TEMA 7

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

1. Fenómenos de inducción electromagnética. Ley de Faraday-Lenz

Vamos a describir con detalle los experimentos que permitieron a Faraday y a Lenz, por separado, enunciar la ley que lleva su nombre, y que resume el fenómeno de la inducción electromagnética.

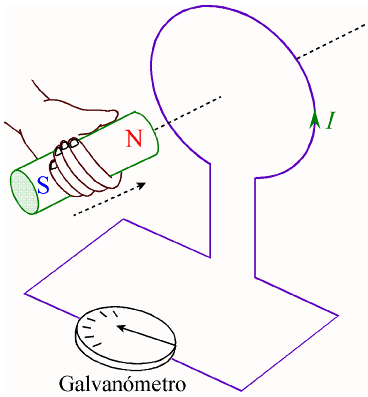

Figura 1

a) Supongamos que disponemos de un imán y de una bobina conectada a un galvanómetro (en la figura 1, por simplicidad, sólo se ha dibujado una espira): puesto que no existe ninguna *f.e.m.* en el circuito, no parece lógico esperar que el galvanómetro detecte paso de corriente. Ahora bien, si movemos el imán, acercándolo o alejándolo del circuito, la aguja del galvanómetro se desvía, indicando el paso de corriente por el circuito. Si deja de moverse el imán, la aguja del galvanómetro, retorna al cero. Si realizamos el experimento, llegaremos a las siguientes conclusiones:

1. La *f.e.m.* inducida aumenta con la velocidad de movimiento del imán.

2. Para una velocidad fija, la *f.e.m.* inducida aumenta con el número de vueltas de la bobina.

3. Para una velocidad fija y una cierta bobina, la *f.e.m.* inducida depende del campo magnético del imán.

4. La *f.e.m.* inducida al acercar el polo norte del imán es de signo contrario a la inducida cuando se aleja dicho polo y del mismo signo que cuando alejamos el polo sur (que, a su vez, es de signo contrario a la inducida cuando acercamos el polo sur).

Hablamos de *f.e.m.* inducida porque la causa de que circule corriente por un circuito es la presencia en el mismo de una *f.e.m.*: puesto que no existe una *f.e.m. real*, decimos que el movimiento relativo imán-bobina (al mismo resultado llegaríamos si fijásemos el imán y moviésemos el circuito) induce una *f.e.m.* en el circuito.

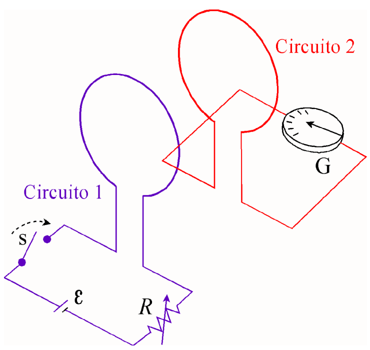

Figura 2

b) Coloquemos dos circuitos con sendas bobinas muy próximas entre sí: en uno de ellos hay una pila (por tanto, una *f.e.m.*), un interruptor, una resistencia (para evitar que se queme la bobina por efecto Joule) y una bobina; en el otro una bobina y un galvanómetro (en la figura 2 se ha representado una espira en lugar de cada bobina, para simplificar). Cuando el interruptor está abierto, no circula corriente por ninguno de los dos circuitos. Al cerrar el interruptor se aprecia una desviación momentánea en el galvanómetro, desviación que cesa cuando la corriente en el circuito 1 alcanza su valor estacionario. Al abrir el interruptor, se observa una nueva desviación momentánea de sentido contrario a la anterior. La experiencia muestra que se induce corriente en el circuito 2 mientras la corriente del circuito 1 ha estado variando con el tiempo (de cero a I, al cerrar el interruptor y desde I hasta cero al abrirlo). Nuevamente, el parámetro característico es la velocidad con que varía la corriente, y no su mayor o menor intensidad.

c) Cerremos el interruptor del circuito 1 (tendremos una corriente estacionaria en él) y movamos los circuitos uno respecto del otro (acercándolos o alejándolos): observaremos desviaciones permanentes de la aguja del galvanómetro mientras los circuitos estén en movimiento relativo (y de sentido contrario, según se acerquen o se alejen). Esta desviación depende de la intensidad de corriente que circula por el circuito 1, del número de espiras de la bobina del circuito 2 y de la velocidad con que se acerquen o se alejen los circuitos.

Intentemos analizar todas estas experiencias, con objeto de llegar a una ley que las explique y, lo que es más importante, nos permita predecir fenómenos análogos. En todas ellas existe un flujo de campo magnético a través de la bobina del circuito inducido, flujo que tiene lugar a través de una superficie abierta (la delimitada por la bobina, que es una superficie múltiple) y el parámetro determinante es la variación de este flujo a través de dicha superficie: en las experiencias a) y c), la variación se debe al movimiento relativo imán-circuito (a) o circuito-circuito (c); en la experiencia b), se debe al campo magnético variable con el tiempo creado por una corriente variable. El circuito en el que se induce la *f.e.m.* no distingue la causa de la variación del flujo, sólo que éste varía con el tiempo. Puesto que todas las experiencias ponen de manifiesto que la *f.e.m.* inducida depende de la velocidad, podemos concluir que dicha *f.e.m.* inducida es igual a la velocidad con que varía el flujo magnético, es decir:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_m}{dt} \qquad [7.1]$$

$$\Phi_m = N \int_{S_{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad [7.2]$$

donde N es el número de espiras del circuito inducido. La ecuación [7.1] se conoce con el nombre de **Ley de Faraday de la inducción electromagnética**, y nos proporciona el valor de la *f.e.m.* inducida pero no su polaridad. Faraday también determinó la polaridad de la *f.e.m.* inducida, pero no lo hizo de la forma simple y precisa de Lenz, por lo que usaremos la ley de Lenz para determinarla.

El **enunciado de Lenz acerca de la polaridad de la *f.e.m.* inducida** es una aplicación del principio de conservación de la energía. Según Lenz *la f.e.m. inducida tiene un sentido tal que se opone a las causas que la ocasionan*. Consideremos la experiencia a), en la que acercamos el polo norte de un imán a la bobina: según Lenz, la *f.e.m.* será tal que se oponga al acercamiento de la bobina. ¿Cómo?, haciendo que la corriente circule en un sentido tal que la bobina presente su cara norte (ver figura 5*c* del tema 5) al polo norte que se le acerca, con lo que *saldrán* líneas de campo de la bobina que contrarrestarán al exceso de líneas de campo que entran en ella, exceso que se debe al acercamiento del imán.

Como hemos indicado, el enunciado de Lenz se basa en la conservación de la energía (volveremos sobre ello en el epígrafe siguiente). La fuente de energía de la corriente inducida en el experimento a) es la persona que, al acercar el imán, ejerce la fuerza necesaria para vencer la repulsión entre él y el polo magnético que presenta la bobina. Parte de la energía química de la persona (esfuerzo muscular) se transforma en energía eléctrica de la corriente inducida, apareciendo en forma de calor por efecto Joule. Si la persona mueve el imán con mayor rapidez, la energía por unidad de tiempo (potencia) que se comunica al sistema es mayor y, como consecuencia, la potencia disipada por efecto Joule aumenta (por un aumento de la *f.e.m.* inducida). Si abrimos el circuito inducido, no hay corriente inducida (aunque sí se induce *f.e.m.*) y, por tanto, no hay energía disipada: en consecuencia no es preciso realizar trabajo para mover el imán. En este caso, para averiguar la polaridad de la *f.e.m.* inducida, se cierra *mentalmente* el circuito y, aplicando la ley de Lenz, se averigua el sentido de la corriente inducida: la polaridad de la *f.e.m.* inducida es la de una pila que, incorporada al circuito, diese ese sentido a la intensidad.

La forma de expresar la *polaridad de la f.e.m. inducida* (***oposición a las variaciones de flujo***) es añadiendo un signo *menos* a la Ley de Faraday, es decir:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad [7.3]$$

expresión que se conoce con el nombre de **Ley de Faraday-Lenz**.

La existencia de una *f.e.m.* en un circuito sin que en él existan generadores, nos obliga a volver sobre la definición de fuerza electromotriz (ecuación [3.14]). Para que las cargas circulen por un conductor, creando con ello una corriente estacionaria, es preciso que sobre ellas actúe una fuerza, por lo que el conductor no se encontrará en equilibrio electrostático, y dicha fuerza estará originada por un campo eléctrico. Ahora bien, este campo no puede ser un campo electrostático o, lo que es lo mismo, no puede ser conservativo. En efecto, si lo fuera, la circulación del mismo a lo largo de la línea cerrada del contorno del circuito tendría que ser nula. Si consideramos que el medio es óhmico, dicha circulación será:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \left\{ \vec{J} = \sigma\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{J}/\sigma \right\} = \oint \frac{\vec{J}\cdot d\vec{\ell}}{\sigma} \neq 0$$

Definimos *f.e.m.* como la circulación del campo eléctrico (no conservativo) a lo largo de la línea cerrada del contorno del circuito.

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad [7.4]$$

con lo que la ley de Faraday-Lenz, en su expresión más general, se escribe:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad [7.5]$$

2.- Fuerza electromotriz debida al movimiento

Supongamos dos alambres conductores paralelos, 1 y 2, unidos por un extremo mediante una resistencia *R*, de forma que se pueda *cerrar* el circuito mediante un tercer alambre, 3, que puede deslizar a lo largo de los dos primeros (figura 3). Supongamos, asimismo, que todo el dispositivo se encuentra

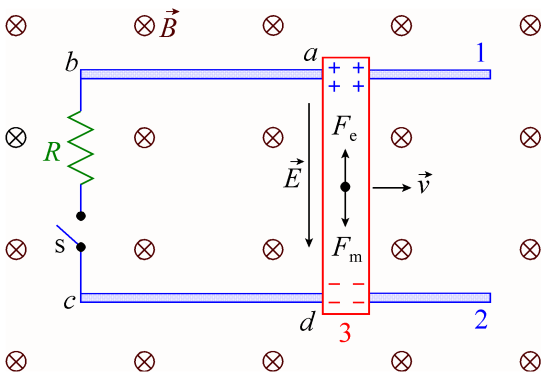

Figura 3

inmerso en un campo magnético uniforme de intensidad $\vec{B}$, perpendicular al circuito. Si con el interruptor s abierto, desplazamos el alambre hacia la derecha, por ejemplo, con una velocidad $\vec{v}$, las cargas libres (electrones) de dicho conductor recibirán una fuerza magnética, ejercida por el campo $\vec{B}$, que, de acuerdo con su signo y con la regla de la mano izquierda, irá dirigida hacia abajo. Dicha fuerza será:

$$\vec{F}_m = -e\,\vec{v}\times\vec{B}$$

la acumulación de carga negativa en la parte inferior del conductor 3 (con la consiguiente acumulación, por defecto de carga negativa, de carga positiva en el extremo superior), provoca que en el conductor aparezca un campo eléctrico, dirigido de arriba a abajo, que ejercerá sobre los electrones una fuerza eléctrica, dirigida hacia arriba (ya que $q < 0$) de valor

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}$$

con lo que la fuerza neta que reciben los electrones es:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = -e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Este movimiento de carga continuará hasta que la fuerza eléctrica y magnética se igualen en módulo (no olvidemos que son de sentido contrario) o, lo que es lo mismo, hasta que la fuerza neta sea nula: esto se produce cuando el campo eléctrico alcanza un valor dado por:

$$\vec{F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} \qquad [7.6]$$

con lo que aparece entre sus extremos una *f.e.m.* dada por la ecuación [7.4]

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_{bc} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_3 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_3 \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{\ell} \qquad [7.7]$$

La ecuación [7.7] recibe el nombre de ***f.e.m.* de movimiento**.

Si cerramos el interruptor (y seguimos moviendo el alambre 3 a la velocidad constante $\vec{v}$), el exceso de carga negativa fluirá hacia la izquierda por el conductor 2 (cada carga negativa que abandone el conductor 3 debilita la fuerza eléctrica que actúa sobre los electrones, con lo que la fuerza magnética restituirá el electrón *perdido*, es decir, la d.d.p. en los extremos del alambre 3 se mantiene constante), con lo que por el circuito *abcd* circulará una corriente estacionaria en sentido antihorario.

¿Podríamos haber determinado la polaridad de la *f.e.m.* de movimiento (o lo que es lo mismo, el sentido de la corriente inducida) usando la ley de Lenz?. Por supuesto que sí. Al desplazar hacia la derecha el conductor 3, aumentamos el flujo del campo magnético B a través de la espira *abcd*: por la espira, pues, debe circular una corriente que anule ese aumento de flujo. ¿Cómo?: haciendo que por ella circule una corriente en sentido antihorario ya que así dicha corriente creará un campo magnético, B_I, saliendo del papel cuyas líneas contrarrestarán el aumento de líneas que entran en el plano del papel al mover el conductor 3 hacia la derecha. ¿Qué ocurre con la energía? Para mover el conductor 3 hacia la derecha con una velocidad $\vec{v}$ es preciso hacer una fuerza $\vec{F}$ que desarrolle una potencia instantánea dada por:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = F\,v$$

Por otra parte, al estar el conductor 3 recorrido por una corriente de intensidad I, el campo magnético B ejercerá sobre él una fuerza magnética hacia la izquierda (Figura 4) igual en módulo a la fuerza aplicada (ya que $\vec{v}$ es constante, la fuerza neta será CERO). Dicha fuerza valdrá:

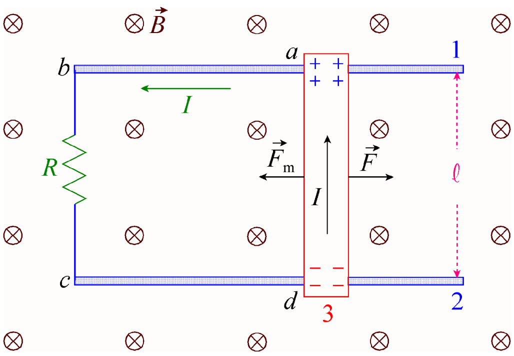

Figura 4

$$\vec{F}_m = I\left|\vec{\ell}\times\vec{B}\right| = I\ell B$$

y como $F_\mathrm{m} = F$, la potencia desarrollada por el agente que mueve el conductor 3 (potencia que, evidentemente, es entregada al circuito) valdrá:

$$P = F\,v = F_\mathrm{m}\,v = B\,I\,\ell\,v \qquad [7.8]$$

¿Qué ocurre con esta potencia? Pues que se disipa por efecto Joule en la resistencia R (expresión de la resistencia total del circuito). En efecto, de la ecuación [7.7], la *f.e.m.* inducida en la barra es:

$$\varepsilon = B\,\ell\,v$$

con lo que la intensidad que pasa por el circuito es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

y la potencia disipada en R es:

$$P_R = I^2 R = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)^2 R = \frac{(B\ell v)^2}{R} \qquad [7.9]$$

Por otra parte, de la ecuación [7.8], la potencia entregada al circuito es:

$$P = B\ell v I = B\ell v\left(\frac{B\ell v}{R}\right) = \frac{(B\ell v)^2}{R} \qquad [7.10]$$

Evidentemente (Ecuaciones [7.9] y [7.10]), la potencia entregada y la consumida son iguales.

3.- <u>Coeficientes de inducción mutua y de autoinducción</u>

Supongamos dos bobinas muy próximas de forma que una de ellas esté recorrida por una corriente (Figura 5): algunas de las líneas de campo magnético $\vec{B}_{12}$ creado por ella atravesará la otra bobina. Este flujo que atraviesa la bobina 2 sólo puede cambiar por alguna de las siguientes razones:

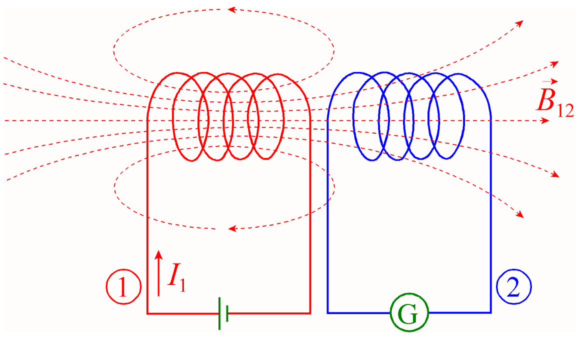

Figura 5

1) Porque cambiemos las bobinas de medio.

2) Porque cambiemos su estado de movimiento relativo.

3) Porque cambiemos la forma geométrica de las bobinas.

4) Porque modifiquemos el valor del campo B_{12} variando la corriente I_1 que lo crea.

Prescindiendo de las tres primeras circunstancias (estamos trabajando siempre en aire, las bobinas suelen ser partes fijas en un circuito y no vamos a deformar su geometría) el flujo que atraviesa la bobina 2 sólo puede cambiar porque cambie I_1. En esas condiciones:

$$\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \left(\frac{d\Phi_{12}}{dI_1}\right)\left(\frac{dI_1}{dt}\right)$$

Definimos **coeficiente de inducción mutua entre la bobina 1 y la bobina 2** a la derivada del flujo que atraviesa la bobina 2 (flujo del campo creado por la bobina 1) con respecto a la causa creadora de dicho flujo: la corriente I_1.

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_1} \qquad [7.11]$$

Si el medio es lineal, homogéneo e isótropo (propiedades que tiene el aire), M_{12} es la constante de proporcionalidad entre el flujo y la intensidad de corriente que lo crea. En cualquier circunstancia, el valor del coeficiente M_{12} depende, exclusivamente, de la geometría del sistema: forma y tamaño de las bobinas y posiciones relativas.

Puesto que el flujo que atraviesa la bobina 2 cambia con el tiempo, se inducirá en ella una *f.e.m.* cuyo valor vendrá dado por la ley de Faraday-Lenz, es decir,

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\left(\frac{d\Phi_{12}}{dI_1}\right)\left(\frac{dI_1}{dt}\right) = -M_{12}\left(\frac{dI_1}{dt}\right) \qquad [7.12]$$

Análogamente, si la corriente circula por la bobina 2, el campo creado por ella hará que la bobina 1 sea atravesada por un flujo, Φ_{21}, que sólo cambiará porque cambie la corriente I_2 que circula por la bobina 2. Definimos el **coeficiente de inducción mutua entre la bobina 2 y la bobina 1** de forma semejante al anterior, es decir:

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_2} \qquad [7.13]$$

con lo que,

$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\left(\frac{dI_2}{dt}\right) \qquad [7.14]$$

Aunque la demostración no es sencilla, sí es cierto que los dos coeficientes, M_{12} y M_{21} son iguales y a su valor se le llama, **coeficiente de inducción mutua entre ambos circuitos (*M*)**:

$$M \equiv M_{12} = M_{21} \qquad [7.15]$$

Por otra parte, las líneas de campo del campo creado por la bobina que transporta la corriente atraviesan a la propia bobina y, variaciones en el valor de la intensidad que la recorre hará cambiar el autoflujo. Definimos el **coeficiente de autoinducción (*L*)**, a la *variación del flujo a través de la bobina, debido a las variaciones de la corriente que recorre la propia bobina*. Es decir:

$$L = \frac{d\Phi_m}{dI} \qquad [7.16]$$

Dichas variaciones de flujo provocarán en la bobina una *f.e.m.* autoinducida de valor:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \qquad [7.17]$$

de forma que cuando la corriente aumente con el tiempo, la *f.e.m.* inducida creará una corriente de sentido contrario (contracorriente) y cuando disminuya, la corriente inducida será del mismo sentido (extracorriente). La causa del chispazo que se produce al desconectar directamente de la red un motor es la extracorriente producida.

Dadas las definiciones de los coeficientes de inducción (ecuaciones [7.11], [7.13] y [7.16]), es fácil comprender que todos ellos se miden con la misma unidad. En el S.I. dicha unidad recibe el nombre de Henrio (en honor de Joseph Henry, pionero en los estudios de inducción). Un Henrio es la inductancia de una bobina que es atravesada por un flujo que varía en un weber al cambiar la corriente que lo recorre en un Amperio (De la ecuación [7.16]). También, de la ecuación [7.17], un Henrio es la inductancia de una bobina en la que se autoinduce una fuerza electromotriz de un voltio cuando la corriente que la recorre cambia en un Amperio cada segundo. Así pues,

$$1\ \mathrm{H} = 1\ (\mathrm{Wb/A}) = 1\ (\mathrm{T\ m^2/A}) = 1\ (\mathrm{V\ s/A}) = 1\ \Omega\ \mathrm{s}$$

En el Tema anterior veíamos que $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ T m/A y decíamos que veríamos otras posibles formas de expresar la unidad de μ_0. Ahora estamos en condiciones de decir que:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{Tm/A} = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb/Am} = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m} = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \Omega\mathrm{s/m}$$

4.- Asociación de inductores

Un circuito cualquiera puede contener varios inductores y el problema con el que nos enfrentamos ahora es si podemos encontrar una autoinducción equivalente a todos ellos: lo haremos sólo en el caso particular de que los inductores estén lo suficientemente separados como para despreciar su inducción mutua.

Los inductores, como los condensadores y resistencias, se pueden asociar en serie, paralelo y en asociación mixta.

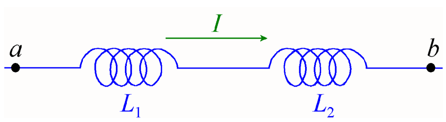

Figura 6

a) **Asociación en serie**. En la figura 6 podemos apreciar cómo dos inductores conectados en serie son recorridos por la misma corriente, de modo que cualquier cambio que se produzca en la intensidad es idéntico para los dos. Entre los puntos *a* y *b*, la *f.e.m.* total autoinducida será la suma de las *f.e.m.* autoinducida en cada bobina.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} = -(L_1 + L_2)\frac{dI}{dt}$$

Está claro que si reemplazamos las dos bobinas por una sola cuyo coeficiente de autoinducción sea $(L_1 + L_2)$ de forma que por ella pase la corriente *I*, la *f.e.m.* que se autoinduce es justo la que existe en el circuito de la figura 6 entre *a* y *b*. Así pues:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \qquad [7.18]$$

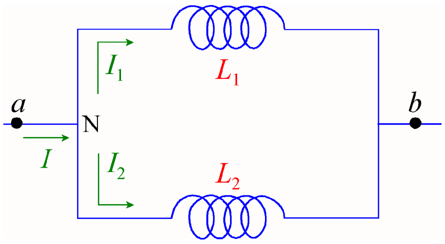

Figura 7

b) **Asociación en paralelo**. En la figura 7 podemos ver dos inductores conectados en paralelo. La corriente *I* que llega al nudo N se bifurca en I_1 e I_2, cumpliéndose que:

$$\varepsilon_{ab} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{\varepsilon_{ab}}{L_1} \qquad * \qquad \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\varepsilon_{ab}}{L_2}$$

Según la ley de nudos de Kirchhoff,

$$I = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\varepsilon_{ab}}{L_1} - \frac{\varepsilon_{ab}}{L_2} = -\varepsilon_{ab}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)$$

$$\varepsilon_{ab} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}\left(\frac{dI}{dt}\right)$$

Por lo que el coeficiente de autoinducción equivalente será:

$$L_{eq} = \frac{1}{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \qquad [7.19]$$

c) **Asociación mixta**. Bastará con aplicar ordenadamente las leyes de asociación en serie y paralelo.

5.- Energía almacenada en un inductor

Imaginemos un circuito con un inductor por el que circula una corriente estacionaria I_0: mientras la corriente sea efectivamente estacionaria, no habrá en la bobina ningún fenómeno de autoinducción. Si mediante algún procedimiento cambiamos la corriente que circula por la bobina, se autoinducirá en ella una *f.e.m.* dada por la ecuación [7.17]: dicha *f.e.m.*, al oponerse a la causa que la produce, impedirá que la intensidad siga variando en el tiempo, salvo que apliquemos una tensión externa que anule tal impedimento. Dicha tensión externa debe ser, evidentemente, opuesta a la *f.e.m.* autoinducida, es decir:

$$V_{ext} = -\varepsilon = L\frac{dI}{dt}$$

El hecho de aplicar una tensión externa supone suministrar energía al circuito: cuando una carga dq pasa a través de la bobina, lo hace porque la tensión externa realiza sobre ella un trabajo dado por:

$$dW = V_{ext}dq = L\frac{dI}{dt}dq = \left\{\frac{dq}{dt} = I\right\} = LI\,dI$$

Imaginemos que lo que hemos hecho es aumentar la corriente desde I_0, que es lo que valía en el instante inicial t_0, hasta I_f, valor que alcanza en el instante t_f, y que, a partir de ese momento, mantenemos constante la intensidad I_f: puesto que la *f.e.m.* sólo existe entre los instantes t_0 y t_f, sólo entre esos instantes se realiza trabajo (es decir, sólo entre esos instantes se comunica energía al circuito). ¿Cuánta energía se ha suministrado?

$$W = \int_{I_0}^{I_f} LI\,dI = \frac{1}{2}L\left(I_f^2 - I_0^2\right) \qquad [7.20]$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que en t_0 no circulaba corriente por el circuito ($I_0 = 0$) y que en t_f la corriente final es I. Esta situación se corresponde con el encendido de un circuito; el apagado se corresponde con $I_0 = I$ e $I_f = 0$, con lo que el trabajo calculado por la ecuación [7.20] resulta negativo, lo que quiere decir que es energía que el circuito <u>nos</u> entrega. En esta situación la energía suministrada al circuito es:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \qquad [7.21]$$

¿Dónde va a parar esta energía? Si suponemos que la resistencia de nuestro circuito es nula, no hay disipación de energía por efecto Joule, por lo que, de algún modo, dicha energía debe quedar almacenada en el inductor (de la misma forma que un condensador almacena energía durante su carga). Si efectivamente es así, la energía almacenada podrá *extraerse* y convertirla en trabajo. En efecto, en el proceso de *apagado* que comentábamos antes, la intensidad disminuye con el tiempo [(dI/dt) < 0] por lo que la *f.e.m.* autoinducida resulta ser positiva y, por tanto, tiende a mantener la corriente existente (mediante la anteriormente mencionada extracorriente) para lo cual debe realizar un trabajo sobre las cargas que pasan por ella.

En general, cualquier inductor por el que circule una corriente I almacena una energía U que es exactamente el trabajo que es preciso realizar para conseguir que circule esa corriente partiendo de intensidad nula.

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \qquad [7.22]$$

6.- Energía del campo magnético. Densidad de energía magnética

Por simplicidad, haremos la demostración para un solenoide muy largo, por lo que empezaremos por determinar el coeficiente de autoinducción del solenoide.

Supongamos un solenoide de longitud ℓ constituido por N espiras muy juntas cada una de las cuales tiene un radio igual a R, de forma que $\ell >> R$. En estas condiciones, el campo en el interior del solenoide, cuando el solenoide es recorrido por una corriente I, es (Ecuación [15.11]):

$$B = \mu_0 n I \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

donde n es el número de espiras por unidad de longitud ($n = N/\ell$).

El flujo que atraviesa una de las espiras del solenoide es:

$$\Phi_m^{'} = \int_{S_{espira}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{S_{espira}} B\,dS\cos 0^\circ = \{B = \text{cte.}\} = B\int_{S_{espira}} dS = BS = \mu_0 n I \pi R^2$$

El flujo total a través de todo el solenoide será (Ecuación [5.14]):

$$\Phi_m = N\Phi_m^{'} = N\mu_0 n I \pi R^2 = \{N = n\ell\} = \mu_0 n^2 \ell I \pi R^2$$

con lo que el coeficiente de autoinducción del solenoide es (Ecuación [7.16]):

$$L = \frac{d\Phi_m}{dI} = \mu_0 n^2 \ell \pi R^2 \qquad [7.23]$$

expresión en la que podemos comprobar cómo L es, efectivamente, función única de la geometría del solenoide.

Cuando por este solenoide circula una corriente de intensidad I, almacena una *energía magnética* dada por la ecuación [7.22]:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\left(\mu_0 n^2 \ell \pi R^2\right)\frac{B^2}{\mu_0^2 n^2} = \frac{1}{2\mu_0}\pi R^2 \ell B^2 \qquad [7.24]$$

expresión absolutamente análoga a la energía del campo electrostático (ecuación [2.17]), ya que ($\pi R^2\ell$) = ϑ, es el volumen del solenoide.

Definimos **densidad de energía magnética** como la *energía almacenada en un elemento de circuito (energía cuyo origen último está en el campo magnético) por unidad de volumen*. Para el solenoide:

$$\eta_B = \frac{U}{\vartheta} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad [7.25]$$

expresión similar a la densidad de energía del campo electrostático.

Aunque la ecuación [7.25] la hayamos deducido para el caso particular de un solenoide muy largo, tiene validez general para cualquier campo magnético. Si el campo es constante, entonces:

$$U = \eta_B \vartheta = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \vartheta$$

si no es constante, entonces:

$$U = \int_{\vartheta} \eta_B d\vartheta = \int_{\vartheta} \frac{1}{2\mu_0} B^2 d\vartheta \qquad [7.26]$$

7.- Circuitos RL y LC

7.1. Circuito RL

La figura 8 muestra un circuito RL serie con alimentación de corriente continua. Al conectar el interruptor s con A, fluye una corriente por el circuito y la *f.e.m.* inducida en la bobina impide que dicha corriente alcance instantáneamente su valor estacionario. En cualquier instante, se cumplirá:

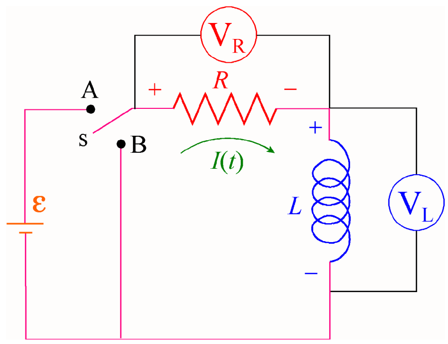

Figura 8

$$\varepsilon + \varepsilon_i = V_R \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon - L\frac{dI}{dt} = IR \qquad [7.27]$$

donde $V_R(t) = I(t)R; \varepsilon_i = -L\dfrac{dI(t)}{dt}$

La ecuación [7.27] es una ecuación diferencial de variables separables, que se puede resolver fácilmente de la siguiente forma:

$$dt = L\frac{dI}{\varepsilon - IR} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dt' = L\int_0^I \frac{dI'}{\varepsilon - I'R} \quad \Rightarrow \quad t = L\left(-\frac{1}{R}\right)\int_0^I \frac{-R\,dI'}{\varepsilon - I'R} \quad \Rightarrow$$

$$t = -\frac{L}{R}\left[\ln\left(\varepsilon - I'R\right)\right]_0^I = -\frac{L}{R}\ln\frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad [7.28]$$

Definimos la **constante de tiempo del circuito RL (τ)** como el *tiempo que ha de transcurrir para que la corriente que circula por el circuito alcance un valor igual a* $(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63$ *de su valor final estacionario* ($t \to \infty$, $I(t) \to \varepsilon/R$). Así pues, de la ecuación [7.28] obtenemos el valor de τ.

$$t = \tau \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R} \qquad [7.29]$$

La caída de tensión en la resistencia vale:

$$V_R(t) = I(t)R = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad [7.30]$$

y en la bobina

$$V_L(t) = -\varepsilon_i = L\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [7.31]$$

La figura 9*a* muestra la representación gráfica de V/ε frente a t/τ, tanto para la bobina como para la resistencia. Observamos que, a medida que pasa el tiempo, la tensión en la resistencia aumenta (porque aumenta la intensidad que recorre el circuito) y la tensión en la bobina disminuye (porque ésta existe en tanto la tensión cambie con el tiempo y los cambios son menores a medida que la intensidad se aproxima a su valor estacionario). La figura 9*b* muestra la variación de la corriente con el tiempo.

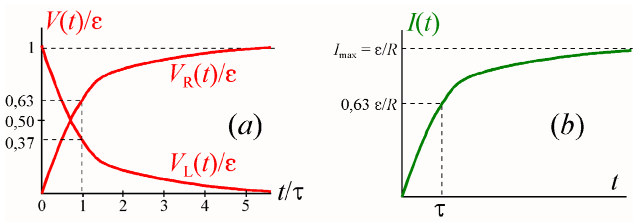

Figura 9

Si una vez alcanzado el régimen estacionario ($I = \varepsilon/R$) <u>conectamos el interruptor s al punto B</u>, la intensidad disminuirá con el tiempo y la bobina, que ha almacenado cierta cantidad de energía, cederá ésta a la resistencia.

$$\varepsilon_i = I(t)R \quad \Rightarrow \quad -L\frac{dI}{dt} = I(t)R \qquad [7.32]$$

Resolviendo la ecuación [7.32], tendremos:

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI'(t)}{I'(t)} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt' \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [7.33]$$

Las caídas de tensión en la bobina y en la resistencia serán opuestas y valdrán:

$$V_R(t) = I(t)R = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [7.34]$$

$$V_L(t) = -V_R(t) = -\varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad [7.35]$$

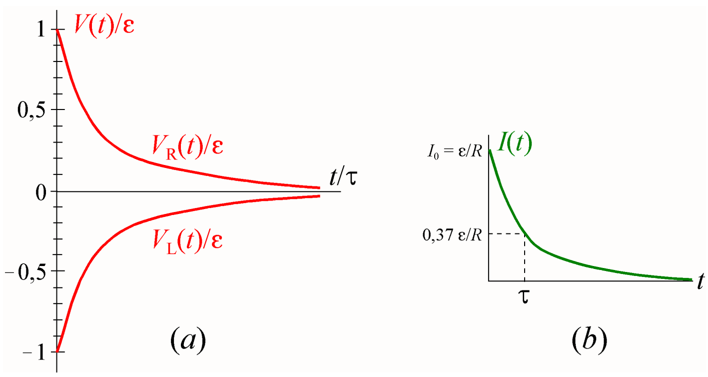

Figura 10

En esta situación, la constante de tiempo representa el tiempo que ha de transcurrir para que la corriente disminuya hasta un valor igual a $e^{-1} \approx 0{,}37$ de su valor inicial. En la figura 10*a* se representa $V_R(t)/\varepsilon$ y $V_L(t)/\varepsilon$ frente a t/τ y en la figura 10*b* se representa $I(t)$ en función de t para esta situación.

En estas circunstancias, toda la energía almacenada en la bobina se disipa en la resistencia.

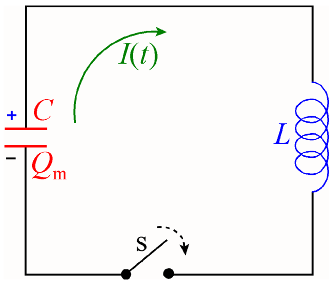

Figura 11

7.2. Circuito LC

Supongamos que el condensador de la figura 11 ha sido previamente cargado con una carga Q (según la ecuación [3.26], $Q = \varepsilon C$, siendo ε la *f.e.m.* del generador usado para la carga). Si cerramos el interruptor S, el condensador se irá descargando y por el circuito circulará una corriente como la mostrada en la figura 11. Aplicando la ley de mallas:

$$\varepsilon_i = V_C(t) \qquad \Rightarrow \qquad -L\frac{dI(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{C} \qquad [7.36a]$$

Tomando $I(t) = dQ(t)/dt$ (es decir, consideramos intensidad negativa cuando la carga del condensador disminuye a partir de la polaridad inicial), la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q(t) \qquad [7.36b]$$

Observamos que la ecuación [7.36b] tiene la misma forma que la correspondiente a una masa sujeta a un resorte (oscilador armónico simple) estudiado en un tema anterior. Por tanto, en este circuito se producirá una oscilación de la carga (estamos suponiendo nula la resistencia del circuito) al ser transferida del condensador a la bobina y viceversa. En términos de energía, la energía eléctrica almacenada inicialmente en el condensador se transfiere a la bobina, donde queda almacenada en forma de energía magnética: cuando el condensador está completamente descargado, la corriente que recorre el circuito (como veremos) es máxima y la *f.e.m.* inducida en la bobina hace que circule una corriente, de sentido idéntico a la anterior, que vuelve a cargar el condensador (con polaridad cambiada). La nueva descarga del condensador hace circular una corriente de sentido contrario a la anterior y la energía vuelve a quedar almacenada en la bobina. La *f.e.m.* inducida en ella (de polaridad contraria a la primera), hace que circule una corriente que vuelve a cargar el condensador con la misma polaridad inicial: con esto transcurre un ciclo completo. La figura 12 muestra este proceso y su analogía con el sistema masa-resorte.

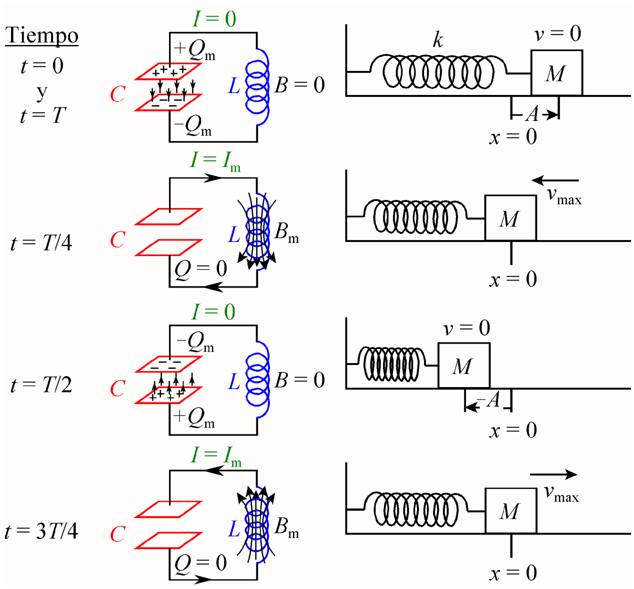

Figura 12

La frecuencia angular de la oscilación es

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad [7.37]$$

y la solución de la ecuación diferencial [7.36b] será de la forma

$$Q(t) = Q_m \,\mathrm{sen}(\omega t+\phi) \qquad [7.38]$$

Para determinar el valor de ϕ tendremos en cuenta las condiciones iniciales: $Q_0 = Q_m$ y $I_0 = 0$. De [7.38] se obtiene que

$$\phi = \arcsin\left(\frac{Q_0}{Q_m}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

con lo que la ecuación [7.38] se transforma en

$$Q(t) = Q_m \,\mathrm{sen}\left(\omega t + \pi/2\right) = Q_m \cos\omega t \qquad [7.39]$$

La intensidad que recorre el circuito será

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\omega Q_m \,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad \Rightarrow \qquad I(t) = -I_m \,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad [7.40]$$

lo que indica que la carga y la corriente presentan un desfase de π/2 rad y ello quiere decir que cuando la carga es máxima, la corriente es nula y cuando la carga es nula, la corriente es máxima (en un sentido o en otro) tal y como habíamos razonado previamente. La figura 13 muestra las gráficas de la carga del condensador y de la corriente en el circuito en función del tiempo.

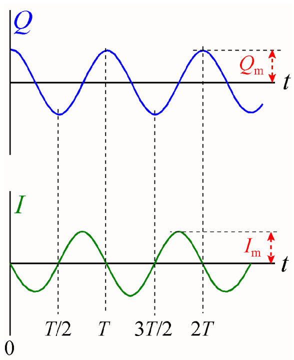

Figura 13