TEMA 3

CORRIENTE CONTINUA

1.- Corriente eléctrica y Densidad de corriente

Imaginemos un conductor aislado en presencia de un campo eléctrico externo: las cargas libres del conductor experimentarán fuerzas eléctricas que las obligarán a moverse por el conductor, creando así un flujo de carga en su seno. Merced a la aceleración adquirida, las cargas se redistribuirán por el conductor y crearán un campo eléctrico *interno* que contrarrestará al *externo*, alcanzándose un nuevo equilibrio en el que ya no será posible ese flujo de cargas. Si, mediante algún procedimiento, conseguimos que en el conductor no se origine ese campo eléctrico *interno* que anula al *externo* (para ello, el conductor no puede estar aislado), el flujo de cargas continuaría, en tanto en cuanto el campo *externo* no se haga cero. Evidentemente, si el conductor tiene principio y fin, en algún punto del mismo se acumulará carga que creará el campo *interno* no deseado. Así pues, para mantener continuamente el flujo de carga es preciso que el conductor no tenga ni principio ni fin, es decir, *que el conductor esté cerrado sobre sí mismo*: un **circuito**. Para evitar la acumulación de las cargas, es preciso un *elemento adicional en dicho circuito que haga que las cargas estén en continuo movimiento*: un **generador**.

Definimos **intensidad de corriente**, o simplemente **corriente**, como la *carga que atraviesa la sección recta de un conductor en la unidad de tiempo*. Es decir,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad [3.1]$$

Si la velocidad con que fluye la carga a través de la sección recta no es constante, la intensidad tampoco lo será, y entonces la definimos como la derivada de la carga con respecto al tiempo.

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \qquad [3.1bis]$$

La unidad de intensidad de corriente en el Sistema Internacional (S.I.) es el **Amperio** (1A = 1C/s), unidad cuya definición está basada en efectos magnéticos de la corriente eléctrica, y que veremos en un tema posterior.

La intensidad de corriente no es una magnitud vectorial, aunque, estrictamente hablando tampoco es escalar: es lo que se denomina escalar con signo, es decir, tiene un signo u otro según el sentido del movimiento en el que fluye la carga. Dado que, en presencia de un campo eléctrico externo, el sentido del movimiento de las cargas depende del signo de las mismas, es preciso adoptar un criterio (arbitrario) para establecer el sentido de la corriente eléctrica: **por convenio, se toma como sentido de la corriente eléctrica el del flujo de cargas positivas**. Como en los conductores los portadores de carga son los electrones, el sentido adoptado para la intensidad es el opuesto al flujo de la carga real, lo cual no es ningún impedimento ya que en la mayoría de los experimentos es indistinguible el movimiento de los electrones en sentido contrario a la intensidad de corriente.

NOTA: (Hemos de mencionar que, aunque normalmente estudiaremos corrientes en el seno de conductores, también existen corrientes eléctricas fuera de ellos: por ejemplo, un chorro de electrones acelerados moviéndose en el vacío, como ocurre en el tubo de un televisor).

Vamos a relacionar la magnitud macroscópica intensidad de corriente con fenómenos atómicos. Aunque ya hemos mencionado que en un conductor son los electrones los que fluyen, prescindiremos de este hecho y hablaremos de **portadores de carga**, siendo q la carga que transportan. Consideremos, pues, un conductor cuya sección recta tiene un área S. Supongamos que en dicho conductor existen n portadores de carga por unidad de volumen (cuando hablamos de portadores de carga, hablamos de carga libre, es decir, susceptible de moverse en presencia de un campo eléctrico externo). Si por el conductor fluye una corriente eléctrica, es porque los portadores de carga están en movimiento, de forma que cada uno de ellos ha de tener una velocidad que, en promedio, tendrá una componente en la dirección del flujo: sea v_{d} (velocidad de desplazamiento) dicha velocidad promedio (el hecho de tomar la velocidad promedio nos permite analizar el movimiento de los portadores como si todos ellos se desplazasen con una velocidad constante igual a v_{d}). Sea q la carga de cada portador y, por simplicidad, supondremos que el conductor es cilíndrico (Figura 1). El número de portadores que, en un tiempo dt, atraviesan la sección S es el que se encuentra en el volumen punteado de la figura 1, es decir:

$$\mathrm{d}N = n\,\mathrm{d}\vartheta = n\,S\,v_{\mathrm{d}}\,\mathrm{d}t$$

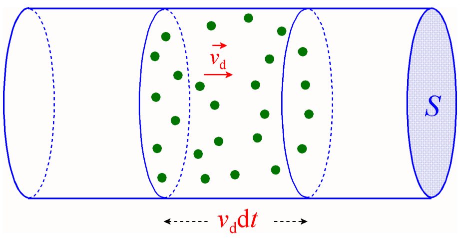

Figura 1

Si cada portador tiene una carga q, la carga que ha atravesado la sección recta S es:

$$\mathrm{d}Q = q\,\mathrm{d}N = q\,n\,S\,v_{\mathrm{d}}\,\mathrm{d}t$$

con lo que, según [3.1bis], la intensidad de corriente será:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{qnSv_d dt}{dt} = qnSv_d \qquad [3.2]$$

La ecuación [3.2] nos dice que la intensidad de corriente, como flujo que es, depende del área de la sección recta. Para evitar esto, definimos una nueva magnitud, la **densidad de corriente (*J*)**, como la *intensidad de corriente por unidad de superficie*.

$$J = \frac{I}{S} = nqv_d \qquad [3.3]$$

La densidad de corriente es, en realidad, una magnitud vectorial, cuya expresión correcta, válida para cualquier tipo de corriente (esté o no confinada en un conductor) es:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \qquad [3.4]$$

Si la corriente se debe a portadores con densidades y/o cargas y/o velocidades de desplazamiento diferentes, entonces la ecuación [3.4] se transforma en:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} n_i q_i \vec{v}_{di} \qquad [3.4bis]$$

y la auténtica relación entre intensidad de corriente y densidad de corriente es:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad [3.5]$$

2.- Ley de Ohm. Resistencia eléctrica

Si por un conductor circula una corriente eléctrica, es porque existe un campo eléctrico interno que obliga a los portadores de carga a moverse con una velocidad promedio $\vec{v}_d$. En muchos conductores (llamados conductores óhmicos), se verifica que dicha velocidad y el campo eléctrico que las origina son proporcionales y, puesto que la velocidad de desplazamiento y la densidad de corriente también son proporcionales, concluimos que en muchos conductores se cumple que la densidad de corriente y el campo que la genera son proporcionales. Dicha relación se expresa matemáticamente, como:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad [3.6]$$

donde la constante de proporcionalidad σ, recibe el nombre de **conductividad eléctrica** del conductor. Cuando la conductividad del conductor no es función del campo eléctrico externo (aunque sea función de otros parámetros, como la temperatura por ejemplo), decimos que el **conductor** es **óhmico**. Para este tipo de conductores, la ecuación [3.6] recibe el nombre de **Ley de Ohm**, si bien suele usarse con otra formulación matemática más operativa.

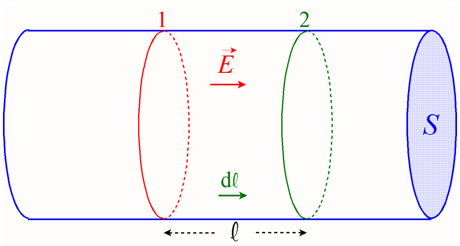

Figura 2

Supongamos un alambre conductor, como el de la figura 2, por el que circula una corriente de intensidad *I*. Sea *S* la sección recta del conductor y $\vec{E}$ el campo eléctrico en su interior. Tomemos dos puntos, 1 y 2, separados una distancia ℓ lo suficientemente pequeña como para considerar que el campo eléctrico es constante. En estas condiciones sabemos que

$$V_1 - V_2 = E\ell \quad \Rightarrow \quad E = \frac{V_1 - V_2}{\ell}$$

Puesto que la densidad de corriente es constante (por serlo el campo eléctrico), si el conductor es óhmico tendremos:

$$I = JS = \sigma ES = \sigma S \frac{V_1 - V_2}{\ell} \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} I \qquad [3.7]$$

De la ecuación [3.7], llegamos a:

$$\frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S}$$

es decir, el cociente entre la diferencia de potencial (d.d.p.) entre dos puntos de un conductor óhmico y la corriente que circula entre ellos es función exclusiva de la naturaleza (σ) y geometría (ℓ/s) del conductor. Definimos dicho cociente como la **resistencia (*R*)** del conductor

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} = R \qquad [3.8]$$

La unidad de la resistencia en el Sistema Internacional es el **OHMIO** (Ω). (1Ω=1V/A).

Definimos **resistividad** de una sustancia como la *inversa de su conductividad* (se mide en Ωm), es decir

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \qquad [3.9]$$

con lo que la resistencia de un conductor viene dada por:

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \qquad [3.8bis]$$

y, según lo expuesto, la **ley de Ohm**, en **forma operativa**, se acostumbra a expresar como:

$$V_1 - V_2 = I\,R \qquad [3.10]$$

La resistencia de conductores de igual geometría varía mucho de uno a otro según su naturaleza y ello porque la resistividad cambia de una sustancia a otra. Además, la resistividad de una sustancia determinada (y, por tanto, su resistencia) es función lineal de la temperatura; dicha dependencia se expresa como:

$$\rho = \rho_0\,[1 + \alpha\,(T - T_0)] \qquad [3.11]$$

donde ρ_0 es la resistividad de la sustancia a la temperatura de referencia T_0 (generalmente, en las tablas de resistividades, la temperatura de referencia es 20ºC).

3.- Energía y Potencia eléctricas. Ley de Joule. Fuerza electromotriz

Si se estudia la teoría clásica de la conducción eléctrica se comprueba cómo los electrones se mueven a velocidad constante aunque son acelerados por el campo eléctrico. La razón fundamental estriba en el elevadísimo número de choques que sufren en la unidad de tiempo, choques en los que pierden gran parte de su energía cinética, pérdida que aparece en el conductor en forma de energía térmica. Podemos simplificar el fenómeno considerando que el campo eléctrico cede continuamente energía eléctrica a los portadores y parte de esta energía se transfiere inmediatamente al conductor en forma de energía térmica.

Supongamos, por simplicidad, que los portadores tienen carga positiva: la carga positiva fluye de los potenciales más altos a los más bajos (como la corriente eléctrica) y, por tanto, sufren una pérdida de energía potencial eléctrica dada por:

$$-\,\mathrm{d}U = (V_1 - V_2)\,\mathrm{d}q$$

(el signo negativo indica pérdida). Esta disminución de energía potencial se debe a que el campo ha realizado un trabajo, realizado a una velocidad[1] igual a:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU}{dt} = (V_1 - V_2)\frac{dq}{dt} = (V_1 - V_2)\,I$$

[1] La velocidad a la que se realiza trabajo es la potencia.

es decir, la **potencia disipada en el conductor** es:

$$P = (V_1 - V_2)\, I \qquad [3.12]$$

La expresión [3.12] es la **Ley de Joule**. Puesto que las pérdidas de potencia en forma de calor tienen lugar en las resistencias del circuito (si un circuito tiene resistencia nula, las pérdidas son también nulas), la ecuación [3.12] también puede escribirse (haciendo uso de la ley de Ohm dada por la ecuación [3.10]) como:

$$P = I^2 R \qquad * \qquad P = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \qquad [3.13]$$

Con objeto de mantener una corriente estacionaria en un conductor, es preciso disponer de una *fuente* que suministre energía eléctrica: tales fuentes se denominan generadores de fuerza electromotriz (*fem*), siendo los más usuales las pilas (que transforman energía química en energía eléctrica). En circuitería, el generador de *fem* se representa por $\dashv\vdash$, indicando el segmento más largo el punto de potencial más alto (Figura 3). Si suponemos nuevamente portadores de carga positiva, la corriente fluye por el circuito del punto de mayor potencial al de menor potencial y, para evitar la acumulación de carga en los bornes del generador, debe fluir, por dentro del generador desde el potencial menor al potencial mayor (lo que explica la necesidad de la energía que el generador suministra). Definimos **fuerza electromotriz** de un generador como la *energía que suministra por unidad de carga* que lo recorre (del polo negativo al positivo). Es decir,

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \qquad [3.14]$$

con lo que la potencia que suministra el generador es

$$P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon I \qquad [3.15]$$

En la práctica, cualquier generador posee una resistencia interna (r) con lo que parte de la energía que el generador suministra se disipa en forma de calor en el propio generador; el resto, se utiliza en mantener constante la d.d.p. entre sus bornes (es decir, el resto se entrega al circuito). Así pues, en la figura 3 se cumple:

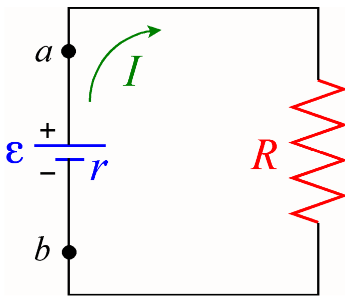

Figura 3: Esquema de un circuito

$$\varepsilon I = I^2 r + (V_a - V_b)\, I$$

con lo que la d.d.p. entre los bornes del generador es

$$V_a - V_b = \varepsilon - I r \qquad [3.16]$$

Si R es la resistencia <u>total</u> del circuito (Figura 3), la Ley de Ohm nos asegura que $V_a - V_b = IR$. Sustituyendo en [3.16] y despejando la intensidad

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \qquad [3.17]$$

que es una primera generalización de la ley de Ohm.

4.- Asociación de resistencias

Las resistencias, como veíamos para los condensadores en el tema anterior, se pueden asociar en paralelo, en serie y en asociación mixta.

a) **Asociación en paralelo**. Dos resistencias están conectadas en paralelo cuando sus extremos están conectados entre sí y a la misma diferencia de potencial (Figura 4). En esta situación, la intensidad que circula por el conductor $\underline{a'a}$ (recordemos que la intensidad es el flujo de cargas) se dividirá en dos partes al llegar al punto $\underline{a}$ (I_1 e I_2); dichas partes se reunirán en el punto $\underline{b}$, y por $\underline{bb'}$ circulará la intensidad primitiva.

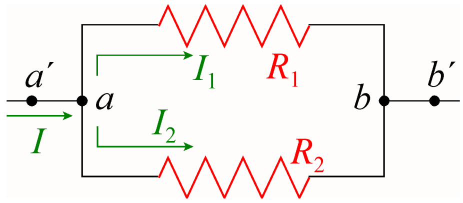

Figura 4: Asociación en paralelo

Puesto que las dos resistencias están conectadas al punto $\underline{a}$ por un lado y al $\underline{b}$ por otro, es evidente que la d.d.p. entre los extremos de ambas es la misma y, además, dicha d.d.p. es la que existirá entre los extremos de la resistencia equivalente. Así pues, aplicando el principio de conservación de la carga y la ley de Ohm tendremos:

$$I = \frac{V_a - V_b}{R_{eq}} \quad * \quad I_1 = \frac{V_a - V_b}{R_1} \quad * \quad I_2 = \frac{V_a - V_b}{R_2} \quad * \quad I = I_1 + I_2$$

$$\frac{V_a - V_b}{R_{eq}} = \frac{V_a - V_b}{R_1} + \frac{V_a - V_b}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad [3.18]$$

Es decir, *la inversa de la resistencia equivalente (R_{eq}) de una asociación en paralelo es la suma de las inversas de las resistencias que constituyen dicho paralelo* (extensible para N resistencias en paralelo). Por ello, la resistencia equivalente de un paralelo es menor que cualquiera de las resistencias que lo componen. Es decir, la asociación en paralelo disminuye la resistencia.

b) **Asociación en serie**. Dos resistencias están conectadas en serie cuando tienen un extremo en común y son recorridas por la misma intensidad de corriente (Figura 5). Aplicando la Ley de Ohm y la aditividad de las diferencias de potencial tenemos:

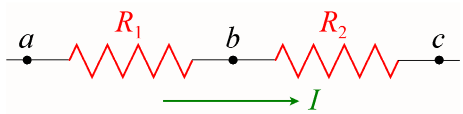

Figura 5: Asociación en serie

$$V_a - V_b = I\,R_1 \quad * \quad V_b - V_c = I\,R_2 \quad * \quad V_a - V_c = I\,R_{eq}$$

$$V_a - V_c = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) \quad \Rightarrow \quad I\,R_{eq} = I\,R_1 + I\,R_2 \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = R_1 + R_2 \qquad [3.19]$$

c) **Asociación mixta**: Es una mezcla de asociaciones en serie y en paralelo. Un ejemplo de este tipo de asociación se muestra en la figura 6. Los resistores R_2 y R_3 están conectados en serie y su equivalente está conectado en paralelo con el equivalente de la serie formada por R_4 y R_5. Finalmente, el equivalente de este paralelo está conectado en serie con R_1 y R_6. Así pues, para hallar la resistencia equivalente de una asociación mixta basta con aplicar ordenadamente las leyes de asociación en serie y en paralelo.

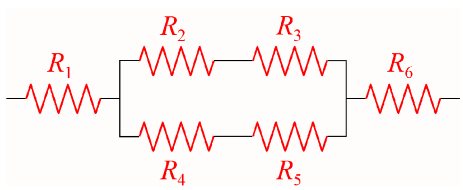

Figura 6: Ejemplo de asociación mixta

5. Reglas de Kirchhoff. Método de las corrientes de malla (Regla de Maxwell)

Las reglas de Kirchhoff son dos reglas de uso corriente en la resolución de circuitos eléctricos relativamente complicados. Antes de enunciarlas, definiremos los conceptos de nudo, rama y malla.

Llamamos **nudo** al *punto del circuito en el que concurren más de dos conductores*, ya que se entiende que 2 hilos conductores son en realidad uno solo: ┌ no es un nudo, pues es equivalente a — ; ┬ sí es un nudo. Por tanto, un nudo es el comienzo o el final de una derivación.

Llamamos **rama** a la *parte de un circuito que une dos nudos consecutivos*.

Llamamos **malla** a *cualquier parte del circuito que pueda recorrerse partiendo de un punto y volviendo a él* (es, pues, un bucle) *sin pasar dos veces por el mismo sitio*.

La figura 7 muestra varios circuitos en los que pueden apreciarse los nudos y las mallas. El circuito de la figura 7(*a*) tiene sólo una malla (1234) y ningún nudo; el de la figura 7(*b*) tiene sólo un nudo (el <u>*a*</u> o el <u>*b*</u>, pues representan el mismo nudo) y 3 mallas (1234, 12*ab* y *a*34*b*); el de la figura 7(*b*′) es un circuito equivalente al de la figura 7(*b*), pues nos hemos limitado a sustituir R_1, R_2 y R_3 por su resistencia equivalente (algo que debe hacerse siempre que sea posible; en el de la figura 7(*c*) no es posible hacerlo porque R_1 y R_3, por ejemplo, no están ni en serie ni en paralelo). Como tal circuito tiene sólo una malla (12*ab*) y ningún nudo. Por último, el circuito de la figura 7(*c*) tiene un nudo (<u>*a*</u> o <u>*b*</u>) y 3 mallas (1234, 12*ab* y *a*34*b*).

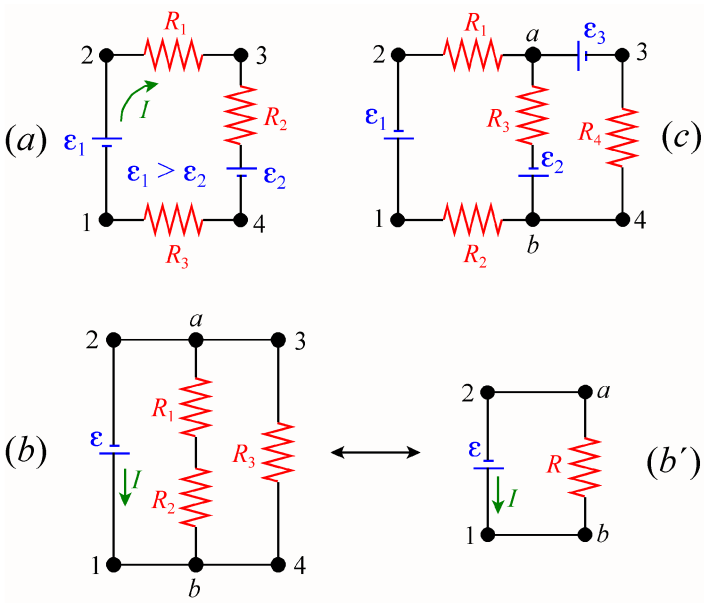

Figura 7

<u>LEY DE NUDOS</u>: En un nudo, la suma de todas las intensidades que concurren en él, con su signo, es nula. O bien, prescindiendo del signo, la suma de las intensidades que *entran* en el nudo es igual a la suma de las intensidades que *salen* de él. Esta ley no es más que una aplicación del principio de conservación de la carga, del que ya hicimos uso al hablar de asociación de resistencias en paralelo.

<u>LEY DE MALLAS</u>: En una malla, la suma de las *fem* con su signo, es igual a la suma de las caídas de potencial en las distintas resistencias que forman parte de la malla. Es, en esencia, el resultado de aplicar la conservación de energía a la malla: la energía generada (*fem*) debe ser igual a la energía disipada (caída de tensión en las resistencias). Dicho de otro modo: puesto que partimos de un punto y volvemos a él, la d.d.p. total debe ser nula, por lo que los aumentos de potencial (*fem*) deben ser iguales a las disminuciones del mismo (caídas de tensión).

Para aplicar las leyes de Kirchhoff a un circuito es preciso comenzar por indicar cualitativamente la intensidad que circula por cada conductor y elegir un sentido <u>arbitrario</u> de circulación de cada malla <u>independiente</u> (en el circuito de la figura 7(*c*), por ejemplo, aunque hay 3 mallas, sólo 2 son independientes, la tercera o es la unión de las otras dos (la malla 1234 es unión de 12*ab* y *a*34*b*) o la complementaria de la intersección de las otras dos (la malla 12*ab*, por ejemplo, es la complementaria de la intersección de las otras dos mallas). Una vez hecho esto, aplicaremos el siguiente convenio de signos:

* Una *fem* es positiva si, según el sentido de circulación de la malla, entramos por el polo negativo y salimos por el positivo. En caso contrario, es negativa.

* Una caída de tensión en una resistencia es positiva si en ella la circulación de la malla y la intensidad asignada son del mismo sentido. En caso contrario, la caída de tensión es negativa.

* Si, al resolver el sistema de ecuaciones constituido por las ecuaciones de nudos y mallas, alguna intensidad sale negativa, ello quiere decir que el sentido real de dicha intensidad es el opuesto al asignado.

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Calcular la intensidad de corriente que circula por cada resistor, en el circuito de la figura 8.

Tenemos 4 nudos (*a*, *c*, *d*, *e*) y siete mallas (1*acd*, *a*43*e*, *cde*2, 1*ae*2, 1234, 143*edc*, *cda*43*e*2). De las siete mallas sólo 3 son independientes. Puesto que tenemos 6 incógnitas, uno de los 4 nudos es dependiente de los otros tres. Así pues, hemos de tomar 3 nudos (por ejemplo *a*, *c*, *d*) y tres mallas (por ejemplo las más simples, esto es: *cde*2, 1*adc* y *a*43*e*). Sean los sentidos de las 6 intensidades de corriente los mostrados en la figura (tomados arbitrariamente) y los sentidos de circulación de las mallas (que llamaremos, por simplicidad **1**, **2** y **3**) los mostrados en la figura (también arbitrarios). Las ecuaciones que se obtienen serán las siguientes:

Nudo *a*: $I_2 = I_1 + I_6$

Nudo *c*: $I_1 = I_3 + I_4$

Nudo *d*: $I_5 = I_6 + I_3$

Malla **1**: $-10 + 1 = (6 + 2)\, I_3 + 14\, I_1 - 11\, I_6$

Malla **2**: $10 = -(6 + 2)\, I_3 - 13\, I_5 + 9\, I_4$

Malla **3**: $13 = (2 + 1)\, I_2 + 11\, I_6 + 13\, I_5$

La solución de este sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas es:

$\mathbf{I_1 = 0{,}256\ A}$ * $\mathbf{I_2 = 0{,}984\ A}$ * $\mathbf{I_3 = -0{,}572\ A}$

$\mathbf{I_4 = 0{,}828\ A}$ * $\mathbf{I_5 = 0{,}157\ A}$ * $\mathbf{I_6 = 0{,}729\ A}$

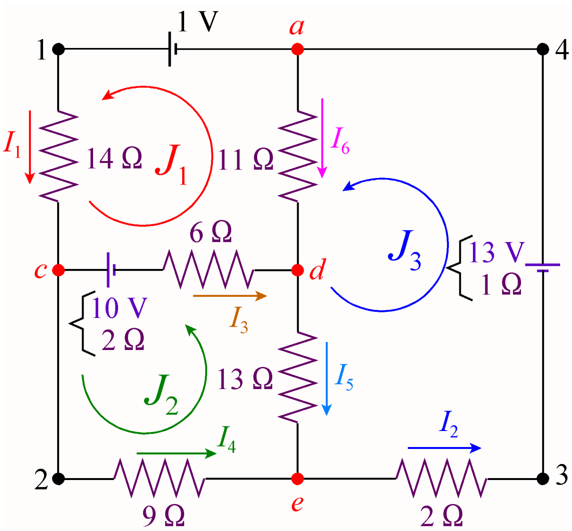

Figura 8

Un método, lento y laborioso, de resolución del sistema es utilizar los nudos para poner 3 intensidades en función de las otras 3 y sustituirlas en las ecuaciones de malla. Éste es el fundamento del **método de las corrientes de malla** o **Regla de Maxwell**. Básicamente, este método consiste en asignar a cada malla una

corriente de malla[2] y plantear sólo las ecuaciones de malla (ahora tenemos sólo 3 incógnitas y 3 mallas independientes), tomando siempre como positiva la corriente de la malla que se analiza:

Malla **1**: $1 - 10 = (2 + 6)(J_1 - J_2) + 11\,(J_1 - J_3) + 14\,J_1$

Malla **2**: $10 = (2 + 6)(J_2 - J_1) + 9\,J_2 + 13\,(J_2 - J_3)$

Malla **3**: $13 = 11\,(J_3 - J_1) + 13\,(J_3 - J_2) + (2 + 1)\,J_3$

Haciendo operaciones tenemos:

Malla **1**: $-9 = 33\,J_1 - 8\,J_2 - 11\,J_3$

Malla **2**: $10 = -8\,J_1 + 30\,J_2 - 13\,J_3$

Malla **3**: $13 = -11\,J_1 - 13\,J_2 + 27\,J_3$

Este último sistema de ecuaciones se puede plantear directamente si observamos con detenimiento su matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 33 & -8 & -11 \\ -8 & 30 & -13 \\ -11 & -13 & 27 \end{pmatrix}$$

Lo primero que observamos es que es una matriz simétrica, en cuya diagonal se hallan las sumas totales de resistencias de cada malla, considerando todas las resistencias positivas. Por otro lado, [−8] (fila 1,columna 2 = fila 2,columna 1) es la suma de resistencias comunes a las mallas **1** y **2**; el signo negativo se debe a que hemos asignado corrientes de malla de sentido contrario en esa rama común. Análogamente sucede con los datos [−11] (fila 1,columna 3 = fila 3,columna 1) y [−13] (fila 2,columna 3 = fila 3,columna 2). En definitiva, para un circuito general, el método de las corrientes de malla establece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum \varepsilon_1 = J_1 \sum R_{11} + J_2 \sum R_{12} + \ldots + J_n \sum R_{1n}$$

$$\sum \varepsilon_2 = J_1 \sum R_{21} + J_2 \sum R_{22} + \ldots + J_n \sum R_{2n}$$

....

$$\sum \varepsilon_i = J_1 \sum R_{i1} + J_2 \sum R_{i2} + \ldots + J_i \sum R_{ii} + \ldots + J_j \sum R_{ij} + \ldots + J_n \sum R_{in}$$

$$\sum \varepsilon_n = J_1 \sum R_{n1} + J_2 \sum R_{n2} + \ldots + J_n \sum R_{nn}$$

donde:

[2] En la figura 8, las corrientes de malla se han nombrado como J_1, J_2, J_3 y las hemos escogido haciéndolas coincidir con el sentido de circulación de la malla usado anteriormente.

* $\sum \varepsilon_i$ es la suma de las *fem* de la malla *i*, con el criterio de signos establecido en la ley de mallas de Kirchhoff.

* $\sum R_{ii}$ es la suma de todas las resistencias de la malla *i*. Dicha suma es siempre positiva.

* $\sum R_{ij}$ es la suma de las resistencias que tienen en común las mallas *i* y *j* (si no tienen ninguna en común, dicha suma será cero). La suma es:

- Positiva, si los sentidos de J_i y J_j son los mismos por dichas resistencias en común.

- Negativa, si los sentidos de J_i y J_j son opuestos en dichas resistencias.

Una vez resuelto el sistema de las corrientes de malla, es muy fácil encontrar la corriente que circula por cada resistencia. Volviendo a nuestro ejemplo, la solución del sistema es:

$$J_1 = 0{,}256\ \mathrm{A} \quad * \quad J_2 = 0{,}828\ \mathrm{A} \quad * \quad J_3 = 0{,}984\ \mathrm{A}$$

Si observamos la figura 8, veremos que:

$I_1 = + J_1 = 0{,}256$ A

$I_2 = + J_3 = 0{,}984$ A

$I_3 = + J_1$ (porque va en el mismo sentido que I_3) $-J_2$ (sentido contrario a I_3) = $-0{,}572$ A

$I_4 = + J_2 = 0{,}828$ A

$I_5 = + J_3$ (porque va en el mismo sentido que I_5) $-J_2$ (sentido contrario a I_5) = 0,156 A

$I_6 = + J_3$ (porque va en el mismo sentido que I_6) $-J_1$ (sentido contrario a I_6) = 0,728 A

6.- El Galvanómetro. Amperímetros y Voltímetros

Los instrumentos más comunes (y convenientes) para la medición de corrientes y resistencias se basan en el **galvanómetro** de bobina móvil que, básicamente, consta de una bobina conductora suspendida en el campo magnético de un imán. Cuando por la bobina pasa una corriente I_G, el campo magnético ejerce sobre ella una fuerza (ver tema siguiente) y la obliga a girar sobre sí misma un ángulo θ, donde θ es proporcional a la corriente I_G. Si se une la bobina a una aguja indicadora larga, cuya punta se mueva por una escala convenientemente graduada, podremos saber el valor de I_G (Figura 9). Si se invierte el sentido de I_G, se invierte el sentido del momento de torsión que actúa sobre la bobina, con lo que la aguja se mueve en sentido contrario. En un galvanómetro típico, su resistencia interna (R_G) está comprendida entre 1 y 10 Ω, y la corriente máxima que puede pasar por él (es decir, la corriente que produce una desviación de la aguja hasta el fondo de la escala) es del orden de 1 mA.

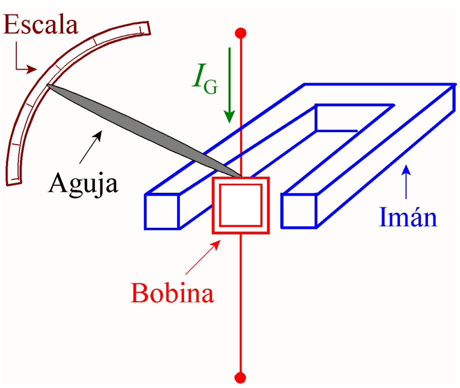

Figura 9: Esquema de un galvanómetro de bobina móvil

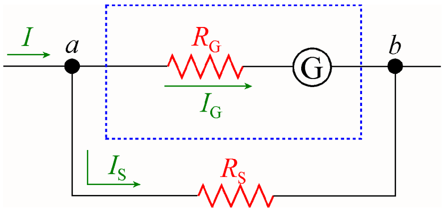

Figura 10: Amperímetro

El **amperímetro** es un instrumento *usado para medir la intensidad de corriente* que circula por una rama cualquiera de un circuito. Puesto que *ha de conectarse en serie*, su resistencia debe ser ínfima, pues de lo contrario perturbaría sensiblemente el sistema a medir y el resultado de la medida no se correspondería con la realidad. El amperímetro consta básicamente de un galvanómetro con una resistencia muy pequeña puesta en derivación (shunt, ver figura 10). De este modo se consigue que la mayor parte de la intensidad circule por el shunt (recordemos que por el galvanómetro sólo puede circular 1 mA como máximo) y, al ser un paralelo, la resistencia efectiva del amperímetro es menor que la del galvanómetro. El valor de la resistencia del shunt se determina en función de la máxima intensidad a medir y de la máxima intensidad que puede circular por el galvanómetro. Así, en la figura 10 tendremos:

$$I_{G_{\max}} + I_S = I_{\max} \qquad \Rightarrow \qquad I_S = I_{\max} - I_{G_{\max}}$$

$$I_{G_{\max}} R_G = I_S R_S \qquad \Rightarrow \qquad R_S = \frac{I_{G_{\max}} R_G}{I_S} = \frac{I_{G_{\max}} R_G}{I_{\max} - I_{G_{\max}}} \qquad [3.20]$$

Por ejemplo, para unos valores típicos de $I_{G\max} = 10^{-3}$ A y $R_G = 10\ \Omega$, si queremos que el amperímetro mida como máximo 5 A, R_S deberá tener un valor de $2{,}0004\cdot10^{-3}\ \Omega$ (aproximadamente 2 mΩ).

El **voltímetro** es un instrumento que *se usa para medir la d.d.p. que existe entre dos puntos* de un circuito (figura 11), por lo que *ha de conectarse en paralelo*. Ello quiere decir que su resistencia debe ser muy grande para que la perturbación que produzca en el circuito sea mínima. El voltímetro consta de un galvanómetro con una gran resistencia conectada en serie con él. El valor de la resistencia *R* que hay que conectar al galvanómetro en serie, viene determinada por las características del galvanómetro y de la tensión máxima a medir. Así tendremos:

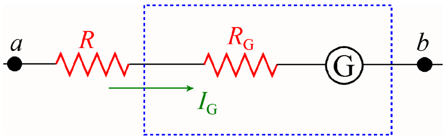

Figura 11: Voltímetro

$$V_a - V_b = I_G\left(R + R_G\right) \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{V_a - V_b}{I_G} - R_G \qquad [3.21]$$

Si, con el galvanómetro típico, queremos construir un voltímetro que mida como máximo 20 V, *R* ha de valer 19.990 Ω (aproximadamente 20 Kω).

7.- Medida de resistencias. Puente de Wheatstone

Para la medida de resistencias se utiliza un **ohmímetro** que, básicamente consta de un galvanómetro en serie con una *fem* (Figura 12). El valor de ε determina el valor máximo de la resistencia a medir, junto con las características del galvanómetro. El ohmímetro se conecta directamente con los bornes del resistor cuya resistencia *R*

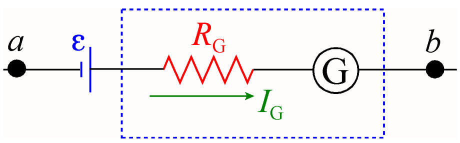

Figura 12: Ohmímetro

queremos medir[3]. En este caso la corriente que circula es:

$$I_G = \frac{\varepsilon}{R + R_G} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{\varepsilon}{I_G} - R_G$$

Si $R >> R_G$, entonces I_G es aproximadamente proporcional a $1/R$, de modo que la escala del galvanómetro puede calibrarse directamente para medir R (lógicamente, la escala no será lineal). En la práctica, se suele conectar en serie al esquema anterior un resistor variable R_S, actuando dicho resistor como ajuste de sensibilidad del ohmímetro. En esta situación, la resistencia del ohmímetro es $R_G + R_S$ y la resistencia a medir será

$$R = \frac{\varepsilon}{I_G} - \left(R_G + R_S\right)$$

Cuando se cortocircuitan los extremos del ohmímetro[4] (R = 0), $R_S = \dfrac{\varepsilon}{I_{G\max}} - R_G$, y se obtiene una desviación de la aguja del galvanómetro al fondo de escala.

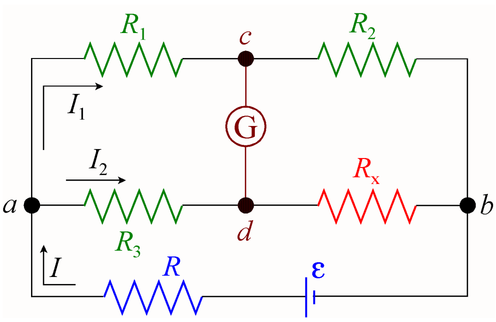

Figura 13: Puente de Wheatstone

El **puente de Wheatstone** (Figura 13), inventado probablemente por Charles Wheatstone en 1843, es ampliamente *utilizado como medidor de resistencias*. Si la resistencia desconocida es R_x, se ajustan los valores de R_1, R_2 y R_3 hasta que el galvanómetro no detecte paso de corriente. En este momento se cumplirá que $V_c = V_d$, por lo que tendremos:

$$I_1 R_1 = V_a - V_c = V_a - V_d = I_2 R_3$$
$$I_1 R_2 = V_c - V_b = V_d - V_b = I_2 R_X$$

Dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones nos quedará:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x} \qquad \Rightarrow \qquad R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \qquad [3.22]$$

En la práctica, con objeto de proteger el galvanómetro cuando el puente no está equilibrado, se coloca una resistencia variable en serie con él. Cuando el puente está equilibrado, se disminuye la resistencia y se vuelve a equilibrar, eliminando por fin la resistencia, se realiza el equilibrado final.

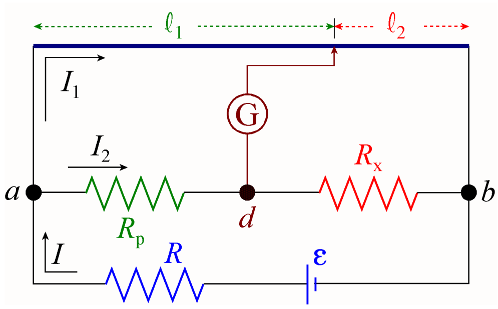

Figura 14: Puente de hilo

Un montaje mucho más práctico que el puente de Wheatstone es el **puente de hilo** (Figura 14), en el que las resistencias R_1 y R_2 se sustituyen por un hilo conductor largo y uniforme (Recordemos que la resistencia de un conductor es directamente proporcional a su longitud).

[3] La resistencia del resistor se mide antes de conectarlo al circuito.

[4] Es decir, cuando se unen directamente los dos extremos del ohmímetro.

De esta forma, cuando el puente está equilibrado

$$R_x = \frac{R_p R_2}{R_1}$$

Pero como $R_1 = \rho\ell_1/S$ y $R_2 = \rho\ell_2/S$, podemos obtener:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho\ell_2/S}{\rho\ell_1/S} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

Con lo que la resistencia incógnita valdrá:

$$R_x = R_P \frac{\ell_2}{\ell_1} \qquad [3.23]$$

Evidentemente, es absolutamente indispensable que el hilo esté perfectamente tenso, para garantizar que la sección sea constante en toda su longitud y que sea uniforme, para que la resistividad no varíe en todo el hilo.

8.- Carga y descarga de un condensador

Cuando se hace pasar a un circuito de una situación a otra (bien por un cambio en la tensión aplicada, bien por una modificación de alguno de los elementos que lo componen), se produce un periodo de transición durante el cual las corrientes en las distintas ramas y las caídas de tensión en los distintos elementos varían desde sus valores originales hasta otros nuevos. Transcurrido este periodo de transición, llamado régimen transitorio, las corrientes y tensiones toman valores *definitivos* y el circuito entra en el régimen estacionario.

Aplicando la ley de mallas de Kirchhoff a un circuito que contenga elementos que almacenen energía, resulta una ecuación diferencial que se resuelve usando las técnicas matemáticas adecuadas.

A continuación realizaremos el estudio del régimen transitorio de un circuito que contenga una resistencia y un condensador, siendo la fuente de alimentación de corriente continua.

a) CARGA DEL CONDENSADOR

La figura 15 muestra el circuito utilizado para cargar y descargar un condensador en corriente continua. El interruptor S, abierto inicialmente, se cierra en A en el instante t = 0. Inmediatamente empieza a fluir carga, hacia el condensador. Si la carga del condensador en cualquier instante es $Q(t)$, la ley de mallas de Kirchhoff aplicada al circuito se expresa

$$\varepsilon = V_R(t) + V_C(t) \qquad [3.24]$$

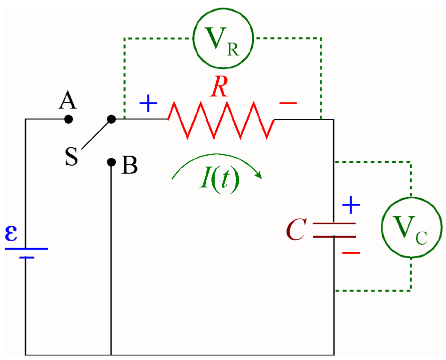

Figura 15

donde $V_C(t)$ es la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador en cualquier instante y $V_R(t)$ es la caída de tensión en la resistencia (también en cualquier instante). Es decir:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \qquad * \qquad V_R(t) = I(t)R$$

con lo que la ecuación [3.24] se escribiría

$$\varepsilon = \frac{Q(t)}{C} + I(t)R \qquad [3.24b]$$

En el instante de conectar S con A ($t = 0$), el condensador está totalmente descargado ($Q_0 = 0$) y, por tanto, $V_C(0) = 0$ con lo que [3.24] se transformaría en:

$$\varepsilon - V_{R_0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = V_{R_0} = I_0 R$$

con lo que la intensidad que circula por el circuito en el instante inicial es:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \qquad [3.25]$$

Cuando se alcance el régimen estacionario, el condensador estará completamente cargado ($Q = Q_{max}$) y no conducirá la corriente eléctrica ($I = 0$) con lo que la ecuación [3.24] será, para el instante en que ello ocurre,

$$\varepsilon - V_{C(final)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = V_{C(final)} = \frac{Q_{max}}{C}$$

Y así la carga final del condensador será:

$$Q_{max} = \varepsilon\, C \qquad [3.26]$$

Entre esos dos instantes (inicial, con $Q_0 = 0$ e $I_0 = \varepsilon/R$, y final, con $I = 0$ y $Q = Q_{max} = \varepsilon C$), la carga del condensador, la intensidad de corriente y las caídas de tensión serán variables y para obtener sus expresiones analíticas hemos de resolver la ecuación diferencial del circuito (ecuación [3.24*b*]). Para ello, derivamos dicha expresión con respecto del tiempo:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left[RI(t) + \frac{1}{C}Q(t)\right] \quad \Rightarrow \quad 0 = R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) \quad \Rightarrow \quad \int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI'(t)}{I'(t)} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \quad \Rightarrow$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad [3.27]$$

La ecuación [3.27] nos indica el valor de la corriente que recorre el circuito desde el instante inicial ($t = 0$, $I = I_0 = \varepsilon/R$) hasta que se alcanza el régimen estacionario ($t \to \infty$, $I = 0$). Para hallar la carga del condensador en cualquier instante:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad \int_{Q_0=0}^{Q(t)} dQ'(t) = \frac{\varepsilon}{R}\int_0^t e^{-\frac{t'}{RC}} dt' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Q(t) = \varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad [3.28]$$

donde comprobamos que para $t = 0$, $Q_0 = 0$ y cuando $t \to \infty$ (régimen estacionario), $Q = Q_{max} = \varepsilon C$. La caída de tensión en la resistencia y en el condensador serán, respectivamente:

$$V_R(t) = I(t)R = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}} \qquad [3.29] \qquad * \qquad V_C(t) = \frac{1}{C}Q(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad [3.30]$$

Definimos la **constante de tiempo**, τ, de un circuito RC como el *tiempo que ha de transcurrir para que la corriente que circula por el circuito disminuya hasta alcanzar un valor igual a 1/e de su valor inicial*. De la ecuación [3.27]

$$t = \tau \qquad \Leftrightarrow \qquad I = \frac{1}{e}I_0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{e}I_0 = I_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} \qquad \Rightarrow \qquad \tau = RC \qquad [3.31]$$

① La figura 16*a* muestra la representación gráfica de la carga del condensador en función del tiempo

La carga aumenta con el tiempo y cuando $t = \tau$, la carga será:

$Q = Q_{max}\,(1-e^{-1}) \approx 0{,}63\,Q_{max} = 0{,}63\,\varepsilon C$

y cuando $t \to \infty$, $Q \to Q_{max} = \varepsilon C$.

② La figura 16*b* muestra la representación gráfica de la ecuación [3.27]:

La intensidad disminuye con el tiempo desde $I = I_0 = \varepsilon/R$ hasta $I \to 0$ cuando $t \to \infty$; cuando $t = \tau$, $I = I_0\,e^{-1} \approx 0{,}37\,I_0 = 0{,}37\varepsilon/R$.

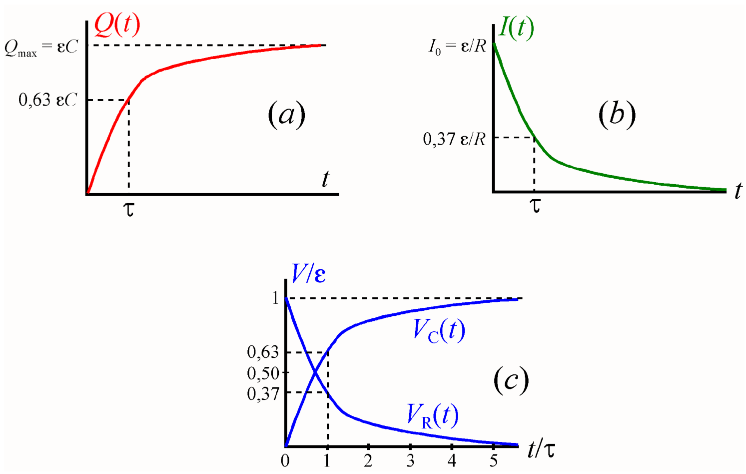

Figura 16

③ Por último, la figura 16*c* muestra la gráfica de V/ε en función de t/τ tanto para la resistencia como para el condensador:

La tensión en el condensador aumenta con el tiempo (porque su carga aumenta) y la de la resistencia disminuye (igual que hace la intensidad de corriente que circula).

b) DESCARGA DEL CONDENSADOR

Si una vez transcurrido el tiempo suficiente, conectamos el interruptor S a B, el condensador comenzará a descargarse. Si empezamos a contar el tiempo en ese instante, $Q_0 = \varepsilon C$, donde ε es la fuerza electromotriz que se usó para cargar el condensador. El condensador actuará ahora como fuente de tensión variable y, por tanto

$$V_C(t) = V_R(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q(t)}{C} = I(t)R \qquad [3.32]$$

Puesto que para $t = 0$, $Q(0) = Q_0 = \varepsilon C$, la ecuación [3.32] nos dice que

$$I(0) = I_0 = \frac{Q_0}{RC} = \frac{\varepsilon C}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \qquad [3.33] \qquad * \qquad Q_0 = \varepsilon C \qquad [3.34]$$

Puesto que la carga del condensador disminuye con el tiempo ($t \to \infty$, $Q(t) \to 0$), la intensidad que recorre el circuito, tomada en el sentido habitual (contrario al del movimiento de las cargas negativas), es de sentido contrario al de la intensidad en el proceso de carga y vale

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \qquad [3.35]$$

Sustituyendo [3.35] en [3.32]

$$\frac{Q(t)}{C} = -R\frac{dQ(t)}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ'(t)}{Q'(t)} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Q(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{RC}} = \varepsilon C\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [3.36]$$

con lo que la intensidad que recorre el circuito será (Ecuación [3.35])

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [3.37]$$

En la descarga, la **constante de tiempo** del circuito ($\tau = RC$) representa el *tiempo que ha de transcurrir para que la carga del condensador (o la corriente) disminuya hasta valer 1/e de su valor inicial*, con lo que tiene el mismo significado, desde el punto de vista de la corriente, que en el proceso de carga.

En cualquier instante, la tensión en el condensador será:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \varepsilon\, e^{-\frac{t}{\tau}} = V_R(t) \qquad [3.38]$$

Es de destacar el hecho de que, puesto que hemos escogido como sentido de la corriente el real, las tensiones dadas por la ecuación [3.38] no son las que indicarían los voltímetros mostrados en la figura 15, ya que el polo negativo del voltímetro de la resistencia está conectado al punto de más alto potencial y el positivo al de más bajo potencial. Dicho voltímetro marcaría tensiones negativas: $V_{\text{Rvoltímetro}} = -\varepsilon e^{-t/\tau}$.

La figura 17*c* muestra la gráfica de V/ε en función de t/τ tanto para la resistencia como para el condensador, ya que son idénticas. La figura 17*a* muestra la carga del condensador en función del tiempo y la figura 17*b* la intensidad de la corriente que recorre el circuito. Son las representaciones gráficas de las funciones matemáticas definidas por las ecuaciones [3.36] para la figura 17*a*, [3.37] para la figura 17*b* y [3.38] para la figura 18*c*.

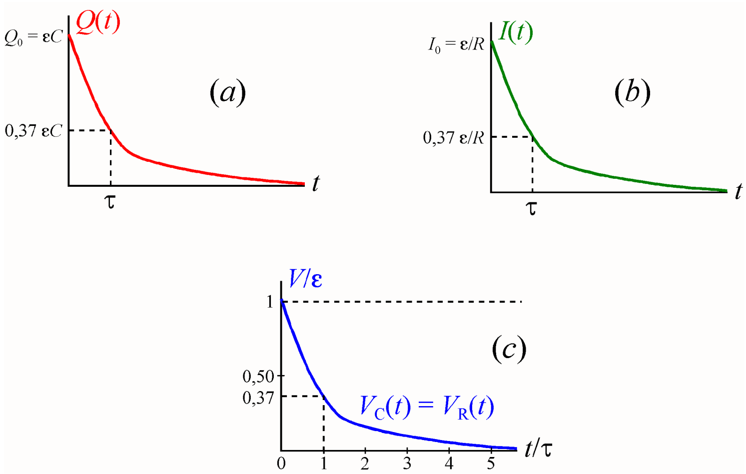

Figura 17

APÉNDICE

Receptores eléctricos. Fuerza contraelectromotriz

Hemos visto dos de los elementos típicos de un circuito: el generador (que suministra energía) y el resistor (que consume energía calorífica). Hay un tercer tipo de elementos característicos de un circuito: **los receptores eléctricos**, definidos como *dispositivos que transforman energía eléctrica en otro tipo de energía distinta de la térmica*. Por ejemplo, los motores transforman energía eléctrica en mecánica, en el proceso de carga de una pila, se transforma energía eléctrica en energía química, etc.

Los receptores eléctricos se caracterizan por su **fuerza contraelectromotriz**, definida como la *energía eléctrica que consumen y que transforman en cualquier otro tipo de energía distinto de la térmica, por cada unidad de carga que los atraviesan*. Es decir:

$$\varepsilon' = \frac{dW_{nc}}{dq}$$

con lo que la potencia que consume un receptor, en forma distinta al calor, es

$$P_{nc} = \frac{dW_{nc}}{dt} = \frac{dW_{nc}}{dq}\frac{dq}{dt} = \varepsilon' I$$

En la práctica, cualquier receptor posee una resistencia eléctrica (r') en la que se disipa energía calorífica. Por ello, de toda la potencia que el circuito entrega al receptor [$(V_c - V_d)\, I$, siendo $(V_c - V_d)$ la d.d.p. entre los bornes del receptor], una parte la pierde en forma de calor ($I^2 r'$), y el resto la transforma ($\varepsilon' I$), con lo que

$$\left(V_c - V_d\right) I = I^2 r' + \varepsilon' I$$

con lo que la d.d.p. entre los bornes de un receptor es

$$V_c - V_d = \varepsilon' + I r'$$

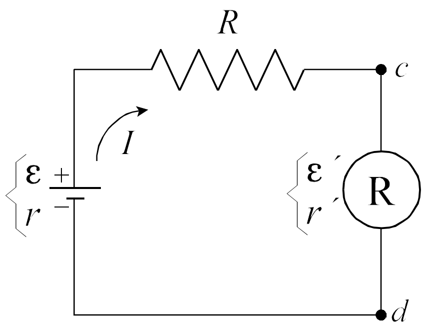

Figura 18

Si un circuito está compuesto por un generador, un receptor y una resistencia (Figura 18), la conservación de la energía (**Potencia entregada = Potencia consumida**) nos lleva a

$$\varepsilon I = I^2 \left(R + r + r'\right) + \varepsilon' I$$

con lo que la intensidad que recorre el circuito es:

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R + r + r'} \qquad [3.39]$$

La ecuación [3.39] se conoce con el nombre de **Ley de Ohm generalizada**.