrico, que estará acorde con las condiciones externas.

Hemos visto en la ecuación [2.20] que la densidad superficial de carga de polarización es igual al módulo del vector polarización dentro del dieléctrico: esta carga de polarización es negativa en una superficie (la que se encuentra próxima a la armadura positiva del condensador) y positiva en la otra (Figuras 11b y 11d). Sin embargo, podemos afirmar que existe un campo eléctrico en el interior del dieléctrico debido a dicha distribución superficial de carga de polarización, que vendrá dado por:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0} \quad [2.21]$$

Este campo, como ya hemos razonado, es de sentido opuesto al campo externo existente inicialmente entre las armaduras y se suele denominar **campo local**. Por tanto, el campo eléctrico existente tras introducir el dieléctrico será:

$$E = \left| \vec{E}_0 + \vec{E}_i \right| = E_0 - E_i = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \quad [2.22]$$

Puesto que la polarización es debida a la existencia de un campo eléctrico en el interior del dieléctrico, resulta lógico pensar que debe existir alguna relación entre ellos, del tipo $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$. Esta relación se determina experimentalmente y suele denominarse **ecuación constitutiva** del dieléctrico. Así, podemos clasificar a los dieléctricos en función de su ecuación constitutiva en:

- **Electretos.** Se caracterizan por mantener polarización eléctrica incluso en ausencia del campo eléctrico externo que la originó. Son sólidos y se dice que tienen polarización permanente. Un ejemplo de este tipo de material se puede conseguir al dejar solidificar una cantidad de cera fundida a la que se aplica un campo eléctrico intenso. La cera solidificada tendrá una polarización permanente que se mantendrá al eliminar el campo externo. Su utilidad es limitada porque sus cargas superficiales de polarización se cancelan fácilmente atrayendo cargas libres del aire.
- **Dieléctricos no lineales.** Se caracterizan porque la relación entre la polarización y el campo eléctrico efectivo tiene la forma:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j + \sum_j \sum_k \beta_{ijk} E_j E_k + \dots$$

donde los subíndices i, j y k se refieren a coordenadas x, y, z . Los valores de los coeficientes $\alpha_{ij}, \beta_{ijk}, \dots$ dependen del dieléctrico particular de que se trate. El motivo de la denominación de estos dieléctricos se debe al hecho de la necesidad de los términos no lineales de segundo orden (segundo sumando) y de orden superior (indicado con los puntos suspensivos). Un ejemplo de este tipo de materiales son algunas cerámicas.

- **Dieléctricos lineales.** En estos materiales la relación entre la polarización y el campo eléctrico efectivo no necesita de los términos de segundo orden o superior que vimos anteriormente. En este caso las componentes cartesianas de la polarización están relacionadas con las del vector campo eléctrico según:

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z)$$

donde los factores de proporcionalidad χ_{ij} reciben el nombre de componentes del **tensor susceptibilidad eléctrica**. De la relación anterior se desprende que, en general, el vector polarización no será paralelo al vector campo eléctrico. Por otro lado, la introducción del término ϵ_0 se hace para que las componentes χ_{ij} del tensor susceptibilidad eléctrica sean adimensionales.

- **Dieléctricos lineales, isótropos y homogéneos (dieléctricos perfectos).** Estos materiales añaden, respecto a los comentados anteriormente, el hecho de que las propiedades eléctricas del dieléctrico en un punto dado son independientes de la dirección del campo eléctrico efectivo. Esta última condición se denomina *isotropía*. En este caso el vector polarización será necesariamente paralelo al vector campo eléctrico. Así se cumplirá: $\chi_{ij} = 0$ para $i \neq j$, y $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} \equiv \chi$, de forma que la relación entre la polarización y el campo eléctrico efectivo será:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \quad [2.23]$$

En el caso adicional de que el dieléctrico sea *eléctricamente homogéneo* (propiedades eléctricas

independientes de la posición), χ será una magnitud constante característica del dieléctrico llamada **susceptibilidad eléctrica**. Dicha magnitud es positiva para la mayoría de sustancias e *indica la facilidad con que se desplazan las cargas negativas del dieléctrico respecto de las positivas al aplicarle un campo eléctrico externo*.

A pesar de la multitud de condiciones impuestas en este último caso, los gases y los líquidos, así como muchos sólidos las cumplen, por lo que no es una situación tan especial como podría pensarse. A partir de aquí consideraremos que tratamos con dieléctricos de este tipo.

Susceptibilidades eléctricas de algunas sustancias a temperatura ambiente y presión atmosférica			
Material	χ	Material	χ
vacío	0	polietileno	1,3
aire	0,00054	papel	1 - 3
óxido de Aluminio	3,5	mica	2 - 6
vidrio	4 - 9	baquelita	4,7
nylon	2,5	agua	79

Así pues, sustituyendo [2.23] en [2.22]

$$E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\chi \epsilon_0 E}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{E_0}{(1 + \chi)} \quad [2.24]$$

La ecuación [2.24] indica que, al introducir el dieléctrico, el campo inicial ($E_0 = \sigma/\epsilon_0$) se ha hecho $(1+\chi)$ veces más pequeño. Si hacemos

$$\epsilon_r = 1 + \chi \quad [2.25]$$

el descubrimiento experimental de Faraday queda perfectamente explicado, pues, efectivamente, el campo eléctrico ha disminuido en una proporción ϵ_r .

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad [2.26]$$

donde ϵ se denomina **permitividad dieléctrica** del material.

Decíamos antes que la carga de polarización era una consecuencia directa de la carga libre de las armaduras. Veamos ahora qué relación existe entre ambas densidades de carga.

$$E = E_0 - E_i \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_i = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \sigma \quad [2.27]$$

Puesto que $\epsilon_r > 1$ la ecuación [2.27] nos dice que σ_i generalmente será más pequeña que σ (tal y como habíamos razonado anteriormente). Por otra parte, si $\epsilon_r = 1$ (cosa que sólo ocurre en el vacío), $\sigma_i = 0$ (lo que indica que, lógicamente, el vacío no se polariza).

Por otra parte, la relación entre el campo local E_i y E_0 podemos obtenerla a partir de [2,27] y será:

$$\frac{\sigma_i}{\epsilon_0} = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_i = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) E_0 \quad [2.28]$$

Como ϵ_r es mayor que 1 (salvo para el vacío), E_i será más pequeño que E_0 . Para el vacío $\epsilon_r = 1$, $E_i = 0$ y el campo efectivo será igual a E_0 ($E = E_0 - E_i = E_0 - 0 = E_0$).

5.2.- Influencia de los dieléctricos sobre los condensadores

La introducción de un **dieléctrico** entre las armaduras de un condensador realiza tres **funciones**:

a) Aumenta la capacidad del condensador. Ya hemos relatado cómo Faraday descubrió que la capacidad de un condensador cualquiera aumentaba en un factor característico del dieléctrico ϵ_r . La deducción de esto a partir de la teoría expuesta es sencilla: la d.d.p. entre las armaduras del condensador cargado y aislado cuando introducimos el dieléctrico es:

$$V_+ - V_- = Ed = \frac{E_0}{\epsilon_r} d = \left\{ E_0 d = (V_+ - V_-)_0 \right\} = \frac{(V_+ - V_-)_0}{\epsilon_r} \quad [2.29]$$

donde hemos llamado $(V_+ - V_-)_0$ a la d.d.p. que existía entre las armaduras antes de introducir el dieléctrico. La ecuación [2.29] nos indica algo que ya habíamos razonado: la d.d.p. disminuye al introducir el dieléctrico en un condensador cargado y aislado. Puesto que la carga de las armaduras no ha cambiado, la nueva capacidad del condensador será:

$$C = \frac{Q_+}{V_+ - V_-} = \frac{Q_+}{(V_+ - V_-)_0 / \epsilon_r} = \left\{ \frac{Q_+}{(V_+ - V_-)_0} = C_0 \right\} = C_0 \epsilon_r \quad [2.30]$$

lo que corrobora plenamente el descubrimiento de Faraday.

b) Proporciona un medio mecánico para separar las armaduras. No olvidemos que las armaduras deben estar muy próximas si queremos obtener una gran capacidad.

c) Aumenta la resistencia a la ruptura del condensador. Esto es debido a que la resistencia a la ruptura (o tensión de ruptura) de cualquier dieléctrico es superior a la del aire, como puede comprobarse en la tabla siguiente. La **rigidez dieléctrica** o **tensión de ruptura** es el *campo eléctrico que hay que establecer entre las placas del condensador para que el material aislante que las separa conduzca la electricidad*, con lo que lógicamente el condensador deja de funcionar como tal y se rompe.

Rigidez dieléctrica de algunas sustancias			
Material	$E_{\text{máx}}$ (kV/mm)	Material	$E_{\text{máx}}$ (kV/mm)
Aire	3	papel	16
Óxido de Aluminio	6	mica	10 - 100
Vidrio	9	baquelita	24
Nylon	19	plexiglás	40
Polietileno	18		

6.- El vector Desplazamiento Eléctrico

La figura 14 muestra un condensador plano cargado con material dieléctrico en su interior. En estas circunstancias el dieléctrico está polarizado.

Si utilizamos la ley de Gauss, para lo cual tomamos la superficie gaussiana en forma de cilindro esquematizada en la figura 14 mediante la línea discontinua con dos de sus caras de área S_B paralelas a las placas, nos encontramos con:

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_i) \quad [2.31]$$

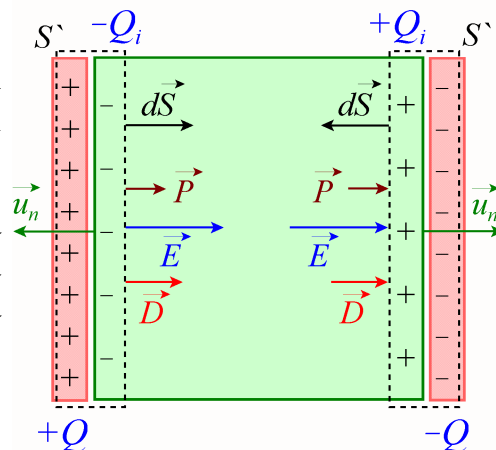


Figura 14

expresión en la que aparece la carga inducida (o carga ligada) Q_i . Para facilitar su uso intentaremos sustituir la carga ligada por una función de la polarización, ya que sabemos que están relacionadas.

$$Q_i = \int_{S_B} \sigma_i dS = \int_{S_B} \vec{P} \cdot \vec{u}_n dS = - \int_{S_B} \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \oint_{S'} \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad [2.32]$$

Como sólo hay carga inducida en la base de la superficie gaussiana que está dentro del dieléctrico, hemos podido extender la integral a toda la superficie S' .

El signo negativo se debe al hecho de que \vec{u}_n , que recordemos apunta “hacia fuera” de la superficie del dieléctrico, tiene sentido contrario a $d\vec{S}$. Puede entenderse el resultado de la expresión [2.32] porque cuando el flujo de la polarización es positivo la carga inducida es negativa, y viceversa (Figura 14).

Sustituyendo Q_i en la ecuación [2.31] de la ley de Gauss, llegamos a:

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(Q - \oint_{S'} \vec{P} \cdot d\vec{S} \right) \Rightarrow \oint_{S'} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q \quad [2.33]$$

Así, ahora estamos calculando el flujo de una nueva magnitud vectorial a través de la superficie gaussiana. Y, además, dicho flujo sólo depende de la carga real que tenemos en las armaduras del condensador cargado. Definimos esa nueva magnitud vectorial, a la que denominaremos **desplazamiento eléctrico** o **densidad de flujo eléctrico** y simbolizaremos como \vec{D} ,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad [2.34]$$

Por tanto, la **ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico** queda en la forma

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad [2.35]$$

En el caso de un dieléctrico perfecto (lineal, homogéneo e isótropo) podemos obtener una relación sencilla entre \vec{E} y \vec{D} .

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \quad [2.36]\end{aligned}$$

Como conclusión, hemos introducido junto al vector campo eléctrico \vec{E} dos nuevos vectores: \vec{P} y \vec{D} . De acuerdo con las expresiones [2.31], [2.32] y [2.35] cada uno de ellos está relacionado con un tipo de carga. Así, mientras el vector campo eléctrico está relacionado con la totalidad de cargas (libres y ligadas) que originan el campo, el vector polarización está relacionado sólo con la carga inducida o de polarización y el vector desplazamiento eléctrico está relacionado exclusivamente con las cargas libres.

Por tanto, cuando necesitemos determinar el campo eléctrico en el interior de un dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo, podremos sortear la dificultad de la existencia de las cargas inducidas determinando el vector desplazamiento eléctrico para, posteriormente y a través de la expresión [2.36] obtener la expresión del campo eléctrico. ¡Esta es la ventaja primordial que apoya la definición del vector desplazamiento eléctrico!