TEMA 4

CAMPO MAGNÉTICO EN EL VACÍO

1.- Fenómenos magnéticos

Aproximadamente desde el año 800 a.c. los griegos ya conocían el fenómeno del magnetismo a través de la magnetita (piedra procedente de Magnesia, región del Asia Menor). Descubrieron que dicha *piedra imán* tenía la curiosa propiedad de atraer a pequeños trozos de hierro.

En 1269 Pierre de Maricourt construyó, usando un imán esférico natural, un mapa de las direcciones tomadas por una aguja al colocarla en diversos puntos de la esfera: encontró que dichas direcciones formaban líneas que rodeaban la esfera pasando a través de dos puntos opuestos de la misma (de igual forma que los meridianos terrestres rodean la Tierra). Por la analogía con los meridianos terrestres, llamó **polos** del imán a dichos puntos, descubriendo que en ellos la fuerza magnética es más intensa, así como el hecho de que polos del mismo nombre se repelen y los de distinto nombre se atraen.

En 1600, William Gilbert descubrió la razón de que la aguja de una brújula se oriente por sí misma en una dirección definida: la Tierra es un inmenso imán permanente.

En 1750, John Michell estudió cuantitativamente la atracción y repulsión de polos magnéticos, demostrando, mediante una balanza de torsión, que la atracción y repulsión de los polos de dos imanes son de igual intensidad y varían en razón inversa con el cuadrado de la distancia que los separa. La ley de la fuerza entre polos magnéticos es semejante a la que existe entre cargas eléctricas, pero con una diferencia importante: las líneas que dibujó Maricourt mueren en la misma fuente que las originan, es decir, es imposible aislar un polo magnético.

La conexión entre la electricidad y el magnetismo no se conoció hasta el siglo XIX, cuando Oersted, realizando una experiencia de cátedra ante sus alumnos, descubrió que una corriente eléctrica que circulaba por un conductor desviaba la aguja de una brújula situada en sus proximidades. Ampère propuso la teoría de que las corrientes eléctricas son las fuentes de todos los fenómenos magnéticos y con ello sentó las bases de la moderna teoría electromagnética.

Entre 1820 y 1830 Michael Faraday y Joseph Henry demostraron, en forma independiente, más relaciones entre la electricidad y el magnetismo: **Un campo magnético variable crea un campo eléctrico no conservativo**. Años más tarde, el trabajo teórico desarrollado por Maxwell demostró que **un campo eléctrico variable da lugar a un campo magnético**. Las interacciones eléctrica y magnética están íntimamente relacionadas, siendo en realidad dos aspectos diferentes de una misma propiedad de la materia: su carga eléctrica. Por ello, las interacciones eléctrica y magnética deben considerarse conjuntamente bajo la designación más general de interacción electromagnética. La interacción básica es la que existe entre dos cargas en movimiento y la fuerza magnética que ejerce una carga móvil sobre otra carga móvil se transmite mediante un tercer agente: el campo magnético. Una carga en movimiento crea un campo magnético y es este campo el que ejerce la fuerza sobre otra carga en movimiento. Puesto que una carga móvil es una corriente eléctrica, **la**

Open Course Ware
Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

interacción magnética puede considerarse como una interacción entre corrientes.

2.- Fuerza magnética sobre una carga puntual en movimiento. El vector inducción magnética

El fenómeno magnético puede estudiarse independientemente de las causas que lo producen (las *fuentes* del campo magnético, que estudiamos en el tema siguiente) introduciendo el concepto de campo magnético y estudiando las interacciones entre el campo magnético y la materia. En la región del espacio en la que son observables fenómenos magnéticos decimos que existe un campo magnético, cuya intensidad viene dada por la función matemática $\vec{B}$ (vectorial), que se denomina **inducción magnética** o vector **campo magnético**. El vector $\vec{B}$, como el vector $\vec{E}$, tiene la propiedad de ser tangente a las líneas de campo en cada punto. comprobándose experimentalmente que dichas líneas son cerradas. Definiremos el vector $\vec{B}$ mediante una definición operacional.

Se observa experimentalmente que cuando una carga puntual q se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en las proximidades de un imán (o de una corriente eléctrica), se ejerce sobre ella una fuerza adicional que depende de su carga y del valor y dirección de su velocidad: dicha fuerza puede cuantificarse midiendo la que actúa cuando la carga está en reposo y sustrayéndola de la que actúa cuando está en movimiento (es decir, vamos a pensar momentáneamente, que el campo eléctrico es nulo en la región en la que se mueve la carga). Las experiencias demuestran que:

1.- La magnitud de la fuerza que actúa es proporcional a la carga q

2.- La magnitud de la fuerza también es proporcional al módulo de la velocidad

3.- El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza dependen de la dirección y el sentido de la velocidad.

4.- Existe una dirección tal que, si la partícula se mueve por ella, la fuerza que recibe es nula.

5.- Si la dirección de $\vec{v}$ no es la que acabamos de mencionar, la fuerza es perpendicular a esa dirección y a la propia $\vec{v}$.

6.- La magnitud de la fuerza es proporcional al seno del ángulo que forman la dirección de "fuerza nula" con la dirección de la velocidad de la partícula.

7.- La fuerza que se ejerce sobre una carga positiva es de sentido opuesto a la que se ejerce sobre una carga negativa.

Todas estas observaciones experimentales nos llevan a definir el vector inducción magnética como aquél que, teniendo por dirección la de la fuerza magnética nula, verifica la relación[1]:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \textbf{[4.1]}$$

Esta definición lleva implícito el hecho de que la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad y a la inducción magnética (Punto 5); si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos, entonces $\vec{F} = 0$ (Punto 4); $F = |q| vB \operatorname{sen}\left(\vec{v}, \vec{B}\right)$ (Puntos 1, 2, 3, 6).

[1] La expresión [4.1] indica la fuerza magnética que el campo magnético ejerce sobre una carga puntual que se mueva en su interior.

Open Course Ware

Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

Tomando módulos en la Ecuación [4.1] y despejando el módulo de la intensidad de campo tenemos:

$$B = \frac{F}{|q|\, v \operatorname{sen}\left(\vec{v}, \vec{B}\right)} \qquad [4.2]$$

La ecuación [4.2] nos permite definir la unidad de inducción magnética en el sistema CGS-electromagnético (Gauss) y en el S.I. (Tesla).

Un **Gauss** es la *intensidad de un campo magnético uniforme en el que una unidad electromagnética de carga (10 C) que se mueve con 1 cm/s de velocidad, perpendicularmente al campo, se halla sometida a una fuerza de 1 dina*.

$$1\,\mathrm{G} = 1\,\frac{\mathrm{dina}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{uemq}\cdot\mathrm{cm}}$$

Un **Tesla** es la *intensidad de un campo magnético uniforme en el que una carga de 1 C, que se mueve con 1 m/s de velocidad perpendicularmente al campo, se halla sometida a una fuerza de 1 newton*.

$$1\,\mathrm{T} = 1\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}} = 10^4\,\mathrm{G}$$

razón por la cual se denominaba Miriagauss lo que hoy llamamos Tesla.

El Tesla es una unidad muy grande. Para dar una idea de órdenes de magnitud, diremos que el campo magnético terrestre tiene una intensidad de 0,5 G ($5\cdot10^{-5}$ T) y que los imanes permanentes (según forma, tamaño y material) tienen intensidades comprendidas entre 100 G (10^{-2} T) y 5000 G (0,5 T).

Terminaremos este epígrafe diciendo que una forma cómoda de manejar las direcciones y sentidos de los vectores que intervienen en la ecuación [4.1] es usar la regla de la mano derecha (Figura 1): *El pulgar indica el sentido del producto vectorial* $\vec{v}\times\vec{B}$ *cuando el resto de dedos se sitúan en el sentido que lleva al primer vector (velocidad* $\vec{v}$ *) hacia el segundo (vector campo magnético* $\vec{B}$ *) por el camino más corto. Así, la fuerza magnética tendrá ese mismo sentido si la carga es positiva, o sentido contrario si es negativa.*

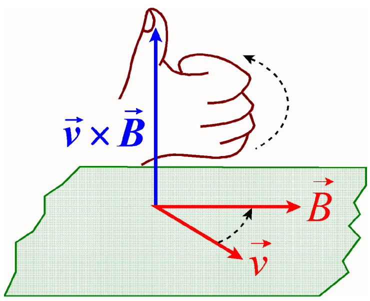

Figura 1

3.- Movimiento de una carga puntual en un campo magnético

Como hemos dicho, **cualquier partícula que se mueva en un campo magnético** recibe la acción de la fuerza magnética dada por la ecuación [4.1] y, por tanto, adquirirá una aceleración de la misma dirección y sentido que dicha fuerza, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Puesto que dicha fuerza es perpendicular a la velocidad y ésta es tangente a la trayectoria en cada punto, la aceleración que adquiere la carga será perpendicular a la trayectoria en cada punto, es decir, **adquirirá una aceleración centrípeta**. Esto es

Open Course Ware
Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

absolutamente lógico si pensamos que **el trabajo realizado por la fuerza magnética es nulo**[2] y, por tanto, no cambiará la energía cinética de la carga, según el teorema de las fuerzas vivas, siendo pues nula la aceleración tangencial.

Supongamos que una carga puntual q entra en un campo magnético uniforme de intensidad $\vec{B}$ con una velocidad $\vec{v}$. Si descomponemos $\vec{v}$ en dos componentes, una paralela al campo $(\vec{v}_{11})$ y otra perpendicular al mismo $(\vec{v}_1)$, la ecuación [4.1] se transforma en:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\left(\vec{v}_{11}+\vec{v}_1\right)\times\vec{B} = q\vec{v}_{11}\times\vec{B} + q\vec{v}_1\times\vec{B} = q\vec{v}_1\times\vec{B}$$

El módulo de dicha fuerza, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\left(\vec{v}_1,\vec{B}\right)=1$, será:

$$F = |\,q\,|\,v_1\,B$$

y será constante puesto que lo son v_1 y B. Teniendo en cuenta que, según hemos dicho, dicha fuerza comunica a la carga una aceleración normal, la aplicación de la segunda ley de Newton lleva a:

$$|q|\,v_1 B = m\frac{v_1^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{mv_1}{|q|\,B} \qquad [4.3]$$

Así pues, el radio de curvatura de la proyección de la trayectoria sobre el plano perpendicular a $\vec{B}$ es constante, lo que quiere decir que dicha proyección es una circunferencia.

Supongamos, en primer lugar que $\vec{v}=\vec{v}_1$, es decir, que la velocidad con que entró la carga era perpendicular al campo. La ecuación [4.3] sigue siendo válida con $v_1 = v$, y ahora la trayectoria en sí (y no sólo la proyección) es una circunferencia, con lo que la carga describe un movimiento circular uniforme cuya frecuencia angular (velocidad angular ω) podemos calcular, así como el período T:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|\,B}{m} \qquad [4.4] \qquad * \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|\,B} \qquad [4.5]$$

La frecuencia angular dada por la ecuación [4.4] se denomina **frecuencia ciclotrón**: depende, exclusivamente, de la relación entre la carga y la masa de la partícula (q/m) y del campo magnético (no dependiendo ni de la velocidad ni del radio de la trayectoria).

Si la velocidad con que la carga entra en el campo tiene una componente paralela al campo $(\vec{v}_{11}\neq 0)$, entonces, en el mismo tiempo en el que la carga describe una vuelta completa en el plano perpendicular a $\vec{B}$ (período) avanza en la dirección de $\vec{B}$ una distancia dada por

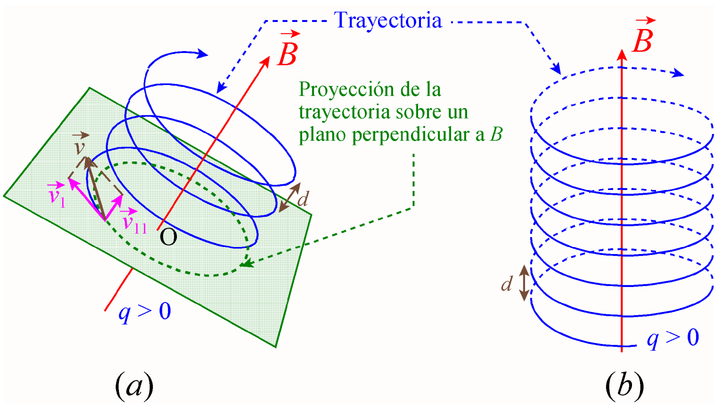

Figura 2: (*a*) Esquema de la composición de los dos movimientos: v_1 gira en torno al punto O, en tanto que v_{11} hace que la carga avance en la dirección de B. (*b*) Trayectoria seguida por una carga positiva.

[2] Téngase en cuenta que $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = 0$, por ser $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{v}$

Open Course Ware
Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

$$d = v_{11} T = \frac{2\pi m v_{11}}{|q| B} \qquad [4.6]$$

El resultado de la composición de ambos movimientos es una hélice de radio R (dado por la ecuación [4.3]) y paso de hélice d (dado por la ecuación [4.6]), tal como se muestra en la figura 2.

Si el campo magnético en el que entra la carga no es uniforme, la trayectoria seguida por $\vec{v}_1$ no sería cerrada ya que el radio de curvatura de la misma no sería constante (ecuación [4.3]).

Finalmente, si en la misma región del espacio en la que existe el campo $\vec{B}$ existe también un campo eléctrico definido por $\vec{E}$, entonces cualquier carga q, que se mueva con una velocidad $\vec{v}$ no paralela a $\vec{B}$, recibirá una fuerza magnética (dada por la ecuación [4.1]) y una fuerza eléctrica igual a $q\vec{E}$, por lo que la fuerza total sobre la partícula cargada será:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad [4.7]$$

que se denomina **fuerza de Lorentz**. Curiosamente, la fuerza de Lorentz puede ser nula sin que lo sean ni la eléctrica ni la magnética: basta con que sean de igual módulo, de igual dirección (para lo cual $\vec{E}$ y $\vec{B}$ han de ser perpendiculares) y de sentido opuesto.

4.- Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica

Si un campo magnético ejerce una fuerza sobre una carga que se mueva en su seno, obviamente ejercerá una fuerza sobre un conductor recorrido por una corriente eléctrica, ya que ésta, como sabemos, no es más que un flujo de cargas.

Supongamos un conductor cilíndrico de área de la sección recta igual a S por el que circula una corriente constante de intensidad I (Figura 3). Supongamos que un trozo de dicho conductor, de longitud ℓ, se encuentra inmerso en un campo magnético B. Si la corriente circula hacia la derecha, los portadores de carga se moverán hacia la derecha si son positivos y hacia la izquierda si son negativos. La velocidad con que se mueven los portadores de carga viene dada por la ecuación [4.8] (véase tema de corriente continua), es decir

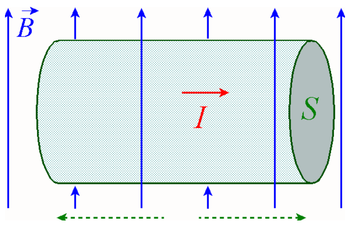

Figura 3

$$v_d = \frac{I}{nS|q|} \qquad [4.8]$$

Si elegimos un **vector unitario**, $\vec{u}_\ell$, **cuya dirección y sentido sean los de la corriente**, a partir de la ecuación [4.8] podemos deducir:

$$q\vec{v}_d = \frac{I}{nS}\vec{u}_\ell \qquad [4.9]$$

En efecto, si los portadores son positivos, se mueven en el sentido de I y $q\vec{v}_d$ tiene el mismo sentido de $\vec{u}_\ell$. Si son negativos, $\vec{v}_d$ tiene sentido contrario a $\vec{u}_\ell$, pero al ser $q < 0$, $q\vec{v}_d$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}_\ell$.

Open Course Ware
Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

Luego la ecuación [4.9] es correcta.

Sobre cada portador, actúa una fuerza dada por la ecuación [4.1], es decir

$$\vec{F}_p = q\vec{v}_d \times \vec{B} = \frac{I}{nS}\vec{u}_\ell \times \vec{B} \qquad [4.10]$$

Si la densidad cúbica de portadores es n, el número total de portadores que existen en el trozo de conductor de longitud ℓ es: $N = n\,\vartheta = n\,S\,\ell$, y la fuerza total sobre dicho trozo de conductor será:

$$\vec{F} = N\,\vec{F}_p = nS\ell\frac{I}{nS}\vec{u}_\ell \times \vec{B} = I\,\ell\vec{u}_\ell \times \vec{B}$$

y si le damos a la longitud del conductor carácter vectorial (módulo = ℓ, y dirección y sentido, los de la corriente, es decir, $\vec{\ell} = \ell\vec{u}_\ell$), entonces

$$\boldsymbol{\vec{F} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B}} \qquad \textbf{[4.11]}$$

La ecuación [4.11] sólo es válida para conductores rectilíneos inmersos en campos magnéticos uniformes. Si el conductor no es rectilíneo, $\vec{u}_\ell$ no es constante en dirección y entonces es preciso tomar elementos de conductor $\left(d\vec{\ell}\right)$ lo suficientemente pequeños como para considerarlos rectilíneos. La fuerza elemental que recibe tal elemento de corriente será:

$$d\vec{F} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B} \qquad [4.12]$$

y *la fuerza total se obtendrá integrando la ecuación [4.12] a lo largo del conductor*.

5.- Efecto Hall

Como hemos visto, la fuerza que un campo magnético ejerce sobre una corriente eléctrica la ejerce, en realidad, sobre los portadores de carga. Supongamos que introducimos una cinta conductora de espesor y en un campo magnético uniforme de intensidad $\vec{B}$ (Figura 4), de forma que $\vec{B}$ sea perpendicular a la corriente que haremos circular por el conductor debido a un campo eléctrico externo $\vec{E}_x$ (supongamos, pues, que $\vec{B}$ tiene la dirección del eje Y).

En la figura 4*a*, donde suponemos que los portadores de carga son positivos, se muestra cómo la fuerza magnética que el campo $\vec{B}$ ejerce sobre ellos (dada por la ecuación [4.1]) está dirigida hacia arriba, lo que provoca una acumulación de carga positiva en la parte superior de la cinta y, consecuentemente, la aparición de un campo eléctrico, $\vec{E}_z$, dirigido en la dirección de las Z negativas. Dicho campo eléctrico ejerce sobre los portadores una fuerza eléctrica, $q\vec{E}_z$, dirigida hacia abajo que tiende a

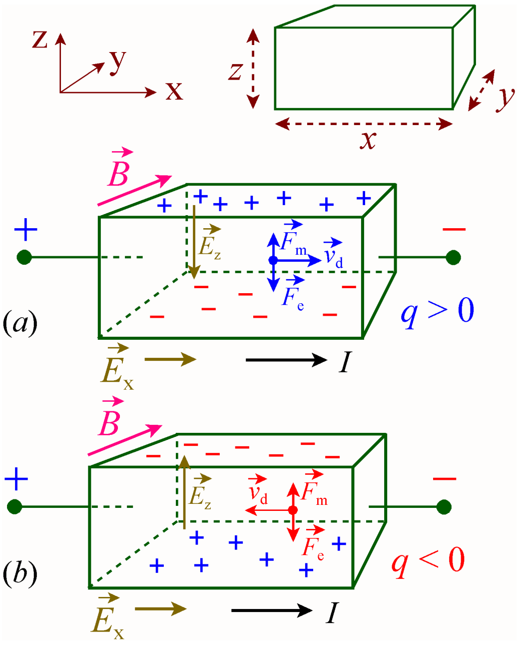

Figura 4: (*a*) portadores positivos. (*b*) portadores negativos

Open Course Ware
Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

anular la fuerza magnética: el movimiento de portadores hacia la parte superior de la cinta cesará cuando la fuerza de Lorentz sobre los portadores sea nula, es decir:

$$q\left(\vec{E}_z + \vec{v}_d \times \vec{B}_y\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}_z = -\vec{v}_d \times \vec{B}_y$$

y por tanto

$$E_z = v_d\, B \text{ sen } 90° = v_d\, B_y \qquad [4.13]$$

Si la intensidad de corriente es constante, $\vec{v}_d$ será constante y, por tanto, $\vec{E}_z$ es un campo eléctrico uniforme. La d.d.p. que se crea entre la parte superior y la inferior de la cinta valdrá:

$$V_H = E_z\, z = v_d\, B_y\, z \qquad [4.14]$$

llamada **tensión Hall** o ***fem* Hall**, en honor de E.H. Hall (1855-1938) quién fue el primero en detectarla. Según la ecuación [4.8], $v_d = I/nS|q|$, y como $\{S = y\, z\}$ y para $q > 0$ se cumple que $|q| = q$ tendremos:

$$v_d = \frac{I}{nq\,yz}$$

por lo que la ecuación [4.14] se escribirá como:

$$V_H = v_d B_y z = \frac{I}{nq\,yz} B_y z \qquad \Rightarrow \qquad V_H = \frac{I B_y}{nq\,y} \qquad [4.15]$$

La *aparición de una tensión V_H en dirección perpendicular a la corriente en un conductor de anchura* ***y*** se denomina **efecto Hall**.

La ecuación [4.15] ha sido deducida suponiendo que los portadores de carga son positivos. Si son negativos (Figura 4*b*), se acumulan también en la parte superior de la cinta, con lo que el campo eléctrico creado tiene sentido contrario al anterior ($\vec{E}_z$ apunta a las Z positivas). Al ser contrario $\vec{E}_z$ y contrario el signo de la carga, $q\vec{E}_z$ volverá a tener sentido hacia las Z negativas, con lo que el equilibrio se alcanza igualmente. Cuando $q < 0$, la ecuación [4.15] proporciona una $V_H < 0$, lo que indica que la parte superior de la cinta se encuentra a un potencial más bajo que la parte inferior y esto nos proporciona un método útil y operativo para determinar el signo de los portadores de carga en materiales desconocidos: si la tensión Hall, medida en las condiciones descritas en la Figura 4, es positiva, los portadores de carga son positivos; si es negativa, indica que los portadores de carga son negativos.

El efecto Hall permite dos aplicaciones prácticas más. Si conocemos la carga de los portadores (por ejemplo, en los metales son electrones, salvo en algunos alcalinos), la ecuación [4.15] nos permite conocer la densidad cúbica de portadores sin más que medir la tensión Hall producida cuando una muestra de dimensiones conocidas se introduce recorrida por una corriente conocida, en un campo uniforme B_y también conocido. La segunda aplicación consiste en calibrar una cinta (el calibrado consiste en calcular, mediante la ecuación [4.15], el producto *nq*) y utilizarla para medir campos magnéticos desconocidos.

Open Course Ware
Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

6.- Espira de corriente en el interior de un Campo Magnético. Momento dipolar magnético

En el epígrafe 4 hemos visto la fuerza que un campo magnético ejerce sobre un conductor recorrido por una corriente, pero ¿Qué ocurrirá si cerramos el conductor sobre sí mismo formando una espira de corriente? Para simplificar, consideremos una espira rectangular de lados *a* y *b* inmersa en un campo magnético uniforme en la dirección del eje de las Y (Figura 5*a*), siendo *I* la corriente que circula por la espira. La fuerza total sobre la espira será:

$$\vec{F} = \vec{F}_{MN} + \vec{F}_{NP} + \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{QM}$$

donde cada una de estas cuatro fuerzas es la fuerza ejercida por un campo uniforme sobre un conductor rectilíneo recorrido por una corriente estacionaria, es decir, cada una de ellas se obtiene aplicando la ecuación [4.11]. Puesto que:

$$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{PQ} \qquad * \qquad \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{QM}$$

$$\vec{F}_{MN} = -\vec{F}_{PQ} \qquad * \qquad \vec{F}_{NP} = -\vec{F}_{QM}$$

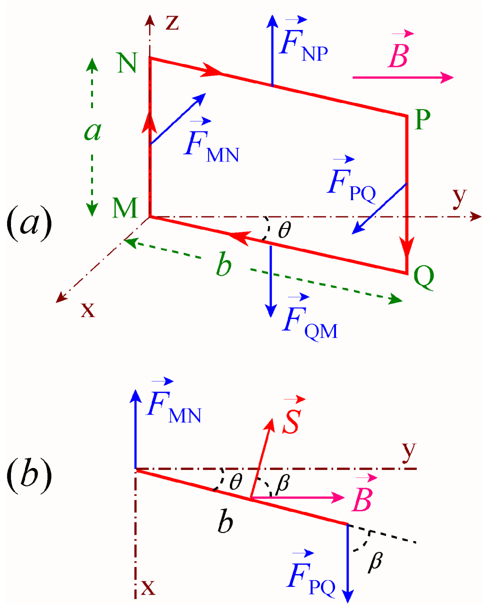

Figura 5: (*a*) Espira de corriente en un campo magnético uniforme. (*b*) Vista de la espira desde el eje Z.

la fuerza neta que se ejerce sobre la espira es nula. Este resultado es absolutamente general e independiente de la forma de la espira. En efecto, si la espira tiene una forma cualquiera y el campo magnético es uniforme, la fuerza total sobre la espira se obtiene integrando la ecuación [4.12], es decir:

$$\vec{F} = \oint I\left(d\vec{\ell} \times \vec{B}\right)$$

ya que la espira constituye una línea cerrada. Puesto que I y $\vec{B}$ son constantes, tendremos:

$$\oint I\left(d\vec{\ell} \times \vec{B}\right) = I\left[\oint d\vec{\ell}\right] \times \vec{B} \text{ pero } \oint d\vec{\ell} = 0 \text{, por lo que } \vec{F} = 0.$$

El hecho de que la fuerza neta sea cero no quiere decir que la espira ha de estar necesariamente en reposo. En efecto, supongamos que la espira puede girar alrededor de un eje que pasa por el lado MN y que, inicialmente, el plano de la espira forma un ángulo θ con la dirección del campo magnético: puesto que $\vec{F}_{NP}$ y $\vec{F}_{QM}$ tienen la misma línea de acción, tienen un momento nulo respecto al eje; también tiene momento nulo $\vec{F}_{MN}$ por tener su punto de aplicación en el eje; pero $\vec{F}_{PQ}$ ejerce sobre la espira un momento de torsión que tiende a situarla en el plano XZ (es decir, la obligará a girar perpendicularmente al campo). El módulo de dicho momento de torsión (Figura 5*b*) será:

$$\tau = \left|\overrightarrow{NP} \times \vec{F}_{PQ}\right| = F_{PQ}\, b \operatorname{sen}\beta$$

como $F_{PQ} = I\,a\,B$; $ab = S$; $\beta = \left(\vec{S}, \vec{B}\right)$ nos quedará: $\tau = IabB \operatorname{sen}\beta = ISB \operatorname{sen}\left(\vec{S}, \vec{B}\right) = I\left|\vec{S} \times \vec{B}\right|$.

Es fácil comprobar que la anterior igualdad en módulos también se verifica con los correspondientes vectores, es decir:

$$\vec{\tau} = I\vec{S} \times \vec{B} \qquad [4.16]$$

Open Course Ware
Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

Aunque la ecuación [4.16] se ha deducido para el caso particular de una espira rectangular, tiene validez general cualquiera que sea la forma de la espira que se introduce en un campo magnético uniforme. Observamos que el momento de torsión es máximo cuando el plano de la espira contiene al campo (es decir, $\vec{S}$ perpendicular a $\vec{B}$) y nulo cuando dicho plano es perpendicular al campo (es decir $\vec{S}$ paralelo a $\vec{B}$). Si en lugar de una espira tenemos una bobina de *N* espiras, entonces cada una de ellas sufre un momento de torsión dado por la ecuación [4.16] y, si todas las espiras tienen la misma superficie, el momento de torsión de la bobina será:

$$\vec{\tau} = IN\vec{S}\times\vec{B} \qquad [4.17]$$

siendo $\vec{S}$ el vector superficie de una de las espiras de la bobina.

Por definición, se denomina **momento dipolar magnético** (o, simplemente, **momento magnético**) de una *espira* al producto $I\vec{S}$:

$$\vec{\mathfrak{M}} = I\vec{S} \qquad [4.18]$$

con lo que la ecuación [4.16] puede escribirse como

$$\vec{\tau} = \vec{\mathfrak{M}}\times\vec{B} \qquad [4.19]$$

Si en lugar de una espira tenemos una bobina constituida por *N* vueltas cada una de área *S*, entonces llamamos **momento dipolar magnético** de una *bobina* al producto $IN\vec{S}$:

$$\vec{\mathfrak{M}} = IN\vec{S} \qquad [4.22]$$

con lo que la ecuación [4.17] se escribe igual que la [4.19].

Profundicemos un poco más en el comportamiento de una espira de corriente en un campo magnético uniforme. El par de torsión que actúa sobre ella tiende a alinear $\vec{S}$ con el campo de igual forma que la aguja imantada de una brújula se alinea con el campo magnético terrestre: la espira de corriente se comporta exactamente igual que un imán en presencia de campos magnéticos. La cara Norte de la espira coincide con el sentido saliente del vector $\vec{S}$ (corriente circulando por la espira en sentido antihorario) y la cara Sur es aquella que coincide con el sentido entrante de $\vec{S}$ (corriente circulando por la espira en sentido horario). Cuando el momento de torsión se hace nulo, el vector $\vec{B}$ (externo) y el vector $\vec{S}$ coinciden en dirección y sentido: el campo $\vec{B}$ penetra en la espira por su polo Sur y sale por su polo Norte, igual que ocurriría con un pequeño imán. En el siguiente tema veremos que esta equivalencia entre imanes y espiras va más allá y demostraremos que una espira de corriente crea a su alrededor un campo magnético que, para puntos alejados de la espira, es idéntico al de un pequeño imán.

7.- Imanes en el interior de campos magnéticos

A lo largo del Tema se ha dado por supuesto que nos era familiar el comportamiento de un imán en un campo magnético, habida cuenta de que todos hemos tenido alguna vez un imán o una brújula en nuestras manos. Ciñéndonos al caso concreto de la brújula, sabemos que si la abandonamos a sí misma en el campo magnético terrestre, tiende a orientarse siguiendo las líneas del campo de modo que dichas líneas penetran por el polo sur de la aguja y salen por el norte.

OpenCourseWare | Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

Con objeto de dar forma matemática a este fenómeno, se define idealmente la **intensidad de polo magnético** (o, simplemente, polo magnético) q^* como el *cociente entre la fuerza ejercida sobre el polo y el valor de la inducción magnética existente en el punto en que se encuentra el polo*. Es decir,

$$q^* = \frac{F}{B} \qquad [4.21]$$

La ventaja de definir q^* de esta forma estriba en el hecho de que permite una analogía armónica entre la electricidad y el magnetismo. En efecto, la fuerza eléctrica que recibe una carga en un punto en el que existe un campo eléctrico $\vec{E}$ es $|q|E$. Según [4.21], la fuerza magnética que recibe un polo magnético en un punto en el que existe un campo magnético $\vec{B}$ es q^*B. Para que la analogía sea total, se asigna signo positivo a q^* si es un polo Norte y negativo si es un polo Sur. Según este convenio, la ecuación [4.21] puede escribirse en forma vectorial como:

$$\vec{F} = q^*\vec{B} \qquad [4.22]$$

En el Sistema Internacional de unidades, q^* se mide en N/T. Como 1 T = 1 N/(A m), q^* también se mide en (A m).

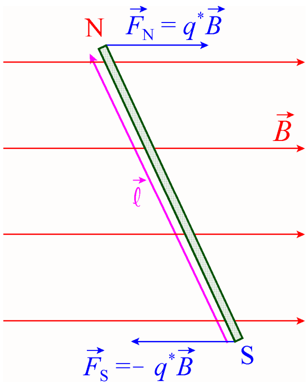

Figura 6

Si introducimos un pequeño imán en un campo magnético uniforme, dado que $q_N^* = -q_S^*$, la fuerza total resultante sobre el imán es nula, pero no así el momento de torsión (Figura 6). Llamando $\vec{\ell}$ al vector cuyo módulo es igual a la longitud del imán, cuya dirección es la del imán (hablamos de barritas imantadas) y cuyo sentido es del polo Sur al polo Norte, el momento de torsión es:

$$\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{F}_N = q^*\vec{\ell} \times \vec{B} \qquad [4.23]$$

Definimos el **momento dipolar magnético** de un *imán*, $\vec{\mathfrak{M}}$, como el producto entre q^* y $\vec{\ell}$ (obsérvese la analogía con el momento dipolar eléctrico de un dipolo)

$$\vec{\mathfrak{M}} = q^*\vec{\ell} \qquad [4.24]$$

con lo que la ecuación [4.23] se escribiría igual que la expresión del momento de torsión que actúa sobre una espira de corriente (ecuación [4.19]), con la diferencia de que las definiciones de $\vec{\mathfrak{M}}$ para una espira y un pequeño imán son distintas.

En cualquiera de los dos casos (imanes o espiras), una vez situados en un campo magnético externo, es preciso realizar un trabajo para girarlos un ángulo θ, que estará medido desde la dirección de $\vec{\mathfrak{M}}$ coincidente con la de $\vec{B}$, ya que en ese punto el momento de torsión es nulo. Ese trabajo quedará almacenado en forma de energía potencial en el dipolo magnético.

$$W_{ext}(\theta_1 \to \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathfrak{M} B \operatorname{sen}\theta d\theta = -\mathfrak{M}B(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = U_2 - U_1 = \Delta U$$

Tomando el origen de energía potencial en el punto en que $\theta_1 = 90°$ ($\vec{\mathfrak{M}}$ perpendicular a $\vec{B}$, par de torsión máximo).

$$U = -\mathfrak{M}B\cos\theta = -\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B} \qquad [4.25]$$

Open Course Ware
Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0

expresión formalmente idéntica a la energía potencial de un dipolo eléctrico (Ecuación [1.62]).

La ecuación [4.25] nos indica que el valor mínimo de la energía potencial tiene lugar cuando $\vec{\mathfrak{M}}$ y $\vec{B}$ son paralelos (θ = 0°). En tal posición, la espira no posee ninguna capacidad para realizar trabajo y, para cambiar su posición, es preciso aplicar un momento de torsión externo. La posición de máxima energía corresponde a $\vec{\mathfrak{M}}$ y $\vec{B}$ antiparalelos[3] (θ = 180°): como sabemos, corresponde a una posición de equilibrio inestable, ya que un pequeño giro hace que el dipolo gire sobre sí mismo hasta la posición de mínima energía potencial, alejándose, por tanto, de la posición de equilibrio original. Esa capacidad de girar sobre sí mismo y perder energía potencial es la base del funcionamiento de los motores eléctricos, los cuales mantienen girando dipolos magnéticos, generalmente bobinas, de forma constante. Basta con que, mediante algún procedimiento, se modifique el sentido de $\vec{\mathfrak{M}}$ o el de $\vec{B}$ cada vez que se llega a la posición de equilibrio estable (mínima energía potencial, es decir, θ = 0°) con lo que se consigue volver a situar los dipolos en el punto de equilibrio inestable (θ = 180°). Generalmente, en los motores se invierte el sentido de $\vec{\mathfrak{M}}$, invirtiendo el sentido de la corriente que circula por la bobina mediante un sistema de escobillas.

[3] Usualmente es utiliza el término *antiparalelos* para dos vectores de la misma dirección, pero de sentidos contrarios.

Open Course Ware

Aguiar García, J; Delgado Cabello, J. (2011). Física II
OCW- Universidad de Málaga http://ocw.uma.es
Bajo licencia Creative Commons Attribution-Non-Comercial-ShareAlike 3.0