

TEMA 8

CORRIENTE ALTERNA

1.- Generador de f.e.m. sinusoidal

La ley de Faraday-Lenz proporciona un medio de convertir la energía mecánica en eléctrica, que es el fundamento de todos los generadores electromagnéticos de señales alternas sinusoidales.

El generador electromagnético consta, teóricamente, de una bobina rectangular que, mediante un dispositivo adecuado, gira alrededor de un eje que es perpendicular a la dirección de un campo magnético creado por un agente exterior (Figura 1, en la que, por simplicidad, se ha dibujado una sola espira).

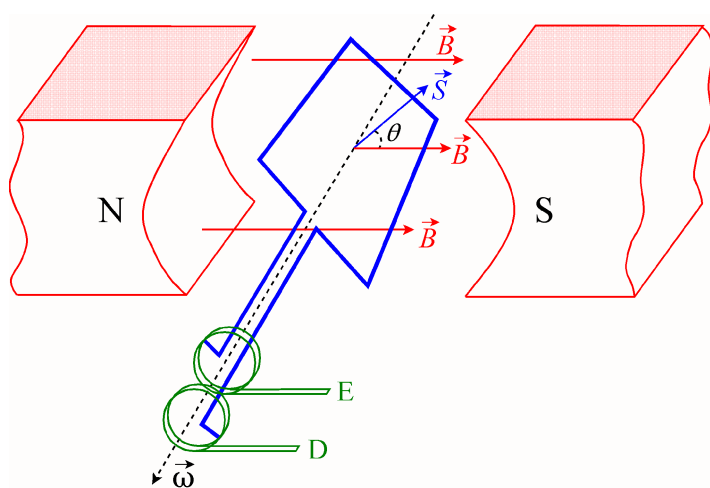


Figura 1: Esquema de un alternador

Fijémonos en que hay dos características esenciales:

- Un campo magnético (un imán en el caso más simple y conductores arrollados a un núcleo ferromagnético, es decir, un electroimán en los generadores reales),
- Una bobina, en la que se va a inducir la *f.e.m.*, que gira en el seno del campo.

Si suponemos que el campo magnético es uniforme y que la velocidad de giro es constante, entonces el ángulo que forma el vector superficie con el vector campo magnético es, en cualquier

instante, $\theta = \omega t$, con lo que el flujo que atraviesa una espira de la bobina será:

$$\Phi'_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cos \omega t dS = B \cos \omega t \int_S dS = BS \cos \omega t$$

y el que atraviesa toda la bobina, si tiene N espiras será:

$$\Phi_m = N\Phi'_m = NBS \cos \omega t \quad [8.1]$$

y, puesto que el flujo que atraviesa la bobina es variable, aparecerá en ella una *f.e.m.* que, según la ley de Faraday-Lenz, valdrá:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt} = NBS\omega \sin \omega t \quad [8.2]$$

Vemos, pues, que la tensión inducida varía con el tiempo en forma sinusoidal, siendo la amplitud, o valor de pico, de la misma:

$$\varepsilon_0 = NBS\omega \quad [8.3]$$

con lo que:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \text{ sen } \omega t \quad [8.4]$$

Podemos observar que:

- * La *f.e.m.* inducida no es constante, sino que varía sinusoidalmente con el tiempo, con un período $T = 2\pi/\omega$ y una frecuencia $f = \omega/2\pi$ (ω , que es la velocidad angular de la bobina, recibe el nombre de **frecuencia angular**).
- * Puesto que $\text{sen } \omega t$ varía entre -1 y 1 , $\varepsilon(t)$ toma valores positivos y negativos y, por tanto, la corriente que origine cuando se conecta a un elemento de circuito (una resistencia, por ejemplo) consistirá en una vibración de carga y no en un movimiento continuo de las mismas en un sentido, razón por la que se denomina **corriente alterna**.
- * El valor de pico de la tensión se puede modificar cambiando el número de espiras de la bobina, la superficie de las espiras, su velocidad de giro o el campo magnético en el que giran.

La conexión entre la bobina y el receptor de energía eléctrica (en el que el circuito se cierra) se realiza por medio de dos escobillas (D y E en la figura 1), que hacen contacto en sendos anillos. En la figura 2 representamos, en función del tiempo, el flujo que atraviesa la bobina y la tensión inducida.

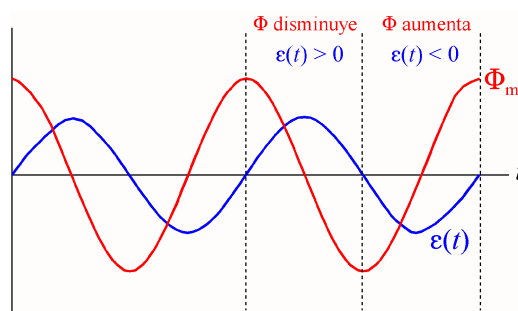


Figura 2

2.- Características de las señales alternas. Magnitudes eficaces

La forma general de una señal alterna sinusoidal (tensión o corriente) es de la forma $y(t) = y_0 \text{ sen}(\omega t + \phi)$. La amplitud, y_0 , se suele denominar valor máximo o de pico de la magnitud correspondiente; la frecuencia angular, ω , viene impuesta en los circuitos lineales por el generador que suministra la tensión al circuito (en las aplicaciones industriales y domésticas, por ejemplo, tiene un valor estándar de $100\pi \text{ s}^{-1}$). Por otra parte, es indiferente que la señal sea del tipo $y(t) = y_0 \text{ cos}(\omega t + \phi)$, ya que $\text{cos}(\omega t + \phi) = \text{sen}(\omega t + \phi + \pi/2) = \text{sen}(\omega t + \phi')$. El valor medio de una señal periódica es:

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad [8.5]$$

Ahora bien, si $y(t)$ es sinusoidal, su valor medio es nulo, ya que la integral definida es el área, con signo, de la región encerrada por la curva $y(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = T$; puesto que en un período el seno encierra dos áreas iguales, y de signo opuesto, la integral de la ecuación [8.5] es nula. Entonces, si la tensión o corriente alternas cambian en el tiempo y su valor medio es nulo, ¿cómo caracterizarlas? Para ello se utiliza un valor medio especial denominado valor eficaz.

El **valor eficaz** de una señal alterna (sinusoidal o no) se define, físicamente, como *el valor de la correspondiente señal continua que disipa, en el mismo resistor y durante el mismo tiempo, la misma cantidad*

de calor por efecto Joule que la señal alterna. Matemáticamente, el valor eficaz de una señal alterna es la *raíz cuadrada de su valor cuadrático medio.* De acuerdo con la definición física, para una señal alterna cualquiera:

$$W_c = W_a \quad \Rightarrow \quad \int I_e^2 R dt = \int I^2(t) R dt$$

donde W_c es la energía térmica disipada por la señal continua I_e y W_a es la disipada por la señal alterna. Si es sinusoidal, $I(t) = I_0 \sin \omega t$. En un período se cumplirá:

$$W_c = \int_0^T I_e^2 R dt = I_e^2 R \int_0^T dt = I_e^2 RT$$

$$W_a = \int_0^T [I_0^2 \sin^2 \omega t] R dt = I_0^2 R \int_0^T \sin^2 \omega t dt = I_0^2 R \frac{1}{2} T = \frac{I_0^2 RT}{2}$$

como $W_c = W_a$, tendremos:

$$I_e^2 RT = \frac{I_0^2 RT}{2} \quad \Rightarrow \quad I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad [8.6]$$

Si en lugar de haber usado $I^2 R$ como expresión de la potencia eléctrica hubiésemos usado V^2/R , habríamos llegado a que el valor eficaz de una tensión sinusoidal es:

$$V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad [8.7]$$

Hay que resaltar el hecho de que, si bien la definición de valor eficaz es aplicable a cualquier señal alterna periódica, las ecuaciones [8.6] y [8.7] sólo son válidas para las señales alternas sinusoidales, pues con esa condición se han deducido. Si la señal no es sinusoidal, la forma más cómoda de calcular su valor eficaz es recurrir a su definición matemática, es decir:

$$y_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt} \quad [8.8]$$

3.- Circuitos elementales con generador de f.e.m. sinusoidal

Vamos a determinar la relación que existe entre la tensión alterna sinusoidal aplicada a los extremos de los elementos básicos de un circuito de corriente alterna (resistencia, condensador e inductor) y la intensidad que la recorre en régimen estacionario.

3.1.- Generador y resistor

Sea el circuito de la figura 3, en la que el generador suministra una tensión $V(t) = V_0 \text{ sen } \omega t$. Puesto que en el resistor no se genera ningún campo eléctrico, aplicamos la ley de Ohm:

$$V(t) = I(t)R \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \text{ sen } \omega t$$

Puesto que V_0 es el valor de pico de la tensión, V_0/R será el valor de pico de la intensidad, Así pues,

$$I(t) = I_0 \text{ sen } \omega t \quad [8.9]$$

siendo $I_0 = V_0/R$.

Por tanto, *en un resistor la tensión y la corriente están en fase* (mismo ángulo; coinciden en el tiempo los picos y los valles de la tensión y la intensidad).

Si representamos la tensión mediante un vector de módulo V_0 y fase inicial cero, que gira alrededor del origen de coordenadas con una velocidad angular ω (vectores giratorios de Fresnel, que más adelante llamaremos fasores), la corriente vendrá caracterizada por un vector de módulo V_0/R y fase inicial nula girando a la misma velocidad angular que la tensión (Figura 4). La proyección de dichos vectores sobre el eje de ordenadas nos dará los valores instantáneos de la magnitud sinusoidal. Si la magnitud es cosenoidal, los valores instantáneos serán la proyección sobre el eje de abscisas.

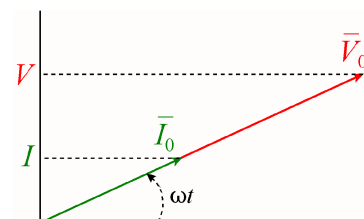


Figura 4

3.2.- Generador y condensador

Si ahora es solamente un condensador lo que está unido a los bornes del generador (figura 5), puesto que en él se crea un campo eléctrico variable (y, por tanto, una d.d.p. entre sus armaduras variable), aplicando la ley de mallas de Kirchhoff (suponiendo despreciable la resistencia óhmica del condensador):

$$V(t) = V_C(t) \quad \Rightarrow \quad V_0 \text{ sen } \omega t = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad q = CV_0 \text{ sen } \omega t$$

con lo que la intensidad que circulará por el condensador (siempre en el régimen estacionario) será:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \omega CV_0 \cos \omega t$$

Para poder comparar la fase de la tensión con la de la corriente, ponemos esta última en función de un seno:

$$I(t) = \omega CV_0 \cos \omega t = \omega CV_0 \text{ sen } (\omega t + \pi/2)$$

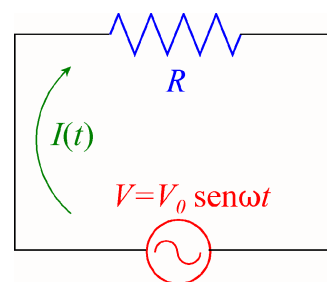


Figura 3

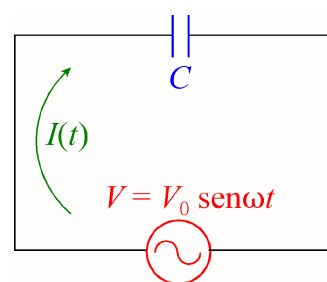


Figura 5

donde ωCV_0 será el valor de pico de la intensidad. Así pues:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \pi/2) \quad [8.10]$$

siendo $I_0 = \omega CV_0$.

Es decir, *en un condensador* la corriente está adelantada $\pi/2$ radianes respecto a la tensión (o, evidentemente, *la tensión está retrasada $\pi/2$ radianes respecto a la intensidad de corriente*). El diagrama de fasores se muestra en la figura 6.

Puesto que $I_0 = \omega CV_0$, podemos escribirlo en la forma de la ley de Ohm para valores de pico: $V_0 = I_0 \frac{1}{\omega C}$.

El término $1/\omega C$ juega el papel de "resistencia" que aparece en el circuito como resultado de la existencia del condensador. Recibe el nombre de **reactancia capacitiva** o **capacitancia** y se mide, evidentemente, en ohmios (Ω). Se representa por X_C y es una magnitud cuyo valor depende de la frecuencia del generador, es decir, el mismo condensador tiene diferentes capacitancias para diferentes frecuencias.

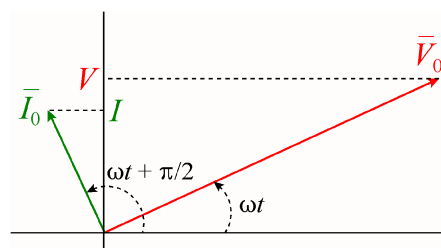


Figura 6

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad [8.11]$$

3.3.- Generador e inductor (o bobina)

Supongamos el circuito de la figura 7, en el que la bobina no tiene resistencia óhmica.

$$V(t) + \varepsilon_i = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 \sin \omega t = L \frac{dI(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad dI(t) = \frac{V_0}{L} \sin \omega t dt \quad \Rightarrow$$

$$\int dI(t) = \int \frac{V_0}{L} \sin \omega t dt \quad \Rightarrow \quad I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t + \cancel{C} = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

La constante de integración debe ser nula porque no tenemos señal continua, sino alterna (dependiente, por tanto, del tiempo).

Como antes, para comparar las fases escribiremos el coseno en función del seno (ahora, además, hemos de conseguir que el signo negativo se convierta en positivo). Así pues:

$$I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2)$$

Por tanto:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \pi/2)$$

siendo $I_0 = V_0/\omega L$.

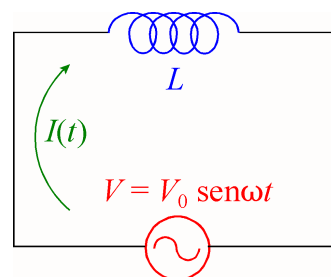


Figura 7

Es decir, *en un inductor* la corriente está retrasada $\pi/2$ rad respecto de la tensión (o *la tensión está adelantada $\pi/2$ rad respecto de la intensidad de corriente*). Ver figura 8).

Puesto que $I_0 = V_0/\omega L$, podemos escribir también esta ecuación similar a la ley de Ohm en la forma, $V_0 = I_0 \omega L$. Por tanto, observamos que ωL juega el papel de "resistencia" de la bobina en corriente alterna. Recibe el nombre de **reactancia inductiva** o **inductancia** y, evidentemente se mide en ohmios. Se representa por X_L y es una magnitud cuyo valor depende de la frecuencia del generador.

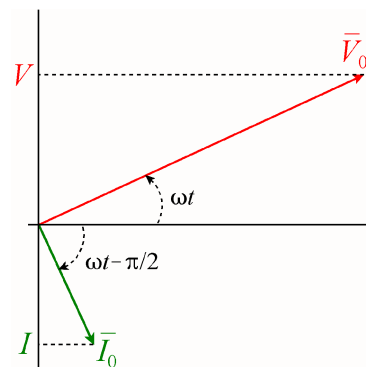


Figura 8

$$X_L = \omega L \quad [8.13]$$

4.- Ley de Ohm de la corriente alterna

Consideremos un circuito con un generador de corriente alterna sinusoidal y los tres elementos básicos (resistencia, condensador y bobina) conectados en serie (Figura 9), donde suponemos que ni el condensador ni la bobina poseen resistencia óhmica.

Como hemos visto, las bobinas y los condensadores desfasan la corriente y la tensión. Supongamos que el desfase entre la tensión y la corriente (en este orden) en el circuito es ϕ (es decir, si $\phi > 0$ la tensión está adelantada ϕ radianes y si $\phi < 0$ la tensión está retrasada ϕ radianes). Si la corriente que circula es de la forma $I(t) = I_0 \text{sen} \omega t$, entonces la tensión de la fuente es, evidentemente, $V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$.

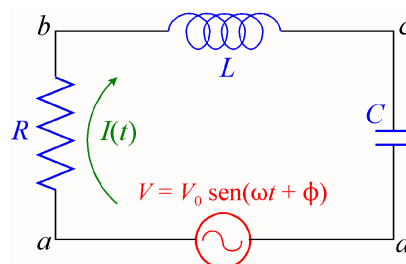


Figura 9

En el circuito, tendremos que:

$V_{ab}(t) = I_0 R \text{sen} \omega t$, ya que la tensión y la corriente están en fase en una resistencia.

$V_{bc}(t) = I_0 X_L \text{sen}(\omega t + \pi/2) = I_0 X_L \cos \omega t$, ya que en una bobina la tensión se adelanta $\pi/2$ radianes respecto de la corriente.

$V_{cd}(t) = I_0 X_C \text{sen}(\omega t - \pi/2) = -I_0 X_C \cos \omega t$, pues en un condensador la tensión se retrasa $\pi/2$ radianes respecto de la corriente.

Como se trata de una asociación en serie, la caída de tensión total debe ser igual a la suma de las distintas caídas de tensión en los elementos del circuito. Por tanto,

$$V(t) = V_{ab}(t) + V_{bc}(t) + V_{cd}(t)$$

$$V_0 \text{sen}(\omega t + \phi) = I_0 R \text{sen} \omega t + I_0 X_L \cos \omega t - I_0 X_C \cos \omega t$$

$$V_0 \text{sen}(\omega t + \phi) = I_0 R \text{sen} \omega t + I_0 (X_L - X_C) \cos \omega t$$

Si desarrollamos el $\text{sen}(\omega t + \phi)$, obtenemos:

$$V_0 \cos \phi \text{sen} \omega t + V_0 \text{sen} \phi \cos \omega t = I_0 R \text{sen} \omega t + I_0 (X_L - X_C) \cos \omega t$$

Si ahora identificamos coeficientes, tenemos:

$$V_0 \cos \phi = I_0 R \quad [8.14]$$

$$V_0 \sin \phi = I_0 (X_L - X_C) \quad [8.15]$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación [8.15] entre la [8.14]

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{(X_L - X_C)}{R} \quad \Rightarrow \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{(X_L - X_C)}{R} \quad [8.16]$$

lo que nos indica que si en un circuito como el de la figura 9, X_L es mayor que X_C , la tensión va adelantada ($\phi > 0$) y, en caso contrario, retrasada ($\phi < 0$).

Elevando al cuadrado las ecuaciones [8.14] y [8.15] y sumando miembro a miembro obtenemos:

$$V_0^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = I_0^2 [R^2 + (X_L - X_C)^2] = V_0^2$$

$$V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad [8.17]$$

La relación entre los valores de pico que suministra la ecuación [8.17] se conoce con el nombre de ley de Ohm de la corriente alterna. Vemos en ella que la "resistencia" es la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de la resistencia y el cuadrado de la reactancia (a la *diferencia entre la inductancia y la capacitancia* se la llama **reactancia** (X) del circuito): dicha "resistencia" recibe el nombre de **impedancia** (Z), y es una característica propia del circuito para cada generador (pues depende del valor de ω).

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad [8.18]$$

siendo $X = X_L - X_C$, con lo que la ley de Ohm se escribe:

$$V_0 = I_0 Z \quad [8.19]$$

Como decíamos antes, si $X_L > X_C$, la tensión se adelanta: decimos que el circuito tiene carácter inductivo. Si $X_L < X_C$, la tensión se retrasa: decimos que el circuito tiene carácter capacitivo. Si $X_L = X_C$, la tensión y la corriente están en fase y la impedancia es la menor de entre todas las posibles (con lo que I_0 será la mayor de entre todas las posibles): decimos que el circuito es resonante (ver epígrafe 8 de este tema). Los diagramas vectoriales de estas tres posibilidades se representan en la figura 10, en la que se asigna carácter vectorial a la impedancia: su módulo es Z y su ángulo coincide con el desfase entre la tensión y la corriente, dado por la ecuación [8.16] (Z no es, evidentemente, un vector giratorio).

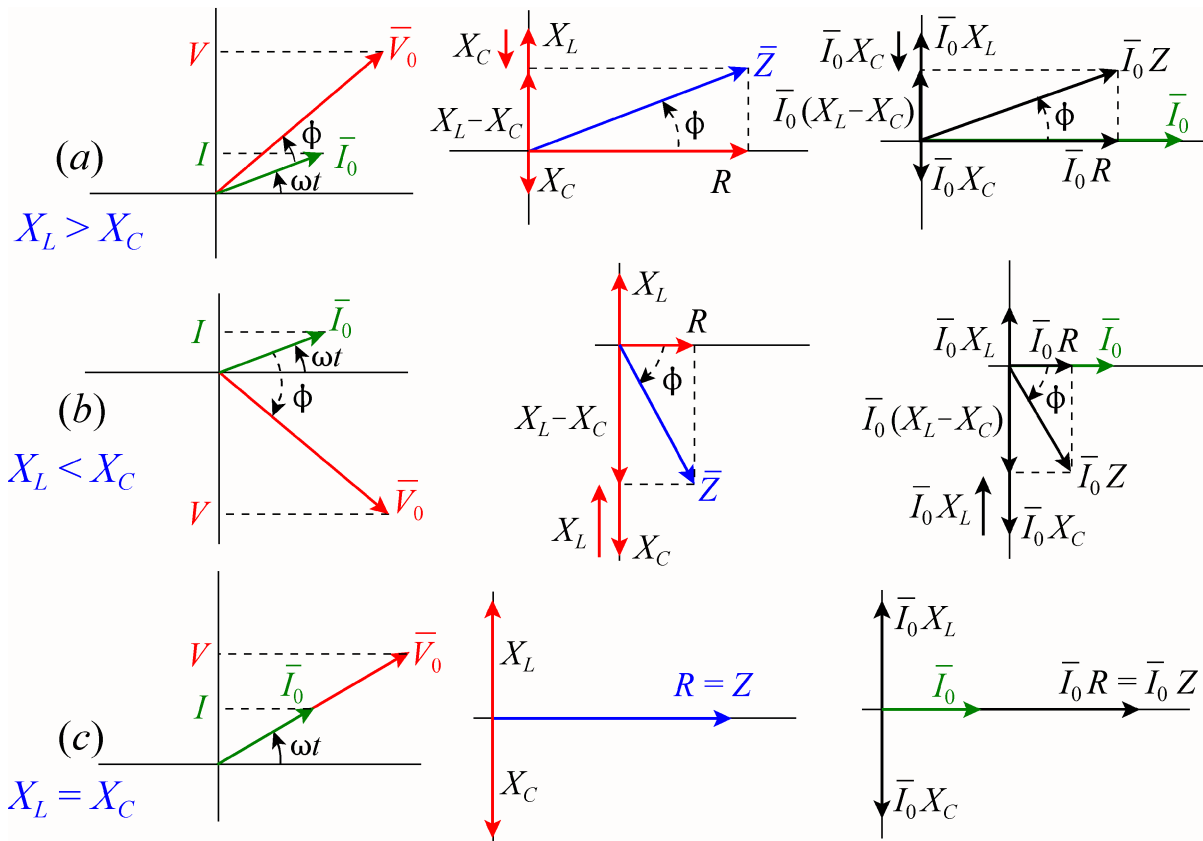


Figura 10: Diagramas vectoriales de un circuito (a) inductivo, (b) capacitivo y (c) resonante

5.- Técnica fasorial para la representación y cálculo con magnitudes sinusoidales. Impedancia compleja

Se trata de desarrollar una técnica que simplifique la representación y el álgebra de funciones sinusoidales (con lo cual, no será de aplicación exclusiva al análisis de circuitos de corriente alterna, sino a cualquier campo de la Física en el que se manejen tal tipo de señales: composición de movimientos armónicos, interferencia y difracción de ondas, etc.).

NÚMEROS COMPLEJOS (Repaso)	
a)	Forma cartesiana: (a, b)
b)	Forma binómica: $(a + ib)$
c)	Forma trigonométrica: $r (\cos\theta + i \text{sen}\theta)$
d)	Forma polar: r_θ
e)	Forma exponencial: $r e^{i\theta}$

La técnica consiste en asignar a la magnitud física correspondiente un número complejo (un vector, al fin y al cabo), de tal forma que la magnitud sea la parte real o la imaginaria del mismo.

$$y(t) = y_0 \text{sen}(\omega t + \phi) \Rightarrow \bar{Y} = y_0 [\cos(\omega t + \phi) + i \text{sen}(\omega t + \phi)] \Rightarrow y(t) = \text{Im}(\bar{Y})$$

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \bar{Y} = y_0 [\cos(\omega t + \phi) + i \text{sen}(\omega t + \phi)] \Rightarrow y(t) = \text{Re}(\bar{Y})$$

donde el número complejo lo expresamos en forma exponencial: $y_0 e^{i(\omega t + \phi)}$

Así pues, a una tensión alterna del tipo $V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$ le asignamos, en principio, el número complejo $V_0 e^{i(\omega t + \phi)} = (V_0 e^{i\phi}) e^{i\omega t}$. Observamos que este número complejo consta de dos partes: una constante $V_0 e^{i\phi}$ y otra temporal $e^{i\omega t}$ que representa la rotación alrededor del origen de la parte constante (vectores giratorios de Fresnel). La primera parte recibe el nombre de **fasor instantáneo**.

$$\bar{V} = V_0 e^{i\phi} \quad [8.20]$$

y contiene la información más importante de la magnitud: su valor de pico y su fase inicial. Puesto que si el circuito es lineal, ω es constante para todas las señales, podemos trabajar exclusivamente con el fasor instantáneo y añadir la parte temporal cuando deseemos obtener la señal. De esta forma:

$$y(t) = y_0 \text{sen}(\omega t + \phi) \Rightarrow \bar{Y} = y_0 e^{i(\omega t + \phi)} \Rightarrow \bar{Y} = y_0 e^{i\phi}$$
$$y(t) = y_0 \text{cos}(\omega t + \phi) \Rightarrow \bar{Y} = y_0 e^{i(\omega t + \phi)} \Rightarrow \bar{Y} = y_0 e^{i\phi}$$

Un parámetro muy útil para caracterizar a los circuitos de corriente alterna que trabajen con señales sinusoidales o exponenciales es la **impedancia compleja**, Z , que se define como el *cociente entre el fasor tensión entre dos puntos y el fasor intensidad*.

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad [8.21]$$

El concepto de impedancia se aplica a cualquier excitación de tipo exponencial (del tipo e^{st} , siendo s , en general, un número complejo) y carece de sentido hablar de la impedancia de un circuito excitado mediante, por ejemplo una señal cuadrada o triangular. La razón es muy simple: sólo para señales exponenciales (o que pueden representarse mediante exponenciales, como las sinusoidales) la impedancia resulta ser independiente del tiempo y, por tanto, es una magnitud característica del circuito. Por esta misma razón, la impedancia es una característica del régimen estacionario y no del transitorio. El módulo del número complejo definido por la ecuación [8.21] es lo que se conoce como impedancia del circuito.

6.- Resolución de circuitos de corriente alterna mediante la técnica de números complejos o fasorial. Diagramas de fasores

Aunque no lo demostraremos, la principal ventaja de trabajar con fasores e impedancia compleja es que con ellos los circuitos de corriente alterna cumplen las mismas leyes que los de corriente continua, a saber:

- * **Leyes de asociación de impedancias.** La impedancia compleja de una asociación en serie es la suma de las impedancias complejas de los elementos que constituyen la serie:

$$\bar{Z}_S = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i \quad [8.22]$$

La inversa de la impedancia compleja (llamada **admitancia compleja**, \bar{Y}) de una asociación en paralelo es la suma de las inversas de las impedancias complejas (admitancias complejas) de los elementos que constituyen la derivación.

$$\frac{1}{\bar{Z}_P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i} \quad \Rightarrow \quad \bar{Y}_P = \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i \quad [8.23]$$

- * **Ley de Ohm.** El fasor caída de tensión entre dos puntos es igual al fasor intensidad por la impedancia compleja total entre dichos puntos.

$$\bar{V} = \bar{I} \bar{Z} \quad [8.24]$$

- * **Leyes de Kirchhoff.** En un **nudo**, la suma de los fasores correspondientes a las intensidades que llegan es igual a la suma de los fasores correspondientes a las intensidades que salen. En una **mall**a, la suma de todos los fasores correspondientes a todas las caídas de tensión es igual a cero.

En general, una impedancia compleja consta de una parte real (R), llamada resistencia, y una parte imaginaria (X) llamada reactancia.

$$\bar{Z} = R + i X \quad [8.25]$$

A la inversa de una impedancia compleja, como ya hemos visto, se la llama admitancia: también constará de una parte real (G), llamada **conductancia**, y una parte imaginaria (B) llamada **susceptancia**.

$$\bar{Y} = G + i B \quad [8.26]$$

Así pues, para estar en condiciones de analizar los circuitos de corriente alterna, sólo nos resta determinar la impedancia compleja y la admitancia compleja de los tres elementos básicos de los circuitos de corriente alterna. Para ello, sabemos que el módulo de la impedancia compleja es la impedancia del elemento y, por definición (ecuación [8.21]), su argumento es el desfase, en este orden, entre la tensión y la corriente. Todo ello lo hemos determinado en el epígrafe 3, por lo que:

- ☞ **RESISTOR.** La impedancia de una resistencia es la propia resistencia y en ella la corriente y la tensión están en fase. Así pues,

$$\bar{Z}_R = R \quad [8.27] \quad * \quad \bar{Y}_R = \frac{1}{R} \quad [8.28]$$

- ☞ **CONDENSADOR.** La impedancia de un condensador es su reactancia capacitiva (o capacitancia) y en él, la tensión se retrasa $\pi/2$ radianes respecto de la corriente. Así pues,

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} = -i \frac{1}{\omega C} \quad [8.29]$$

$$\bar{Y}_C = \omega C e^{i\pi/2} = i \omega C \quad [8.30]$$

☞ **INDUCTOR.** La impedancia de una bobina es su reactancia inductiva (o inductancia) y en ella la tensión se adelanta $\pi/2$ radianes respecto de la corriente. Por tanto,

$$\bar{Z}_L = \omega L e^{i\pi/2} = i \omega L \quad [8.31]$$

$$\bar{Y}_L = \frac{1}{\omega L} e^{-i\pi/2} = -i \frac{1}{\omega L} \quad [8.32]$$

Los diagramas fasoriales no son más que la representación gráfica de los fasores y, por tanto, son idénticos a los de los vectores giratorios de Fresnel. Permiten comprobar, de forma rápida, los resultados algebraicos obtenidos en cuanto a posibles errores de signo, orden de la magnitud o desfases entre señales.

Para finalizar, diremos que la técnica fasorial, por las limitaciones en cuanto a Z se refiere, sólo da la respuesta estacionaria del circuito y no la transitoria (la respuesta transitoria es la que da el circuito desde que se conecta hasta que alcanzan su valor estacionario; también, desde que se desconecta hasta que las señales se anulan). Si queremos conocer la respuesta transitoria de un circuito, hemos de plantear y resolver la ecuación diferencial que rige su comportamiento.

Como ejemplo de aplicación de la técnica fasorial, calcularemos la intensidad que circula por el circuito de la figura 11, $I(t)$, la que pasa por cada elemento, $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$, y dibujaremos los diagramas de fasores.

DATOS: $V(t) = 220 \text{ sen}100\pi t$; $R = 10 \Omega$; $L = 1/(40\pi) \text{ H}$; $C = 0,003/\pi \text{ F}$

Empezaremos por determinar la admitancia y la impedancia complejas de cada elemento.

$$\bar{Y}_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} = 0,1 \quad * \quad \bar{Z}_R = R = 10$$

$$\bar{Y}_L = -i \frac{1}{\omega L} = -i \frac{1}{100\cancel{\pi} \frac{1}{40\cancel{\pi}}} = -i 0,4 = 0,4 e^{-i\pi/2}$$

$$\bar{Z}_L = \frac{1}{\bar{Y}_L} = \frac{1}{0,4 e^{-i\pi/2}} = 2,5 e^{i\pi/2} = i 2,5$$

$$\bar{Y}_C = i \omega C = i 100\cancel{\pi} \frac{0,003}{\cancel{\pi}} = i 0,3 = 0,3 e^{i\pi/2}$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{\bar{Y}_C} = \frac{1}{0,3 e^{i\pi/2}} = 3,3 e^{-i\pi/2} = -i 3,3$$

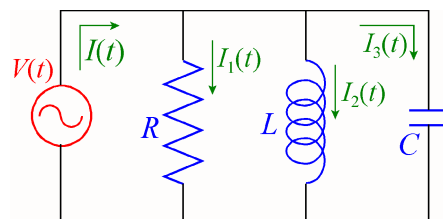


Figura 11

Como están en paralelo (Ecuación [8.23]):

$$\bar{Y}_P = \bar{Y}_R + \bar{Y}_L + \bar{Y}_C = 0,1 - i0,4 + i0,3 = 0,1 - i0,1 = 0,1\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$\bar{Z}_P = \frac{1}{\bar{Y}_P} = \frac{1}{0,1\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = 5\sqrt{2} e^{i\pi/4} = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 5 + i5$$

La intensidad que *pasa* por el circuito, teniendo en cuenta que $\bar{V} = 220 e^{i0} = 220$, es:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{220}{5\sqrt{2} e^{i\pi/4}} = 22\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

Como el generador suministra una señal sinusoidal,

$$I(t) = \operatorname{Im} \left[\bar{I} e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Im} \left[22\sqrt{2} e^{-i\pi/4} e^{i100\pi t} \right] = \operatorname{Im} \left[22\sqrt{2} e^{i(100\pi t - \pi/4)} \right] = 22\sqrt{2} \operatorname{sen} \left(100\pi t - \frac{\pi}{4} \right)$$

es decir, la corriente está retrasada $\pi/4$ radianes respecto de la tensión (cosa que ya sabíamos porque $\bar{Z} = 5\sqrt{2} e^{i\pi/4}$ y, por tanto, la tensión está adelantada $\pi/4$ radianes) y el circuito tiene carácter inductivo.

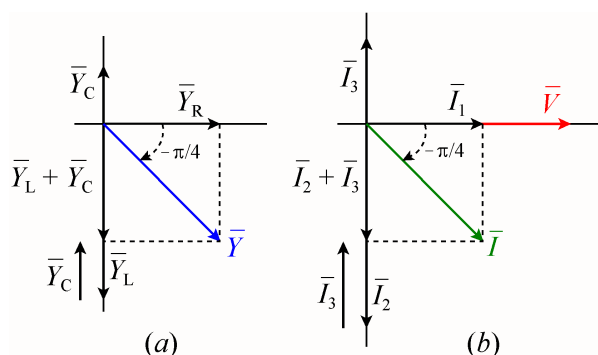


Figura 12: (a) Diagrama de admitancias; (b) Diagrama de intensidades

Para determinar la corriente que *circula* por cada elemento necesitamos la d.d.p. en el paralelo (en este circuito coincide con la fuente, pues el paralelo está directamente conectado a ella) y la admitancia de cada rama (que ya hemos calculado). Así pues:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_R} = \bar{V} \bar{Y}_R = 220 \cdot 0,1 = 22$$

$$\bar{I}_2 = \bar{V} \bar{Y}_L = 220 \cdot 0,4 e^{-i\pi/2} = 88 e^{-i\pi/2}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{V} \bar{Y}_C = 220 \cdot 0,3 e^{i\pi/2} = 66 e^{i\pi/2}$$

con lo que

$$I_1(t) = \operatorname{Im} \left[\bar{I}_1 e^{i\omega t} \right] = 22 \operatorname{sen} 100\pi t$$

$$I_2(t) = \operatorname{Im} \left[\bar{I}_2 e^{i\omega t} \right] = 88 \operatorname{sen} \left(100\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I_3(t) = \operatorname{Im} \left[\bar{I}_3 e^{i\omega t} \right] = 66 \operatorname{sen} \left(100\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

7.- Potencia en los circuitos de corriente alterna. Factor de potencia

La definición de potencia en los circuitos de corriente alterna es, por supuesto, la misma que en corriente continua: el producto de la tensión por la intensidad.

$$P(t) = V(t) I(t) \quad [8.33]$$

La diferencia estriba en que la potencia en los circuitos de corriente alterna es una magnitud variable con el tiempo y se denomina potencia instantánea. Para señales sinusoidales $P(t)$ es una función periódica.

En el caso general (y real), un circuito estará caracterizado por una impedancia compleja y en él existirá un desfase entre la tensión y la corriente. Si ϕ es ese desfase e $I(t) = I_0 \text{sen}\omega t$, evidentemente la señal que alimenta el circuito será de la forma $V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$, por lo que la potencia instantánea será:

$$P(t) = V(t) I(t) = V_0 I_0 \text{sen}(\omega t + \phi) \text{sen}\omega t$$

Como $\text{sen}\alpha \text{sen}\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, operando, obtenemos,

$$P(t) = \frac{1}{2} V_0 I_0 [\cos\phi - \cos(2\omega t + \phi)] \quad [8.34]$$

Vemos que la potencia instantánea viene expresada por la suma de dos términos de potencia:

$$P_1(t) = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\phi$$

que no depende del tiempo, y

$$P_2(t) = -\frac{1}{2} V_0 I_0 \cos(2\omega t + \phi)$$

Por tanto, el valor medio de la potencia instantánea será la suma de los valores medios de $P_1(t)$ y $P_2(t)$.

$$P_m(t) = P_{1m}(t) + P_{2m}(t) \quad [8.35]$$

Como $P_1(t)$ es constante, $P_{1m}(t) = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\phi$. En la figura 13a se representa $P_1(t)$ (naturalmente, es una recta paralela al eje de abscisas). El área sombreada (producto de la potencia por el tiempo) es la energía suministrada por el generador al circuito en un período.

En cuanto a $P_2(t)$, se trata de una potencia fluctuante, suministrada alternativamente por el generador al circuito y viceversa. En la figura 13b podemos apreciar que su valor medio es nulo.

En la figura 13c se ha representado la potencia instantánea en función del tiempo. Según [8.35]

$$P_m = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\phi \quad [8.36]$$

Se llama **factor de potencia** al *coseno del ángulo de desfase entre la tensión y la corriente*, es decir, a $\cos\phi$. Despejando de [8.36], tenemos:

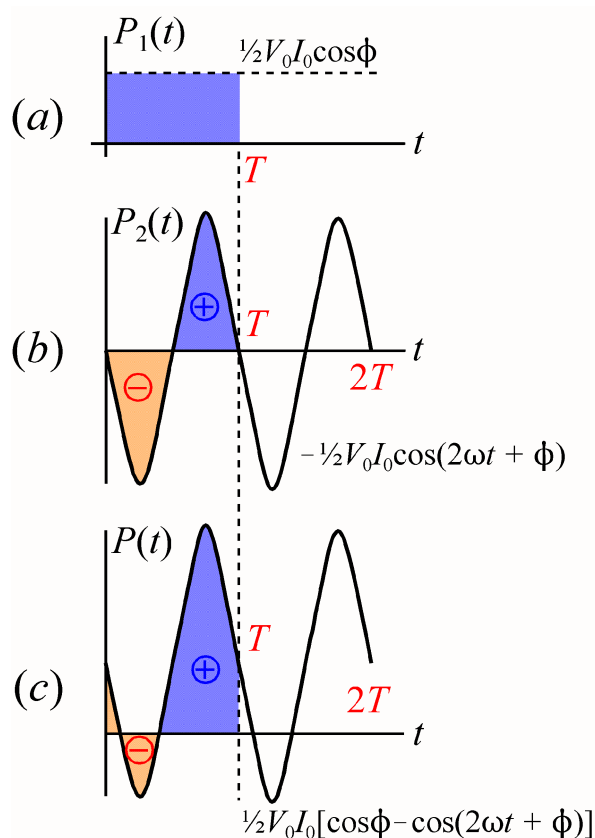


Figura 13

$$\cos \phi = \frac{2P_m}{V_0 I_0} \quad [8.36\text{bis}]$$

Para señales sinusoidales $I_0 = I_e \sqrt{2}$ y $V_0 = V_e \sqrt{2}$, por lo que la ecuación [8.36] se transforma en

$$P_m = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi = \frac{1}{2} V_e \sqrt{2} I_e \sqrt{2} \cos \phi = V_e I_e \cos \phi \quad [8.37]$$

Puesto que los amperímetros y voltímetros miden valores eficaces, al *producto de la tensión y la intensidad eficaces* se le llama **potencia aparente**, P_{ap} (por ser la potencia que *mediríamos* con un voltímetro y un amperímetro)

$$P_{ap} = V_e I_e \quad [8.37\text{bis}]$$

Puesto que los valores eficaces, como los de pico, cumplen la ley de Ohm de la corriente alterna ($V_e = I_e Z$) y teniendo en cuenta que ($Z \cos \phi$) es la parte real de la impedancia compleja {la imaginaria sería ($Z \sin \phi$)} y que dicha parte real es la resistencia del circuito, la ecuación [8.37] se transforma en:

$$P_m = V_e I_e \cos \phi = I_e^2 Z \cos \phi = I_e^2 R \quad [8.38]$$

En la ecuación [8.38] vemos que la potencia media consumida en un circuito es $I_e^2 R$, algo absolutamente coherente con la definición que en su momento dimos de valor eficaz: sólo las resistencias consumen potencia. A la *potencia media* también suele llamarsele **potencia activa**.

Acabamos de afirmar que sólo las resistencias consumen realmente potencia. En efecto, si el circuito está formado por un generador y un inductor, ($\phi = \pi/2$) y $\cos \phi = 0$, con lo que $P = 0$. Si el circuito contiene sólo un generador y un condensador, ($\phi = -\pi/2$) y $\cos \phi = 0$, con lo que nuevamente $P = 0$. ¿Cómo es la potencia instantánea en estas situaciones?

* Generador e inductor

$$P_L(t) = V_e I_e \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = -V_e I_e \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Como se cumple que $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$, y como $V_e = I_e Z = I_e X_L$, tenemos:

$$P_L(t) = I_e^2 X_L \sin 2\omega t \quad [8.39]$$

* Generador y condensador

$$P_C(t) = V_e I_e \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] = -V_e I_e \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Puesto que $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin \alpha$, y como $V_e = I_e Z = I_e X_C$, tenemos:

$$P_C(t) = -I_e^2 X_C \sin 2\omega t \quad [8.40]$$

Por tanto, en un elemento reactivo puro (condensador o inductor) no existe transferencia neta de energía

por parte del generador: existe un almacenamiento periódico de energía en el elemento reactivo, siendo devuelta al generador en el semiciclo siguiente.

Por su semejanza formal con la potencia activa ($I_e^2 R$), al producto del cuadrado de la intensidad eficaz por la reactancia del circuito se la llama **potencia reactiva**.

$$P_r = I_e^2 X = \{X = Z \sin \phi\} = I_e^2 Z \sin \phi = \{I_e Z = V_e\} = V_e I_e \sin \phi \quad [8.41]$$

8.- Resonancia en los circuitos de corriente alterna. Factor de calidad

En un tema anterior vimos que cualquier sistema físico sometido a oscilaciones forzadas puede entrar en resonancia en amplitud (amplitud de las oscilaciones máxima) y en energía (potencia máxima). Puesto que un circuito de corriente alterna es un sistema físico sometido a oscilaciones forzadas (la corriente oscila a la misma frecuencia angular que la tensión suministrada por el generador) presentará, en principio, dos frecuencias de resonancia.

En el caso particular de un circuito RLC serie, para que el circuito entre en resonancia en amplitud, es preciso que la amplitud de la oscilación del circuito I_0 sea máxima. Puesto que $V_0 = I_0 Z$, I_0 será máxima cuando Z , que es lo que depende de ω sea mínima. Puesto que $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ y R no depende de ω , el valor mínimo de Z se alcanzará cuando $X = 0$, es decir, cuando el circuito sea puramente resistivo.

$$\omega = \omega_0 \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow B = 0 \quad [8.42]$$

Ahora bien, si $X = 0$, el desfase entre la tensión y la corriente también es cero, con lo que la potencia $P_m = I_e V_e \cos \phi$ es máxima y, por tanto, la resonancia en energía coincide con la resonancia en amplitud.

Como, en este caso, la reactancia del circuito es $X_L - X_C$, la frecuencia de resonancia vendrá dada por:

$$X_L - X_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [8.43]$$

Si en el circuito RLC serie variamos la frecuencia del generador manteniendo constante V_0 , la impedancia del circuito irá cambiando con la frecuencia según:

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

teniendo en cuenta que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ entonces $C = 1/\omega_0^2 L$, y sustituyendo en la expresión anterior queda:

$$Z^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{\omega_0^2 L}{\omega}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{\omega^2 L}{\omega} - \frac{\omega_0^2 L}{\omega}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{L}{\omega}\right)^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2$$

donde se ha tenido en cuenta que $(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2$. Puesto que, según la ecuación [8.38],

$$P = I_e^2 R = \left\{ I_e = \frac{V_e}{Z} \right\} = \frac{V_e^2 R}{Z^2}$$

la potencia disipada por el circuito (en función de la frecuencia angular) será:

$$P = \frac{V_e^2 R}{Z^2} = \frac{V_e^2 R}{R^2 + \left(\frac{L}{\omega}\right)^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \frac{V_e^2 \omega^2 R}{\omega^2 R^2 + L^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad [8.44]$$

Definimos ($\Delta\omega$) **anchura de resonancia** como la *diferencia entre las dos frecuencias angulares para las cuales la potencia consumida es la mitad de la máxima* (es decir, la mitad de la que se consume en resonancia. Figura 14). Es decir:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad [8.45]$$

Cuando el circuito está en resonancia, $\omega = \omega_0$ y la potencia (Calculada de la ecuación [8.44]) es, por supuesto, V_e^2/R . Para calcular ω_1 y ω_2 , hemos de imponer la condición de que la potencia sea la mitad de V_e^2/R , con lo que

$$\frac{V_e^2 \omega'^2 R}{\omega'^2 R^2 + L^2 (\omega_0^2 - \omega'^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{V_e^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \omega'^2 R^2 = L^2 (\omega_0^2 - \omega'^2)^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros,

$$\pm \omega' R = L (\omega_0^2 - \omega'^2) = L (\omega_0 + \omega')(\omega_0 - \omega') \quad [8.46]$$

Si la resistencia del circuito es pequeña (y, por tanto, el pico de la potencia de la figura 14 es muy agudo), $\omega' \approx \omega_0$ y, por tanto, $\omega' R \approx \omega_0 R$, y $\omega_0 + \omega' \approx 2\omega_0$, con lo que la ecuación [8.46] nos conduce a:

$$\pm \omega_0 R \approx L 2 \omega_0 (\omega_0 - \omega') \quad \Rightarrow \quad \omega_0 - \omega' \approx \pm \frac{R}{2L} \quad \Rightarrow \quad \omega' \approx \omega_0 \pm \frac{R}{2L}$$

con lo que

las dos frecuencias angulares que definen la resonancia serán:

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{R}{2L} \quad \text{y} \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{R}{2L} \quad [8.47]$$

y la anchura de resonancia será:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = R/L \quad [8.48]$$

Para expresar la *agudeza* del pico de potencia (Figura 14) o, lo que es lo mismo, la selectividad del circuito para con las frecuencias que se separan de la de resonancia, se usa un parámetro adimensional, Q , llamado **factor de calidad** (en inglés quality value) definido como el *cociente entre la frecuencia de resonancia y la anchura de resonancia*. Es decir

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad [8.49]$$

Cuando Q es mayor que tres (aproximadamente), las aproximaciones hechas son válidas y entonces

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad [8.50]$$

En el caso de los inductores reales (elementos que además de almacenar energía en forma magnética, la disipan por efecto Joule), Q es una medida de las propiedades almacenadoras respecto a las disipadoras de energía y, por lo tanto, en cierto modo, de la calidad del inductor, es decir, lo que se aproxima a uno ideal ($Q \rightarrow \infty$). El mismo razonamiento se puede hacer respecto de un circuito complejo.

Como consecuencia de esta interpretación, se suele dar una definición de Q más general y válida para cualquier tipo de circuito.

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía máxima almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}}$$

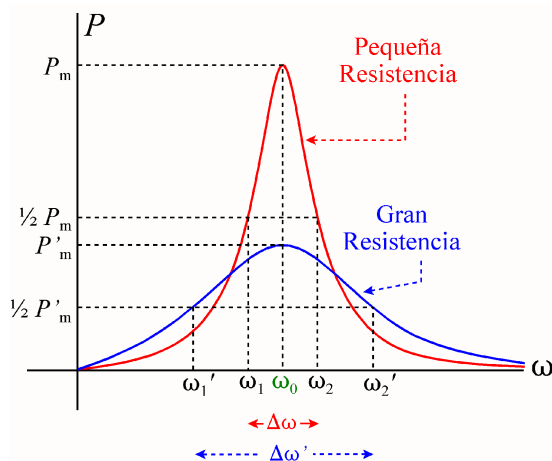


Figura 14: Representación gráfica de la potencia consumida en un circuito en función de la frecuencia angular del generador, para dos circuitos de resistencias muy distintas.

9.- Principio de funcionamiento de los transformadores

Los **transformadores** son unas *máquinas eléctricas estáticas*, es decir, sin partes móviles, *que transforman energía eléctrica en energía eléctrica*. Permiten convertir la tensión y corriente a través de un circuito, llamado primario, en otra tensión y corriente en otro circuito llamado secundario, aislado eléctricamente del primero, de forma que en un transformador ideal la potencia es la misma en ambos circuitos.

Normalmente, los dos circuitos son hilos conductores arrollados en un núcleo ferromagnético (generalmente ferrita) común, con objeto de que ambos sean atravesados por el mismo flujo magnético y se disminuya la dispersión de las líneas del campo creado por cada uno de los arrollamientos (Figura 15). Al aplicar en el primario una tensión variable en el tiempo $V(t)$, se autoinduce una *f.e.m.* $\epsilon_p(t)$ y se crea un campo $B_1(t)$ cuyas líneas de campo se cierran a través del núcleo y atraviesan al otro arrollamiento. Como dicho flujo es variable en el tiempo [al serlo $B_1(t)$], en el secundario aparece una *f.e.m.* inducida $\epsilon_s(t)$. Si suponemos que $V_1(t)$ es sinusoidal, ϵ_p y el flujo, Φ , que atraviesa ambos circuitos también lo serán. Por ello, si el primario consta de N_1 espiras y el secundario de N_2 :

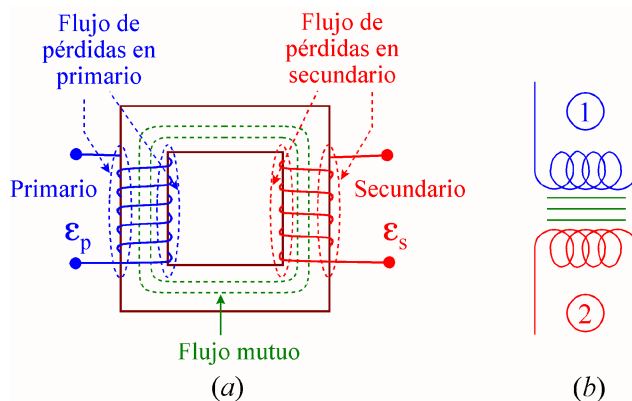


Figura 15: (a) esquema de un transformador (b) Símbolo del transformador en circuitos

$$V_1(t) \approx \epsilon_p(t) = -\frac{d(N_1\Phi_0 \text{ sen } \omega t)}{dt} = -N_1\omega\Phi_0 \cos \omega t$$

$$\varepsilon_s(t) \approx V_2(t) = -\frac{d(N_2\Phi_0 \text{ sen } \omega t)}{dt} = -N_2\omega\Phi_0 \cos \omega t$$

Dividiendo miembro a miembro estas ecuaciones, tendremos:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \quad [8.51]$$

donde n se denomina relación de transformación. Si $n > 1$, el transformador se denomina elevador (porque eleva la tensión); en caso contrario, se llama reductor (porque la tensión de salida es menor que la de entrada). En los transformadores reales, las tensiones en los terminales son muy parecidas a las *f.e.m.* inducidas y de ahí la validez de la ecuación [8.51].

En un transformador ideal, la potencia en el primario y en el secundario es la misma. Si cerramos el secundario mediante una impedancia, ocurrirá que $I_2 = V_2/Z_2$. Puesto que el factor de potencia en el primario y en el secundario es prácticamente el mismo,

$$P_1 \approx P_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 I_1 \cos \phi \approx V_2 I_2 \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n} \quad [8.52]$$

Para transformadores reales, definimos el **rendimiento, R** , como la *relación entre la potencia de salida y la de entrada*

$$R = \frac{P_2}{P_1} \quad [8.53]$$

El rendimiento de un transformador real suele ser superior al 95%, por lo que podemos decir que la potencia prácticamente se conserva.

Las pérdidas, que inevitablemente ocurren, tienen 2 causas:

- a) En el cobre de los arrollamientos, se debe a la disipación por efecto Joule.
- b) En el núcleo, se deben a la histéresis (estas pérdidas son proporcionales a $B_0^{1,6}$) y a corrientes cerradas que se inducen en el núcleo (corrientes de Foucault) y que disipan calor por efecto joule (estas pérdidas son proporcionales a B_0^2).

Las pérdidas se minimizan usando núcleos laminados (núcleo formado por láminas delgadas aisladas entre sí, de forma que presenten una gran resistencia) de acero de alta calidad y conductores gruesos de cobre. Los grandes transformadores de potencia necesitan ser refrigerados (normalmente se sumergen en aceite) para evitar un calentamiento excesivo.

Los transformadores se emplean para transferir potencia de un circuito a otro y para aislar eléctricamente dos circuitos. Juegan un papel fundamental en la red de distribución y utilización de la potencia eléctrica de un país. En las centrales eléctricas se generan tensiones de 25.000 V; para reducir las pérdidas en el transporte, se eleva la tensión hasta 275.000 V; a esta tensión se transmite la energía a lo largo de grandes distancias. La tensión se reduce en diferentes subestaciones, mediante distintos tipos de transformadores, a 33.000 V (para las industrias pesadas), a 11.000 V (para las ligeras) y 380 V, 240 V ó 125 V (para uso doméstico).

Los transformadores no sólo se caracterizan por su relación de transformación, sino también por la potencia que son capaces de transmitir. Así, no puede utilizarse el mismo transformador 220V/125V para una batidora y una lavadora.