TEMA DE APOYO

ÁLGEBRA VECTORIAL

1.- Concepto de dirección. Sistemas de coordenadas

Cuando tenemos una línea recta, podemos movernos a lo largo de ella en dos sentidos opuestos: dichos sentidos se distinguen asignando a cada uno de ellos un signo (positivo o negativo). Una vez que ha sido determinado el sentido positivo, decimos que la recta está orientada: si elegimos un punto de la recta como origen, tenemos un **eje**.

Una línea orientada define una **dirección**. Las líneas paralelas orientadas en el mismo sentido definen la misma dirección y sentido. Si sus orientaciones son diferentes, definen la misma dirección y sentidos opuestos.

Una dirección y sentido queda determinada, en el plano, por un ángulo: el que forma una dirección y sentido de referencia con la que deseamos indicar, medido en sentido contrario a las agujas del reloj (Figura 1*a*). Si una dirección y sentido queda determinada con el ángulo α, la misma dirección y sentido opuesto queda determinada con el ángulo $\alpha+\pi$ (Figura 1*b*).

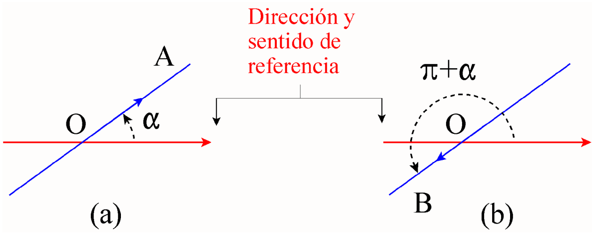

Figura 1
En un plano, los sentidos opuestos están definidos por los ángulos α y $\pi+\alpha$

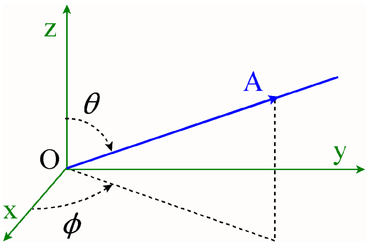

Figura 2

En el espacio se necesitan dos ángulos para determinar una dirección y sentido. La selección habitual es la mostrada en la figura 2.

θ: Ángulo menor que π rad, que forma el eje Z con la dirección.

ϕ: Ángulo, medido en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (antihorario), que forma el plano XOZ con el ZOA (o bien, el ángulo, medido en sentido contrario a las agujas del reloj, que forma el semieje positivo de las X con la proyección sobre el plano XOY de $\overline{OA}$).

Evidentemente, la dirección y sentido opuesto al dado queda determinado por los ángulos $\pi-\theta$ y $\pi+\phi$.

Un **sistema de coordenadas** (que se emplea para dar posiciones) consta de:

* Un punto fijo de referencia, O, llamado origen.

* Un conjunto de ejes (2, en el plano; 3, en el espacio) que se cortan en O.

* Instrucciones precisas que digan cómo indicar un punto con relación al origen y los ejes.

Generalmente usaremos un sistema cartesiano de coordenadas, a veces llamado también sistema de coordenadas rectangulares. De entre los muchos sistemas de coordenadas existentes, destacaremos dos:

* **Coordenadas cartesianas**. En el plano son dos números (x,y) que indican, ordenadamente, distancia del punto al eje de ordenadas (o eje Y) y distancia del punto al eje de abscisas (o eje X). En el espacio son 3 números (x,y,z) que indican, ordenadamente, distancia del punto al plano YOZ (coordenada x), distancia del punto al plano XOZ (coordenada y) y distancia del punto al plano XOY (coordenada z). En ambos casos (plano y espacio), los ejes son perpendiculares dos a dos.

* **Coordenadas polares**. En el plano, un número (distancia del punto al origen) y un ángulo (el que forma el semieje positivo de abscisas con la dirección y sentido definidos por la recta que une, en este orden, el origen con el punto). En el espacio, un número (distancia del punto al origen) y dos ángulos (los que hemos usado para definir una dirección en el espacio y que se muestran en la figura 2). Las coordenadas polares en el espacio también suelen llamarse **coordenadas esféricas**.

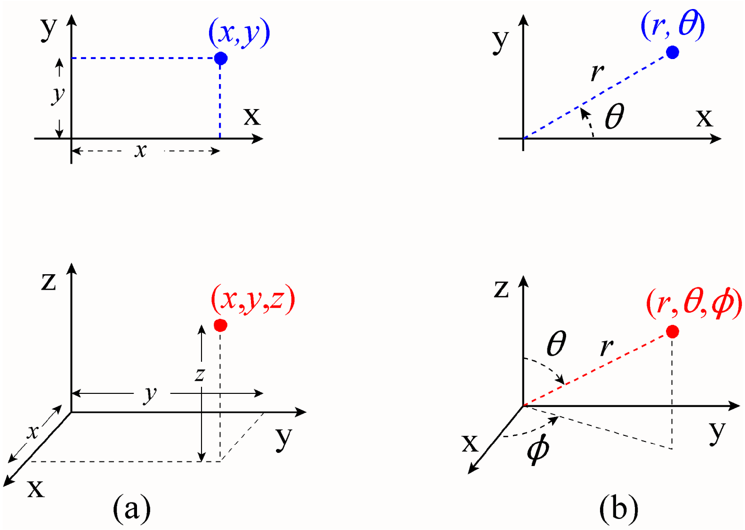

Figura 3
(a) Coordenadas cartesianas. (b) Coordenadas polares

La conversión de unas coordenadas a otras es inmediata sin más que usar las relaciones trigonométricas pertinentes (Figura 3).

Las fórmulas de conversión son:

* Plano $x = r\cos\theta$; $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ [1*a*]

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad * \qquad \theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \qquad [1b]$$

* Espacio $x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi$; $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$; $z = r\cos\theta$ [2*a*]

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad * \qquad \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad * \qquad \phi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \qquad [2b]$$

2.- Magnitudes escalares y vectoriales

Muchas cantidades físicas quedan completamente determinadas por su valor numérico, expresado en una unidad conveniente. Dichas **magnitudes** se denominan **escalares**. Por ejemplo, para especificar el volumen de un cuerpo es necesario especificar, únicamente, cuantos metros cúbicos ocupa. Para conocer una temperatura, basta con leer los grados Celsius que indique un termómetro convenientemente colocado. El tiempo, la masa, la carga y la energía son otros ejemplos de magnitudes escalares.

En cambio, otras magnitudes físicas requieren para su completa determinación, que se añada una dirección y un sentido a su cuantía. Dichas **magnitudes** reciben el nombre de **vectoriales** (porque se representan mediante vectores). El desplazamiento, la velocidad, la aceleración y la fuerza son ejemplos típicos de magnitudes vectoriales. Los vectores se representan gráficamente por un segmento orientado, con la misma *dirección* y *sentido* que la magnitud, de longitud proporcional a su cuantía, que hablando de magnitudes vectoriales recibe el nombre de *módulo* del vector.

3.- Operaciones elementales con vectores. Componentes y coordenadas de un vector

3.1. Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales entre sí, si y sólo si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

3.2. Suma de vectores

Para poder sumar vectores, es preciso que todos los sumandos tengan las mismas unidades, es decir, pertenezcan a la misma magnitud vectorial.

Sean $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, un conjunto de vectores (Figura 4). Tomemos, a partir de un punto **O** arbitrario, un segmento OA_1 igual a $\vec{a}_1$ (es decir, un vector del mismo módulo, misma dirección y mismo sentido que $\vec{a}_1$). Por A_1, trazamos un segmento A_1A_2 igual a $\vec{a}_2$, y así sucesivamente. Por definición, el vector $\vec{S} = \overrightarrow{OA_n}$, que une el origen del primero con el extremo del último, es la suma del conjunto de vectores. Desde el punto de vista del vector $\vec{S}$, los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, se denominan **componentes** del vector $\vec{S}$. En general, componentes de un vector es cualquier conjunto de vectores cuya suma sea igual al dado.

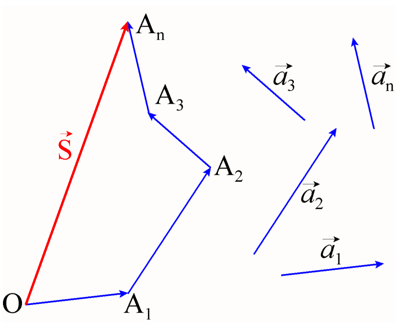

Figura 4.- Suma de vectores

3.3. Opuesto de un vector

El opuesto de un vector es otro vector del mismo módulo, misma dirección y sentido <u>contrario</u>.

3.4. Resta de vectores

Para restar dos vectores, se le suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

3.5. Producto de un vector por un escalar

El vector $\vec{a}$, resultado de multiplicar el vector $\vec{b}$ por el escalar λ $\left(\vec{a} = \lambda \vec{b}\right)$, es un vector:

* Cuyo módulo es el de $\vec{b}$ multiplicado por el valor absoluto de λ

* Cuya dirección es la de $\vec{b}$

* Cuyo sentido es el de $\vec{b}$ si λ es positivo y el opuesto si λ es negativo

Según esta definición, cualquier vector puede escribirse como su módulo (un escalar positivo) por un vector de módulo uno (vector unitario), cuya dirección y sentido coincidan con los del vector.

$$\vec{a} = a\,\vec{u}_a \qquad [3]$$

Por tanto, la forma de obtener un vector unitario en la dirección y sentido de uno dado, es dividir el vector por su módulo.

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} \qquad [4]$$

3.6. Componentes y coordenadas de un vector

Ya hemos definido qué entendemos por componentes de un vector. Sean, pues, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, las componentes del vector $\vec{a}$, es decir:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$$

Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, vectores unitarios cuyas direcciones (no necesariamente los sentidos) coinciden, respectivamente con las de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. En esas condiciones:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_n\vec{u}_n \qquad [5]$$

El conjunto de números reales (λ_1, λ_2, ..., λ_n) recibe el nombre de **coordenadas** del vector $\vec{a}$ respecto del sistema de vectores $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n)$.

En concreto, si usamos un sistema de referencia cartesiano (Figura 5) y llamamos $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ a los vectores unitarios, cuyas direcciones son las del eje de las X, eje de las Y y eje de las Z, respectivamente, y cuyos sentidos son los del respectivo semieje positivo, entonces

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad [6]$$

$\vec{a}_x, \vec{a}_y$ y $\vec{a}_z$ son las componentes cartesianas del vector $\vec{a}$ y (x,y,z) sus coordenadas cartesianas (que coinciden, evidentemente, con las coordenadas cartesianas del punto extremo del vector $\vec{a}$).

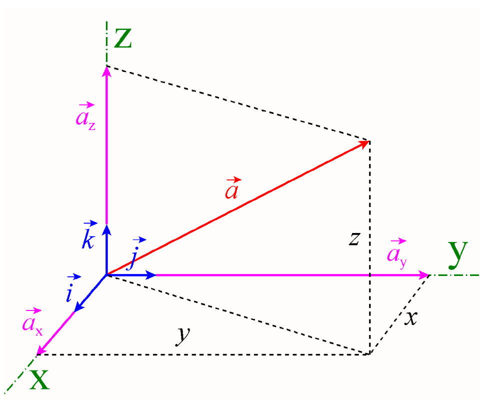

Figura 5

Las operaciones vistas hasta ahora, en coordenadas cartesianas, se realizan en la forma siguiente:

* Suma de vectores. El vector suma es aquél cuyas coordenadas se obtienen sumando las respectivas coordenadas. Es decir:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad * \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} \qquad [7]$$

* Opuesto de un vector. Se obtiene cambiando el signo de todas las coordenadas.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad -\vec{a} = -a_x\vec{i} - a_y\vec{j} - a_z\vec{k} \qquad [8]$$

* Resta de vectores. El vector diferencia se obtiene restando las respectivas coordenadas:

$$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k} \qquad [9]$$

* Producto de un vector por un escalar. El vector resultante se obtiene multiplicando todos las coordenadas del vector dado por el escalar:

$$\vec{P} = \lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k} \qquad [10]$$

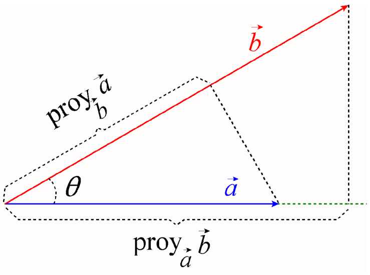

Figura 6

4.- Producto escalar y producto vectorial. Propiedades

Dados dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, definimos el **producto escalar** de ambos, y lo representaremos mediante un punto $(\cdot)$, al *número real que resulta de multiplicar los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \qquad [11]$$

De esta definición se deduce (Figura 6) que el producto escalar se obtiene multiplicando el módulo de uno cualquiera de los vectores por la proyección del otro sobre él.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot proy_{\vec{a}}\vec{b} = b \cdot proy_{\vec{b}}\vec{a} \qquad [12]$$

También deducimos de la definición de producto escalar la definición de módulo de un vector, como la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo.

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \qquad [13]$$

Y aún haremos una última deducción: *La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean perpendiculares es que su producto escalar sea nulo.*

Aplicando la definición de producto escalar a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ tenemos:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

con lo que el producto escalar, en coordenadas cartesianas, se obtiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad [14]$$

y el módulo

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad [15]$$

Aunque no lo demostraremos, el producto escalar es conmutativo y distributivo respecto de la suma. Es decir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad [16]$$
$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \qquad [17]$$

El **producto vectorial** de dos vectores es otro vector:

* *cuyo módulo es el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman.*

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\,b\,\mathrm{sen}\left(\vec{a},\vec{b}\right) \qquad [18]$$

* *cuya dirección es la de la perpendicular al plano formado por los dos vectores.*

* *cuyo sentido es el del avance de un sacacorchos que lleva el primer vector sobre el segundo por el camino más corto* (Figura 7). También pueden usarse las reglas de la mano derecha y de la mano izquierda.

De la propia definición, se deduce que el producto vectorial no es conmutativo (Figura 7), pues se obtienen vectores opuestos al invertir el orden de los factores. Es decir:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \qquad [19]$$

Aplicando la definición a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ se obtiene:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$
$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \quad * \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \quad * \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k} \quad * \quad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i} \quad * \quad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$$

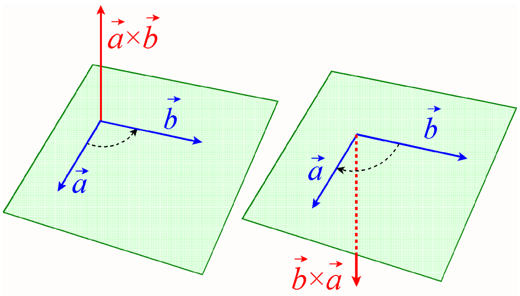

Figura 7

con lo que el producto vectorial en coordenadas cartesianas, es:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k} \qquad [20]$$

Dejamos para el alumno que compruebe que la ecuación [20] se obtiene desarrollando el siguiente determinante:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad [21]$$

Si bien el producto vectorial no es conmutativo (Ecuación [19]), puede demostrarse, pero no lo haremos, que sí es distributivo respecto de la suma, es decir:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} \qquad [22]$$

5.- Momento de un vector

5.1. Momento de un vector deslizante con respecto de un punto.

Es el vector que resulta de multiplicar vectorialmente el vector posición de un punto cualquiera de la recta directriz del vector dado (posición respecto del punto) y el propio vector (Figura 8). Su punto de aplicación está en el punto, al que se denomina **origen de momentos**.

$$\vec{M}_{\vec{a},O} = \vec{r} \times \vec{a} \qquad [23]$$

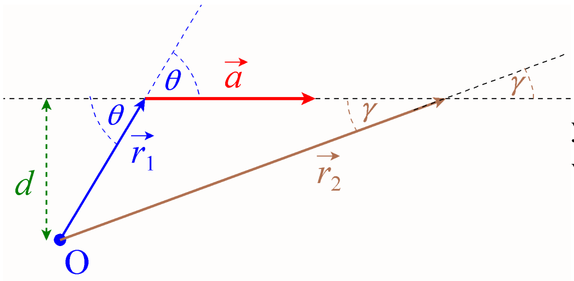

Figura 8

La elección del punto de la recta directriz es arbitraria, ya que el vector Momento no cambia con la elección, y lo vamos a demostrar. Lógicamente, la dirección de $\vec{r}_1 \times \vec{a}$ y $\vec{r}_2 \times \vec{a}$ es la misma, pues el plano formado por $\vec{r}_1$ y $\vec{a}$ (o por $\vec{r}_2$ y $\vec{a}$) es el que forman $\vec{a}$ y el punto O. En cuanto al módulo, tendremos:

$$M_{\vec{a},O} = r_1\, a \operatorname{sen}\theta = \left\{ \operatorname{sen}\theta = d/r_1 \right\} = r_1\, a \frac{d}{r_1} = a\,d$$

$$M_{\vec{a},O} = r_2\, a \operatorname{sen}\gamma = \left\{ \operatorname{sen}\gamma = d/r_2 \right\} = r_2\, a \frac{d}{r_2} = a\,d$$

y d, distancia del punto a la recta directriz, es única: *El módulo del Momento de un vector respecto de un punto es igual al producto del modulo del vector por la distancia del punto a la recta directriz del vector.*

¿Qué relación existe entre los Momentos de un mismo vector respecto de dos puntos distintos? (Figura 9)

$$\vec{M}_{\vec{a},O} = \vec{r} \times \vec{a}$$

$$\vec{M}_{\vec{a},O'} = \vec{r}' \times \vec{a} = \left\{ \vec{r}' = \vec{r} + \overrightarrow{O'O} \right\} = \left(\vec{r} + \overrightarrow{O'O} \right) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{r} \times \vec{a} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{a} = \vec{M}_{\vec{a},O} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{a} \qquad [24]$$

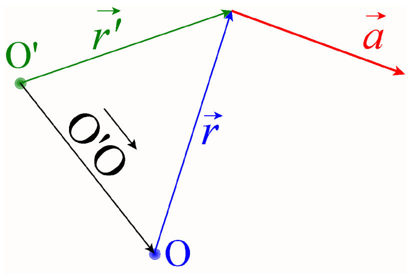

Figura 9

Es decir, El **Momento de un vector respecto a un punto** es igual al *Momento del vector con respecto a otro punto cualquiera más el Momento que tendría el vector si su punto de aplicación fuese ese otro punto.*

Para finalizar, a partir de la definición de Momento de un vector respecto a un punto y de la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma se deduce fácilmente que:

- a1) El Momento de un vector con respecto a un punto cualquiera de su recta directriz es nulo.
- a2) El Momento de la suma de un conjunto de vectores concurrentes es igual a la suma de los Momentos de dichos vectores (Teorema de Varignon. Figura 10)

En efecto,

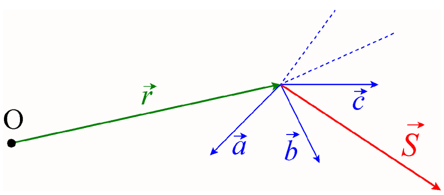

Figura 10

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots$$

$$\vec{M}_{\vec{s},O} = \vec{r} \times \vec{s} = \vec{r} \times \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \ldots \right) =$$

$$= \vec{r} \times \vec{a} + \vec{r} \times \vec{b} + \vec{r} \times \vec{c} + \ldots = \vec{M}_{\vec{a},O} + \vec{M}_{\vec{b},O} + \vec{M}_{\vec{c},O} + \ldots \qquad [25]$$

5.2. Momento de un vector deslizante con respecto a un eje

Se define como la proyección sobre el eje del Momento del vector con respecto a cualquier punto del eje. Por propia definición, es una magnitud escalar.

6.- Representación vectorial de superficies

Una superficie plana se puede representar mediante un vector cuyo módulo es el área de la superficie y cuyo sentido es:

- arbitrario, si la línea cerrada que delimita la superficie no tiene sentido de circulación.
- el del avance de un sacacorchos que gire en el sentido de circulación de dicha línea.

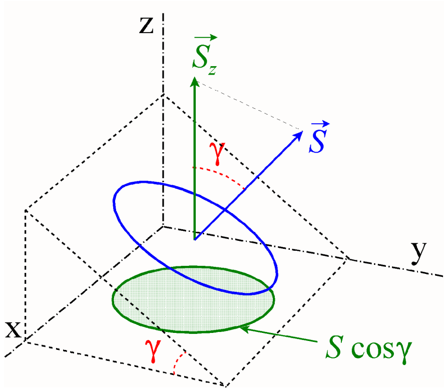

Figura 11

$$\vec{S} = \vec{S}_x + \vec{S}_y + \vec{S}_z = S_x\vec{i} + S_y\vec{j} + S_z\vec{k} = S\cos\alpha\vec{i} + S\cos\beta\vec{j} + S\cos\gamma\vec{k}$$

Las coordenadas del vector superficie representan el área de las proyecciones de la superficie sobre los planos coordenados (Figura 11): S_x es la proyección sobre el plano YOZ; S_y la proyección sobre el plano XOZ y S_z la proyección sobre el plano XOY.

Si la superficie no es plana, siempre es posible dividirla en un número muy grande de pequeñas superficies (Figura 12) de forma que cada una es prácticamente plana y puede representarse mediante un vector $\vec{S}_i$: la suma de todos ellos nos dará el vector superficie.

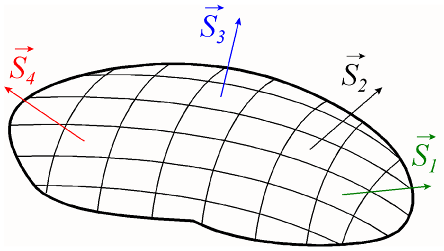

Figura 12

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \ldots + \vec{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{S}_i$$

Si la partición es tan grande que las superficies resultantes de ella son elementales $d\vec{S}$, entonces:

$$\vec{S} = \int_S d\vec{S}$$

7.- Derivada de un vector respecto a un escalar

Sea una magnitud vectorial $\vec{h}(\lambda)$, que depende de un escalar λ (en Física, generalmente será el tiempo). Que $\vec{h}$ sea función de λ quiere decir que al cambiar λ, $\vec{h}$ varía en módulo y/o dirección.

Consideremos, respecto de un sistema de coordenadas cartesiano, la línea que describen los extremos de los vectores $\vec{h}$ al variar por hacerlo λ y representemos dos posiciones del mismo (Figura 13): una, correspondiente al valor λ del escalar y otra, correspondiente al valor λ+Δλ.

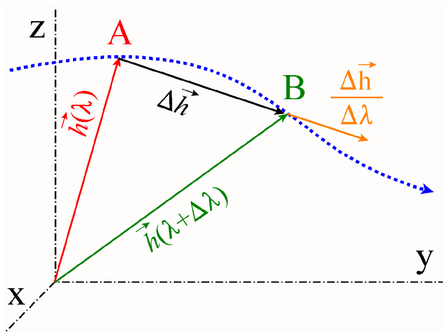

Figura 13

El vector $\Delta\vec{h} = \vec{h}(\lambda + \Delta\lambda) - \vec{h}(\lambda)$ tiene la dirección de la cuerda AB. Si lo multiplicamos por el escalar (1/Δλ), conservará la misma dirección.

$$\frac{\Delta\vec{h}}{\Delta\lambda} = \frac{\vec{h}(\lambda+\Delta\lambda)-\vec{h}(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

Si tomamos, en la anterior expresión, el límite cuando Δλ tiende a cero, el punto B tiende a confundirse con el punto A y la cuerda AB, que marcaba la dirección de $\Delta\vec{h}/\Delta\lambda$, tiende a confundirse con el arco y con la tangente al arco en el punto A.

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\vec{h}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\vec{h}(\lambda+\Delta\lambda)-\vec{h}(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{d\vec{h}}{d\lambda}$$

como $\vec{h}(\lambda) = h_x(\lambda)\vec{i} + h_y(\lambda)\vec{j} + h_z(\lambda)\vec{k}$ queda

$$\frac{d\vec{h}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dh_x(\lambda)}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dh_y(\lambda)}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dh_z(\lambda)}{d\lambda}\vec{k} \qquad [26]$$

es decir, la derivada de un vector, expresado en coordenadas cartesianas, con respecto a un escalar es otro vector cuyas coordenadas son las derivadas de las respectivas coordenadas.

- <u>DISCUSIÓN:</u>

a) Si el vector $\vec{h}(\lambda)$ sólo cambia de dirección, la curva que describen sus extremos es una circunferencia (o un arco de circunferencia). Como la derivada $d\vec{h}(\lambda)/d\lambda$ es tangente a dicha curva en cada punto, $\vec{h}(\lambda)$ y $d\vec{h}(\lambda)/d\lambda$ son perpendiculares: *La derivada de un vector de módulo constante y dirección variable es perpendicular a él.*

b) Si el vector $\vec{h}(\lambda)$ cambia en módulo pero <u>no</u> en dirección, la línea que describen sus extremos es una recta que los contiene a todos y, por tanto, $\vec{h}(\lambda)$ y $d\vec{h}(\lambda)/d\lambda$ tienen la misma dirección: *La derivada de un vector de módulo variable y dirección constante es paralela a él.*

c) Si $\vec{h}(\lambda)$ cambia en módulo y dirección, podemos escribir $\vec{h}(\lambda) = h(\lambda)\vec{u}$, siendo $\vec{u}$ un vector unitario que, permanentemente, tiene la dirección y el sentido de $\vec{h}(\lambda)$, es decir, $\vec{u}$ es un vector de módulo constante y dirección variable.

$$\frac{d\vec{h}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(h(\lambda)\vec{u}\right) = \frac{dh(\lambda)}{d\lambda}\vec{u} + h(\lambda)\frac{d\vec{u}}{d\lambda} \qquad [27]$$

El primer sumando, $\left(dh(\lambda)/d\lambda\right)\vec{u}$, tiene la misma dirección y sentido que $\vec{h}(\lambda)$ y mide los cambios de $\vec{h}(\lambda)$ exclusivamente en módulo: es la componente tangencial del vector derivada.

El segundo sumando, $\vec{h}(\lambda)\left(d\vec{u}/d\lambda\right)$, es perpendicular a $\vec{h}(\lambda)$, ya que $d\vec{u}/d\lambda$ es perpendicular a $\vec{u}$, y mide los cambios de $\vec{h}(\lambda)$ exclusivamente en dirección: es la componente normal del vector derivada. Conviene resaltar que, si bien $\vec{u}$ es unitario, $d\vec{u}/d\lambda$ no tiene por qué serlo.

Hemos descompuesto, pues, el vector derivada en dos componentes (tangencial y normal) perpendiculares entre sí, por lo que su módulo se puede obtener como:

$$\left|\frac{d\vec{h}(\lambda)}{d\lambda}\right| = \sqrt{\left(\frac{dh(\lambda)}{d\pi}\right)^2 + \left|h(\lambda)\frac{d\vec{u}}{d\lambda}\right|^2} \qquad [28]$$

8.- Campos escalares y vectoriales. Concepto físico de Gradiente

Si en una *región del espacio existe una magnitud física definida a cada punto*, la asociación del valor de esta magnitud con cada punto del espacio recibe el nombre de **Campo**. También es la *función matemática que relaciona el valor de la magnitud con las coordenadas* de cada punto.

Supongamos una habitación que tiene una estufa en un lugar determinado. Si midiéramos la temperatura estacionaria en diferentes puntos de ella encontraríamos, en general, valores diferentes: las regiones más próximas a la estufa tendrían temperaturas más altas que las más alejadas. Si a cada punto de la habitación le asociamos su temperatura, la habitación constituiría un campo de temperaturas.

Imaginemos un depósito grande que contiene agua: diferentes puntos del depósito tienen diferente presión. Si le asociamos a cada punto del depósito su presión, tendremos un campo de presiones.

Pongamos otro ejemplo: los diferentes puntos de una montaña se encuentran a diferente altura sobre el nivel del mar. Si a cada punto de la montaña le asignamos la altura a la que se encuentra, tendremos un campo de alturas. En todos los ejemplos que hemos puesto, la magnitud que hemos asociado a cada punto es de naturaleza escalar y, por ello, los campos correspondientes reciben el nombre de **campos escalares**.

Supongamos ahora un río que discurre por su cauce. En distintos puntos de su superficie la velocidad del agua es diferente. Si asociamos a cada punto de la superficie la velocidad (magnitud vectorial), tendremos un Campo de velocidades: es un ejemplo característico de **campo vectorial**. Un cuerpo situado a una cierta distancia de la Tierra recibe la acción de una fuerza (la gravitatoria). Si asignamos a cada punto, de los que rodean a la Tierra, dicha fuerza, tendremos un campo de fuerzas.

Para visualizar cómo varía la magnitud asociada a cada punto en la región donde está definida, se recurre a representar los campos gráficamente. Veamos cómo:

Consideremos el campo de alturas mencionado anteriormente: podemos unir todos los puntos situados a la misma altura y, así, tendríamos un conjunto de superficies caracterizadas porque, en todos sus puntos, la magnitud escalar toma el mismo valor. Son las **superficies equiescalares** que, para determinados escalares, toman nombres propios. Así, si la magnitud es la temperatura hablamos de superficies isotermas; si es la presión, isóbaras; si el potencial eléctrico, equipotenciales; etc. Si proyectamos sobre un plano las superficies equiescalares, tendremos las **líneas equiescalares** (Figura 14).

Para representar gráficamente los campos vectoriales se recurre a las *líneas de campo*, de las que hablaremos en el tema de Campo electrostático.

GRADIENTE. Definición: Supongamos un campo escalar (de temperaturas, por ejemplo) T=T(x, y, z). Esto quiere decir que al sustituir (x, y, z) por las coordenadas de un punto concreto, por medio de la función anterior obtendríamos la temperatura en dicho punto. Definimos el gradiente de *T*, en coordenadas cartesianas, como el vector de componentes:

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \qquad [29]$$

Para expresar el gradiente se usa el operador $\vec{\nabla}$ (Nabla) definido, en coordenadas cartesianas, por:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad [30]$$

de forma que al aplicar $\vec{\nabla}$ a una función escalar, se obtiene su gradiente.

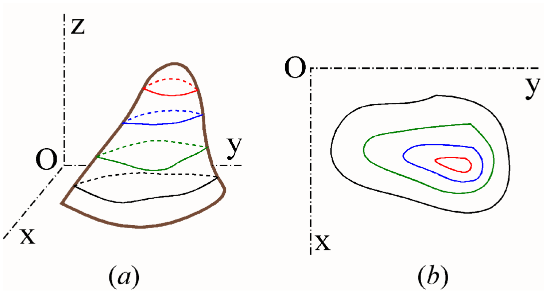

Figura 14

(a) Superficies de nivel (misma altura). (b) Líneas de nivel (Proyección de (a) sobre el plano del suelo XOY)

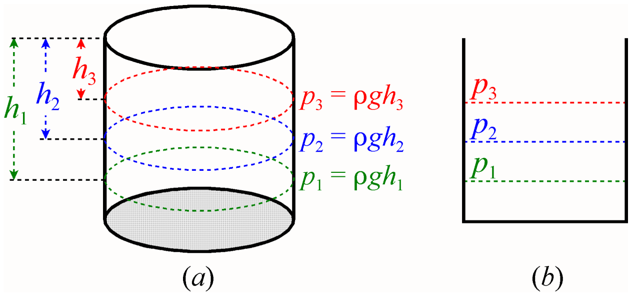

Figura 14 bis

(a) Isóbaras en depósito de agua. (b) Líneas isóbaras (proyección sobre plano del papel)

GRADIENTE. Dirección: Físicamente, el gradiente tiene la **dirección de la máxima variación del escalar**. Matemáticamente, se demuestra de la siguiente forma:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz \qquad [31]$$

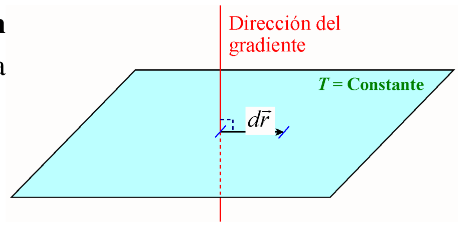

Figura 15

con lo que $dT = \vec{\nabla}T \cdot d\vec{r}$ [32]

Si nos movemos por una superficie equiescalar (*T* = constante, es decir, d*T* = 0), al no ser nulo el gradiente de *T* (ya que la distribución del escalar no es homogénea) ni $d\vec{r}$ (puesto que nos estamos moviendo al trasladarnos de un punto a otro de la superficie equiescalar), deben ser perpendiculares el gradiente y el desplazamiento elemental (Figura 15), cualquiera que sea la dirección de éste dentro de la superficie equiescalar. Por tanto el gradiente es, efectivamente, perpendicular a las superficies equiescalares en cada uno de sus puntos.

GRADIENTE. Sentido: El **sentido** del vector gradiente es el **de los escalares crecientes**. En efecto, supongamos que pasamos de la superficie equiescalar *T* a aquélla en la que el escalar es *T*+d*T* (Figura 16)

$$dT = \vec{\nabla}T \cdot d\vec{r} = \left|\vec{\nabla}T\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$

Si hemos ido en el sentido de los escalares crecientes, dT será positivo y, por tanto, $\cos\theta$ también será positivo. Esto implica que θ es un ángulo agudo y que, por tanto, el gradiente va dirigido hacia arriba, es decir, en el sentido de los escalares crecientes. Si hemos ido en sentido decreciente, dT será negativo y, por tanto, $\cos\theta$ también será negativo, con lo que θ será obtuso y ello quiere decir que el gradiente va dirigido hacia abajo que sería, justamente, el sentido de los escalares crecientes en esta situación.

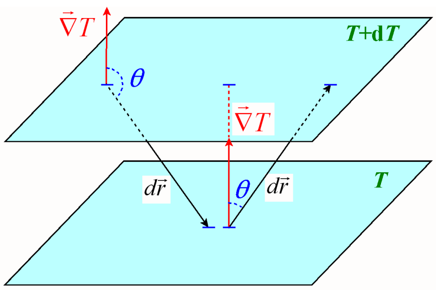

Figura 16

<u>GRADIENTE. Módulo:</u> Como hemos visto, $dT = \left|\vec{\nabla}T\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cos\theta$. Pero $\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$ es la proyección de $d\vec{r}$ sobre la dirección del gradiente que, como hemos visto, es la de la perpendicular a las superficies equiescalares y, por tanto, $\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$ representa un desplazamiento normal (perpendicular) a dichas superficies y lo vamos a representar por dn. Así pues,

$$dT = \left|\vec{\nabla}T\right| \cdot dn \quad \rightarrow \quad \left|\vec{\nabla}T\right| = \frac{dT}{dn} \qquad [33]$$

Por tanto, el módulo del gradiente es la derivada del escalar con respecto a un desplazamiento[1] perpendicular a la superficie equiescalar. Para cualquier otro desplazamiento $d\vec{r}$, no perpendicular a las superficies equiescalares T y T+dT, dT/dr será menor, en valor absoluto, que $\left|\vec{\nabla}T\right|$ ya que dn siempre será menor que cualquier otro desplazamiento. El **módulo del gradiente** corresponde, pues, a la *máxima variación del escalar respecto al desplazamiento*, e indica la velocidad con que cambia el escalar respecto de un desplazamiento perpendicular a las superficies equiescalares.

Para finalizar, diremos que el hecho de que el gradiente de un campo escalar sea no nulo da origen, físicamente, a la aparición de "fuerzas", es decir, inhomogeneidades que tienden a desaparecer. A veces, estas fuerzas son bastante claras y otras no tanto, dando lugar, en este último caso, a fenómenos de difusión: dichas fuerzas se encargan de que las inhomogeneidades desaparezcan, salvo que algún agente externo tienda a mantenerlas. Volvamos al caso de la estufa en la habitación: la estufa es la responsable de la no homogeneidad de la temperatura de los distintos puntos de la habitación y, por tanto, de la existencia de un gradiente de temperaturas en la misma. Si eliminamos la estufa y dejamos transcurrir el tiempo suficiente, todos los puntos de la habitación alcanzarán la misma temperatura. Evidentemente, ha habido una "fuerza" que se ha encargado, por ejemplo, de desplazar masa de aire y mezclarlas hasta obtener una temperatura uniforme.

[1] A la derivada de una magnitud respecto de un desplazamiento se la suele denominar derivada direccional, y mide cómo varía la magnitud al movernos por el espacio.