Física II

Año: 2011
Tema: Notas sobre medidas e incertidumbres. Laboratorio de Física II

Aguiar García, Juan

Delgado Cabello, Javier

Tabla de contenido

0.- Introducción

La física describe los fenómenos que se observan en la naturaleza y busca conceptos que permitan explicar el posible funcionamiento de dichos fenómenos. Para llegar a tales explicaciones (e.g. reglas, leyes o teorías) se han de observar cuidadosamente los fenómenos e intentar repetirlos de forma simplificada en experimentos de laboratorio, obteniendo observaciones cada vez más precisas. Si los experimentos son cuantitativos, las expresiones matemáticas permiten establecer relaciones (leyes empíricas) entre distintas magnitudes físicas para explicar los fenómenos.

En unas sesiones practicas de laboratorio, además de saber como se utiliza el instrumental y conocer unas normas básicas de seguridad, se hace necesario aprender a interpretar de forma satisfactoria las mediciones (observaciones). En una medición se trata de determinar el valor de una magnitud física comparándola con un patrón que se denomina unidad de medida y por tanto, es imprescindible que todo valor numérico resultante de una medida venga acompañado de sus unidades. Existen diferentes sistemas de unidades, siendo posible pasar de un sistema a otro mediante operaciones aritméticas simples. Hoy en día, el sistema de unidades más empleado es el llamado Sistema Internacional[1] (en adelante S.I.) y será el que utilicemos principalmente en el laboratorio.

Experimentalmente, es simple notar que, si se repite una medida varias veces, se obtiene un valor distinto. Se nos plantea el problema de decidir cuál de todos los valores hallados es el que ofrece mayores garantías de aproximarse al valor que se desea obtener. Se suele decir que no es posible realizar una medida que esté libre de errores (fallos humanos, problemas derivados del proceso de medida elegido,...). La calidad de la medición la establece justamente la Incertidumbre: "si la Incertidumbre está bien calculada y es suficientemente pequeña podemos decir que la medición es de buena calidad". Por tanto, el resultado de una medición no está completo si no posee una declaración de la incertidumbre de la medición con un nivel de confianza determinado[2], o en otras palabras, se debe incluir información numérica que indique la cuantía de la duda acerca del resultado

> *"... el resultado de cualquier medida es sólo una aproximación o estimación del verdadero valor de la cantidad sometida a medición, y la expresión del resultado de una medida está completa únicamente si va acompañado del valor de la incertidumbre asociada a dicha medida y de las unidades correspondientes"*

Estas notas son una breve introducción al trabajo a desarrollar en el laboratorio y en particular en el cálculo de la incertidumbre. Debe remarcarse que el trabajo en el laboratorio no es rutinario: no hay una receta fija o una fórmula matemática mágica para todo. Los resultados que se obtienen depende de un pensamiento crítico, honestidad con el trabajo, habilidad/experiencia profesional y, en definitiva, un conocimiento detallado de la naturaleza de la medición misma.

1-Para más detalles se puede consultar en la wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Metric_system)

2-Intervalo dentro del cual se encontrará, con mayor o menor probabilidad, el valor verdadero del mensurando

1.- La medida en el laboratorio de física

El objetivo de una **medición** es comparar una cantidad de una cierta magnitud con otra de su misma clase que se adopta como patrón. Durante la realización de una medición intervienen una serie de factores que determinan su resultado: el objeto de medición (**mensurando**), el procedimiento de medición, los instrumentos de medición, el ambiente de medición, el observador/operador, el método de cálculo.

Además del propio mensurando, el resultado de la medición está afectado por las denominadas **magnitudes de influencia** que, no siendo objeto de la medida, afectan a ésta de un modo determinante**:** condiciones ambientales (temperatura, presión barométrica, humedad, …), fluctuaciones breves de los instrumentos de medición, valores asociados con patrones de medición y datos de referencia. Por ejemplo, la temperatura puede influir en una medida de longitud si el material con el que está hecho el instrumento y/o con el que está construido el objeto a medir tienen un coeficiente de dilatación no despreciable. Otro ejemplo de magnitud de influencia puede ser la gravedad, que toma valores distintos en distintas partes de la Tierra.

Para caracterizar cualitativamente la calidad de una medición se utiliza los términos:

Exactitud o veracidad: grado de concordancia entre el resultado de la medición y un valor verdadero[3] del mensurando.

Precisión o fidelidad: caracteriza el grado de concordancia entre resultados de ensayos independientes, obtenidos bajo condiciones estipuladas. Las medidas de precisión son estimadas bajo condiciones de repetibilidad y reproducibilidad, aunque frecuentemente, la precisión es tomada como una simple medida de repetibilidad.

> Algunas variables o propiedades de sistemas (objetos) pueden ser medidas repetidamente sin dificultad o con poca dificultad relativa. Esto requiere tomar las precauciones y previsiones necesarias para asegurar que el sistema que se estudia y los aparatos están en las mismas condiciones. Estrictamente hablando, para medir la ***repetibilidad***, estas condiciones deben permanecer constantes (incluyendo al observador), lo único que puede variar es el tiempo. Sin embargo, la repetición de la medición no se reduce a que el mismo observador u otro diferente vuelva a leer el instrumento. El propósito de repetir las mediciones es estimar la variabilidad (o dispersión) que hay entre las repeticiones. Cuando esta variabilidad es pequeña, se puede decir que las mediciones son repetibles; si la variabilidad es grande, se dice que no lo son. Específicamente, podemos definir la repetibilidad de las medidas como la proximidad de concordancia entre los resultados de mediciones sucesivas del mismo mensurando efectuadas bajo las mismas condiciones, que reciben el nombre de condiciones de repetibilidad, y que incluyen:
>
> • mismo procedimiento de medición,
>
> • mismo observador,
>
> • mismo instrumento de medición, usado bajo las mismas condiciones,
>
> • mismo lugar o laboratorio,
>
> • repetición de la medición en periodos cortos de tiempo.
>
> La ***reproducibilidad*** supone que alguna (o varias) de las condiciones anteriores no se cumple, así que reproducibilidad es la cercanía de concordancia entre los resultados de mediciones del mismo mensurando que se han llevado a cabo bajo condiciones de medición ligeramente

3 …. o convencionalmente aceptado como tal. El valor verdadero es el resultado que se obtendría en una medición "perfecta" (caso de que se pudiera realizar).

diferentes. Por consiguiente, en la reproducibilidad debería especificarse en qué consiste el cambio en las condiciones, por ejemplo, si cambió el observador, el instrumento, el laboratorio donde se efectuaron las repeticiones o si transcurrió un tiempo considerable entre ellas. La repetibilidad debe ser reproducible en medidas reproducibles. Algunas mediciones pueden ser inherentemente poco repetibles o reproducibles, pues el mensurando puede:

a) ser una cantidad sujeta a fluctuaciones de cualquier signo y magnitud (dentro de ciertos límites);

b) estar sometida a la influencia de gran cantidad de factores que la alteran, sobre los que no se tiene ningún control;

c) no ser una cantidad estática sino dinámica;

d) ser una variable intrínsecamente aleatoria, porque el fenómeno está regulado por leyes probabilísticas en lugar de leyes causales.

En los casos *a)* y *b)* identificamos a las variables también como aleatorias (*i. e.*, inciertas). Ejemplos de a) serían la medición del flujo o gasto en un río o la posición de un móvil a un cierto tiempo después de empezar su movimiento con ciertas condiciones iniciales que no pueden reproducirse cabalmente. Un ejemplo de *b)* es la salida de producto(s) de un reactor químico, que depende de concentraciones, temperatura, presión, flujo de masa y de calor, etc. en cada punto del reactor. Son ejemplos de *d)* el número de desintegraciones en un cierto tiempo de una muestra radiactiva, o el número de electrones que llegan a un detector de partículas cargadas. Podemos decir que en cualquiera de estos casos el resultado de la medición está sujeto a errores aleatorios. La variabilidad de las mediciones repetidas revela la existencia de los errores aleatorios. Cuando los errores aleatorios son pequeños se dice que la medición tiene una alta precisión. El error aleatorio se refiere al grado de reproducibilidad de una medición, que se representa por Δx y puede expresarse también como una corrección a la lectura $\pm \Delta x$.

Los instrumentos o aparatos de medida, independientemente de sus diseños, principios de funcionamiento y magnitudes que miden, les son comunes una serie de características metrológicas, entre las que se encuentran:

- Intervalo de medición: conjunto de mediciones que puede efectuar el aparato de medida.
- **Resolución** (de un dispositivo indicador) o **sensibilidad**: menor diferencia entre indicaciones de un dispositivo indicador que puede ser distinguida significativamente. En un instrumento analógico, la sensibilidad es la diferencia entre las lecturas correspondientes a dos divisiones consecutivas[4] (por ejemplo, en un regla graduada usal de oficina la mínima división se corresponde con milímetros, la sensibilidad es 1 mm). En un instrumento digital, la sensibilidad es el orden decimal de la última cifra que se muestra en la pantalla (por ejemplo, si el cronómetro digital de un reloj indica una medida del tiempo transcurrido de 52 min 32 s, la sensibilidad de dicho cronómetro es 1 s ya que dicho cronómetro es capaz de medir segundos).
- Condiciones nominales de funcionamiento: condiciones de utilización para las cuales, se proyecta que las características metrológicas especificadas de un instrumento de medición estén comprendidas entre límites dados. Las condiciones nominales de funcionamiento especifican generalmente el rango o valores de la magnitud a medir y de las magnitudes influyentes.
- Condiciones límites: condiciones extremas que puede soportar un instrumento de medición sin dañarse y sin degradarse sus características metrológicas especificadas, cuando es utilizado posteriormente bajo condiciones nominales de funcionamiento.

4 Un instrumento analógico puede tener distinta sensibilidad en distintas partes de la escala graduada.

- Estabilidad: aptitud de un instrumento de medición para mantener constante en el tiempo sus características metrológicas.
- Transparencia: aptitud de un instrumento de medición de no modificar la magnitud a medir.
- Error máximo permisible de un instrumento de medición: valor extremo del error permisible por especificaciones, regulaciones, etc., para un instrumento de medición dado.

1.1.- Incertidumbre y error

Los instrumentos y métodos utilizados en cualquier proceso de medida son siempre imperfectos y, por tanto, siempre se pueden hacer ciertas correcciones. En este sentido, nótese que el instrumental de uso en el laboratorio, por ejemplo, requiere de una calibración[5] que permite subsanar ciertas desviaciones. De esta definición se deduce que para calibrar un instrumento o patrón es necesario disponer de uno de mayor precisión que proporcione el valor convencionalmente verdadero que es el que se empleará para compararlo con la indicación del instrumento sometido a calibrado. Esto se realiza mediante una cadena ininterrumpida y documentada de comparaciones hasta llegar al patrón primario, y que constituye lo que se llama trazabilidad. En la práctica, el número de iteraciones de este proceso, a priori infinito, se limita y se establece una corrección residual.

El ***error*** es la desviación sistemática de los resultados de una medida respecto al valor convencionalmente verdadero del mensurando. En principio el valor de un error conocido puede ser aplicado como una corrección al resultado de una medición; el caso es que, el error, estrictamente hablando, no se puede conocer exactamente[6].

> Tradicionalmente, el error se ha considerado constituido por dos componentes: una componente sistemática y una componente aleatoria.
>
> El **error sistemático** es definido como la componente de error la cual en el curso de un número de mediciones del mismo mensurando, permanece constante o varía de una forma predecible. Este es independiente del número de mediciones llevadas a cabo y no puede por lo tanto ser disminuido por el incremento del número de mediciones bajo condiciones constantes de medición. Dentro de este grupo se pueden distinguir los *errores teóricos* (introducidos por la existencia de condiciones distintas a las idealmente supuestas para la realización del experimento, por la realización de extrapolación de resultados,...), los *errores instrumentales* (inherentes al propio sistema de medida: influencia del instrumento de medición sobre las propiedades del objeto o fenómeno que se mide, aparatos mal calibrados, mal reglados, limitaciones del instrumento o algún defecto en su construcción,...) o los *errores personales* (peculiaridades del observador, errores de paralaje o de interpolación visual al leer en la escala de un instrumento, uso erróneo del instrumento, omisión de operaciones previas o durante la medición, como puede ser un ajuste a cero, tiempo mínimo de precalentamiento,...). El resultado de una medición debe ser corregido para todos los efectos sistemáticos significativos reconocidos. El valor que es sumado algebraicamente al resultado no corregido de una medición, para compensar el error sistemático, se denomina *corrección*. El factor numérico por el cual se multiplica el resultado no corregido de una medición para compensar el error sistemático se denomina *factor de corrección*.
>
> El **error aleatorio** normalmente se origina de variaciones impredecibles de magnitudes influyentes que dan origen a variaciones en observaciones repetidas del mensurando. Este

5 El calibrado es el procedimiento de comparación entre lo que indica un instrumento y lo que "debiera indicar" de acuerdo a un patrón de referencia con un valor conocido.

6 El valor verdadero del mensurando y el error que se comete en un proceso de medida son objetivos a los que se tiende (ideales), de ahí la necesidad de estas notas. Su conocimiento exacto es imposible.

error no puede ser compensado por el incremento del número de mediciones, aunque normalmente si se consigue disminuirlo.

La ***incertidumbre***[7] es una forma de expresar el hecho de que, tras haber aplicado las correcciones pertinentes, para un mensurando y su resultado de medición, no hay un solo valor sino un número infinito de valores dispersos alrededor del valor convencionalmente verdadero del mensurando o valor estimado del verdadero valor del mensurando. Es decir, la incertidumbre es una cota superior estimada de esta corrección residual, consecuencia de la imperfección de nuestra medida corregida. En general, el valor de la incertidumbre no puede utilizarse para corregir el resultado de una medición.

En la práctica la incertidumbre del resultado puede originarse de muchas fuentes posibles, entre ellas podemos mencionar:

a) Definición incompleta del mensurando.

b) Realización imperfecta de la definición del mensurando.

c) Muestreo; Muestreos no representativos - la muestra medida puede no representar el mensurando definido.

d) Conocimiento inadecuado de los efectos de las condiciones ambientales sobre las mediciones, o mediciones imperfectas de dichas condiciones ambientales.

e) Errores de apreciación del operador en la lectura de instrumentos analógicos.

f) Resolución finita del instrumento o umbral de discriminación finito.

g) Valores inexactos de patrones de medición y materiales de referencia.

h) Valores inexactos de constantes y otros parámetros obtenidos de fuentes externas y usados en los algoritmos de reducción de datos.

i) Aproximaciones y suposiciones incorporadas en los métodos y procedimientos de medición.

j) Variaciones en observaciones repetidas del mensurando bajo condiciones aparentemente iguales.

Las fuentes analizadas en este epígrafe no son necesariamente independientes, y algunas de las fuentes desde la a) hasta la i) pueden contribuir a la fuente j).

Para ilustrar la diferencia entre error e incertidumbre, el resultado de una medición después de la corrección puede estar muy cercano al valor del mensurando, y por lo tanto tener un error despreciable. Sin embargo, la incertidumbre puede todavía ser muy grande, simplemente porque la persona que ejecuta la medición está muy insegura de cuán cercano está el resultado del valor del mensurando. Por tanto, la incertidumbre de una medición, **u**, se define como el parámetro no negativo que caracteriza (=cuantifica) la dispersión de los valores atribuidos a un mensurando a partir de la información que se utiliza (medición, calibración, comportamiento de ….). Al mensurando no puede atribuírsele un único valor sino que se le atribuye un intervalo de valores que son coherentes con todos nuestros conocimientos. El resultado es útil si esa dispersión es suficientemente pequeña. La existencia de **u** no significa que se duda de la validez de la medición, por el contrario un cálculo adecuado de **u** significa una confianza aumentada, mayor, de dicha validez.

---

7 La palabra "incertidumbre" significa duda. Así, en su sentido más amplio, "incertidumbre de medida" significa duda sobre la validez del resultado de una medición. La definición formal del término "incertidumbre de medida", desarrollada para estas notas es ligeramente diferente a éste: **incertidumbre (de medida)** es un parámetro asociado al resultado de una una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando.

2.- Unidades, expresión de las medidas y cifras significativas

2.1.- Sistema Internacional de Unidades

El **Sistema Internacional de Unidades** (abreviado **SI**), también denominado **Sistema Internacional de Medidas**, es el nombre que recibe el sistema de unidades que se usa en casi todos los países.

> En España, el Real Decreto de 14 de noviembre de 1879 estableció la obligatoriedad del Sistema Métrico a partir de julio de 1880. La última actualización de la normativa a este respecto se publicó en 2009, mediante el Real Decreto 2032/2009. Boletín Oficial del Estado (España) - Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, por el que se establecen las unidades legales de medida

Una de las características trascendentales, que constituye la gran ventaja del Sistema Internacional, es que sus unidades se basan en fenómenos físicos fundamentales[8]. Las unidades del SI constituyen referencia internacional de las indicaciones de los instrumentos de medición, a las cuales están referidas mediante una concatenación interrumpida de calibraciones o comparaciones. Esto permite lograr equivalencia de las medidas realizadas con instrumentos similares, utilizados y calibrados en lugares distantes y, por ende, asegurar -sin necesidad de duplicación de ensayos y mediciones- el cumplimiento de las características de los productos que son objeto de transacciones en el comercio internacional, su intercambiabilidad. Entre los años 2006 y 2009 el SI se unificó con la norma ISO 31 para instaurar el Sistema Internacional de Magnitudes (ISO/IEC 80000, con las siglas ISQ).

Magnitud física básica	Símbolo dimensional	Unidad básica	Símbolo de la unidad	Observaciones
Longitud	L	metro	m	Se define fijando el valor de la velocidad de la luz en el vacío.
Tiempo	T	segundo	s	Se define fijando el valor de la frecuencia de la transición hiperfina del átomo de cesio.
Masa	M	kilogramo	kg	Es la masa del «cilindro patrón» custodiado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, en Sèvres, Francia. Equivale a la masa que ocupa un litro de agua pura a 14'5 °C o 286'75 K.
Intensidad de corriente eléctrica	I	amperio	A	Se define fijando el valor de constante magnética.
Temperatura	Θ	kelvin	K	Se define fijando el valor de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
Cantidad de sustancia	N	mol	mol	Se define fijando el valor de la masa molar del átomo de 12C a 12 gramos/mol. Véase también número de Avogadro.
Intensidad luminosa	J	candela	cd	Véanse también conceptos relacionados: lumen, lux e iluminación física.

8 Excepción única es la unidad de la magnitud masa, el kilogramo, definida como «la masa del prototipo internacional del kilogramo», un cilindro de platino e iridio almacenado en una caja fuerte de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas.

El Sistema Internacional de Unidades (ver tabla) consta de siete unidades básicas. Son las que se utilizan para expresar las magnitudes físicas consideradas básicas a partir de las cuales se determinan las demás.

De las unidades básicas, existen un conjunto de múltiplos y submúltiplos en potencias enteras de diez que, permiten expresar cantidades de las magnitudes en un enorme rango de valores (ver tabla inferior). Así, por ejemplo, la expresión «kilo» indica 'mil'. Por lo tanto, 1 km equivale a 1000 m, del mismo, del mismo modo que «mili» significa 'milésima' (parte de). Por ejemplo, 1 mA es 0,001 A.

1000^n	10^n	Prefijo	Símbolo	Escala corta	Escala larga	Equivalencia decimal en los Prefijos del Sistema Internacional
1000^8	10^{24}	yotta	Y	Septillón	Cuatrillón	1 000 000 000 000 000 000 000 000
1000^7	10^{21}	zetta	Z	Sextillón	Mil trillones	1 000 000 000 000 000 000 000
1000^6	10^{18}	exa	E	Quintillón	Trillón	1 000 000 000 000 000 000
1000^5	10^{15}	peta	P	Cuatrillón	Mil billones	1 000 000 000 000 000
1000^4	10^{12}	tera	T	Trillón	Billón	1 000 000 000 000
1000^3	10^9	giga	G	Billón	Mil millones / Millardo	1 000 000 000
1000^2	10^6	mega	M	Millón		1 000 000
1000^1	10^3	kilo	k	Mil / Millar		1 000
$1000^{2/3}$	10^2	hecto	h	Cien / Centena		100
$1000^{1/3}$	10^1	deca	da	Diez / Decena		10
1000^0	10^0	*ninguno*		Uno / Unidad		1
$1000^{-1/3}$	10^{-1}	deci	d	Décimo		0,1
$1000^{-2/3}$	10^{-2}	centi	c	Centésimo		0,01
1000^{-1}	10^{-3}	mili	m	Milésimo		0,001
1000^{-2}	10^{-6}	micro	µ	Millonésimo		0,000 001
1000^{-3}	10^{-9}	nano	n	Billonésimo	Milmillonésimo	0,000 000 001
1000^{-4}	10^{-12}	pico	p	Trillonésimo	Billonésimo	0,000 000 000 001
1000^{-5}	10^{-15}	femto	f	Cuatrillonésimo	Milbillonésimo	0,000 000 000 000 001
1000^{-6}	10^{-18}	atto	a	Quintillonésimo	Trillonésimo	0,000 000 000 000 000 001
1000^{-7}	10^{-21}	zepto	z	Sextillonésimo	Miltrillonésimo	0,000 000 000 000 000 000 001
1000^{-8}	10^{-24}	yocto	y	Septillonésimo	Cuatrillonésimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

Las unidades derivadas hacen referencia a las unidades utilizadas para expresar magnitudes físicas que son resultado de combinar magnitudes físicas básicas. No se debe confundir este concepto con los de múltiplos y submúltiplos, que se utilizan tanto en las unidades básicas como en las derivadas.

Ejemplos de unidades derivadas sin nombre especial:

Unidad de volumen o metro cúbico, m^3, resultado de combinar tres veces la longitud.

Unidad de densidad o cantidad de masa por unidad de volumen, kg m^{-3}, resultado de combinar masa (magnitud básica) con volumen (magnitud derivada). Se expresa en kilogramo por metro cúbico. Carece de nombre especial.

Ejemplos de unidades derivadas con nombre especial:

Unidad de fuerza, N, magnitud que se define a partir de la segunda ley de Newton (fuerza = masa × aceleración). La masa es una de las magnitudes básicas; la aceleración es derivada. Por tanto, la unidad resultante (kg m s^{-2}) es derivada, de nombre especial: newton.

Unidad de energía, J. Es la energía necesaria para mover un objeto una distancia de un metro aplicándole una fuerza de un newton; es decir, fuerza por distancia. Se le denomina julio (unidad) (en inglés, joule). Su símbolo es J. Por tanto, J = N m.

Culombio (C). Unidad de carga eléctrica. Definición: un culombio es la cantidad de electricidad que una corriente de un amperio de intensidad transporta durante un segundo.

Weber (Wb). Unidad de flujo magnético. Definición: un weber es el flujo magnético que al atravesar un circuito uniespiral genera en éste una fuerza electromotriz de un voltio si se anula dicho flujo en un segundo por decrecimiento uniforme.

Las unidades del SI no han sido adoptadas en el mundo entero; ejemplo de ello son los países anglosajones que todavía emplean unidades propias de su cultura como el pie, la libra, la milla, etc. Además existe un conjunto de unidades no incluidas en el SI pero reconocidas por la conferencia general de pesas y medidas celebrada en 1960. En la navegación todavía se usa la milla, el nudo y la legua náuticas; en las industrias del mundo todavía se utilizan unidades como el bar, la atmósfera normal, el quilate métrico, etc; por su amplia difusión se aceptan los litros, el día, la hora, la tonelada, el grado de arco, etc. Por eso todavía son necesarias las tablas/factores de conversión, que convierten el valor de una unidad al valor de otra unidad de la misma magnitud.

Ejemplo 1: pasar 15 pulgadas a centímetros (factor de conversión: 1 pulgada = 2,54 cm)

$$15 \text{ pulgadas} \times (2{,}54 \text{ cm} / 1 \text{ pulgada}) = 15 \times 2{,}54 \text{ cm} = 38{,}1 \text{ cm}$$

Ejemplo 2: pasar 25 metros por segundo a kilómetros por hora (factores de conversión: 1 kilómetro = 1000 metros, 1 hora = 3600 segundos)

$$25 \text{ m/s} \times (1 \text{ km} / 1000 \text{ m}) \times (3600 \text{ s} / 1 \text{ h}) = 90 \text{ km/h}$$

Ejemplo 3: obtener la masa de 10 litros de mercurio, Hg (densidad del mercurio: 13,6 kilogramos por decímetro cúbico). Nótese que un litro es lo mismo que un decímetro cúbico.

$$10 \text{ l Hg} \times (1 \text{ dm}^3 \text{ Hg} / 1 \text{ l de Hg}) \times (13{,}6 \text{ kg} / 1 \text{ dm}^3 \text{ Hg}) = 136 \text{ kg}$$

Ejemplo 4: pasar 242° sexagesimales a radianes (Factor de conversión: 180° = π rad)

$$242° \text{ x } (\pi \text{ rad}/180°) = 4{,}22 \text{ rad}$$

2.2.- Reglas prácticas de escritura

Basándonos en la normativa ISO-31-0 vamos a presentar algunas reglas convencionalmente admitidas como convenientes a la hora de expresar el resultado de una medida.

El signo de separación decimal deberá ser una coma. La recomendación ISO admite el uso del punto como separador de las cifras decimales por su uso extendido en los paises anglosajones.

Utilizar unidades del SI.

> Los símbolos de las unidades **SI** se expresan con minúsculas. Si dichos símbolos corresponden a unidades derivadas de nombres propios (apellidos), su letra inicial es mayúscula (W de Watt, V de Volta, Wb de Weber, Ω (omega mayúscula) de Ohm, etcétera). Los símbolos de las unidades son entes matemáticos, no abreviaturas. Por ello deben escribirse siempre tal cual están establecidos (ejemplos: «m» para metro y «A» para amperio), precedidos por el correspondiente valor numérico, en singular, ya que como tales símbolos no forman plural. Al expresar las magnitudes numéricamente, se deben usar los símbolos de las unidades, nunca los nombres de unidades. Por ejemplo: «50 kHz», nunca «50 kilohercios»; aunque si podríamos escribir «cincuenta kilohercios», pero no «cincuenta kHz».

El valor numérico y el símbolo de las unidades deben ir separados por un espacio. Ejemplo: $50\ m$ es correcto; $*50m$ es incorrecto).

No se pone punto a continuación del símbolo de las unidades ni se añade s al plural.

Los dígitos deberán escribirse en grupos de tres cifras separados por un pequeño espacio pero no por un punto o una coma. Ejemplo, 21 231,197 654 es preferible a 21.231,197654.

Así mismo, los submúltiplos y los múltiplos, incluido el *kilo* (k), se escriben con minúscula. Desde *mega* hacia valores superiores se escriben con mayúscula. Se han de escribir en letra redonda (no en *bastardillas*), independientemente del resto del texto. Por ejemplo: *mide 20* km *de longitud*. Esto permite diferenciarlos de las variables.

Para multiplicar dos símbolos se pone un punto a media altura o se deja un espacio en blanco. Por ejemplo, el producto de metros por segundos se escribe m s ó m·s. Para dividir dos símbolos se utiliza una barra oblicua, una barra horizontal o potencias negativas. Por ejemplo, la aceleración se escribe m/s^2, ó $\frac{m}{s^2}$ ó m s^{-2}.

2.3.- Cifras significativas y redondeo

La precisión y exactitud de un resultado experimental está implícita en el número de dígitos con los que se expresa la medida, aunque hemos de añadir también el valor de la incertidumbre de la mediad para identificar las cifras realmente significativas en un caso concreto. El valor de la magnitud debe tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden decimal que la última cifra significativa que se tome para la incertidumbre.

> El truncado (o redondeo) del valor de la magnitud debe realizarse solamente en la expresión final de las medidas, no en las operaciones intermedias que podamos realizar con él, ya que perderíamos información experimental y el resultado final puede verse afectado ligeramente.

Dado el significado de cota de garantía que tiene la incertidumbre, ésta se expresa con una[9] cifra significativa, aumentando dicha cifra en una unidad si la primera que se desprecia es mayor o igual que 5. Cuando la primera cifra significativa es 1, resulta más correcto mantener la segunda cifra de la incertidumbre.

Para el redondeo, lo mejor es escribir el número en la notación científica para dejar claro en qué rango está la precisión de la medida. Así, por ejemplo, si la incertidumbre de una medida es 18,375, la escribimos como $1{,}8375 \cdot 10^1$ (cinco cifras significativas) y dejamos claro que la incertidumbre está en el orden de las decenas. Si queremos expresar esta incertidumbre con una única cifra significativa, debemos quedarnos con el 1 (primera cifra significativa) y despreciar el 8 (segunda cifra significativa): como 8 es mayor que 5, incrementamos en una unidad la cifra con la que nos quedamos (1 + 1 = 2), con lo que la incertidumbre sería $2 \cdot 10^1 = 20$ (en definitiva, 18,375 está más cerca de 20 que de 10 y, por eso, el redondeo de 18,375 es 20). Si, dado que la incertidumbre empieza por 1, queremos su expresión con dos cifras significativas, debemos despreciar el 3 (tercera cifra significativa) con lo que, al ser 3 < 5, las última cifra con la que nos quedamos (el 8) permanece igual. Así pues, la incertidumbre 18,375 se expresa, con dos cifras significativas, como 18 (en definitiva, 18,375 está más cerca de 18 que de 19).

Los ceros a la izquierda en una incertidumbre no son cifras significativas (aunque sí lo son a la derecha). Así, 0,000018 tiene dos cifras significativas ya que este número, escrito en la notación científica, es $1{,}8 \cdot 10^{-5}$. Teniendo en cuenta lo razonado en el párrafo anterior, esta incertidumbre se expresa como $2 \cdot 10^{-5}$ (es decir, 0,00002) con una cifra significativa, o como $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ (0,000018) con dos cifras significativas. Sin embargo, una incertidumbre expresada como 180 (o 200) tiene tres cifras significativas.

Los siguientes ejemplos ilustran lo indicado en este epígrafe:

Expresión INCORRECTA	Expresión CORRECTA
(3,418±0,127) m s^{-1}	(3,4±0,1) m s^{-1} ó (3,42±0,13) m s^{-1}
(6,3±0,072) s	(6,30±0,08) s
(7320±175) s	(7300±200) s
(8,7683±0,16) V	(8,8±0,2) V
(508,28±0,3) mA	(508,3±0,3) mA

9 Habitualmente basta con dar dos cifras significativas, aunque en ciertos casos, pueda ser necesario mantener cifras suplementarias para evitar la propagación de errores de redondeo en cálculos posteriores. Nosotros utilizaremos en las prácticas una o excepcionalmente dos con objeto de reflejar nuestra forma de trabajo (posiblemente no demasiado minuciosa) y proporcionar mayores garantías.

3.- Medida directa de una magnitud

El objetivo de una medición es determinar el valor del mensurando. Por consiguiente una medición empieza con una definición apropiada del mensurando, qué es lo que se quiere medir. Por ejemplo si se quiere medir la longitud de una barra de acero de aproximadamente 1 metro , ¿se necesita con exactitud de micrómetros o de milímetros? Nótese que en el primer caso muy posiblemente deba especificarse condiciones como la temperatura o la presión a la que se realiza (mejor dicho referir dicha observación a unas condiciones estándar) en tanto que en el segundo caso no se requieren de datos adicionales . Por tanto, la especificación del mensurando requiere un enunciado claro, no ambigüo de lo que se desea medir.

Decimos que una magnitud se mide directamente cuando determinamos su valor a partir de la lectura de un instrumento de medida adecuado (como, por ejemplo, una regla para medir el ancho de un folio o un cronómetro para medir las pulsaciones del corazón), sin necesidad de realizar otros cálculos con el resultado que proporciona ese instrumento. En la estimación de la incertidumbre de esta medida puede ser necesario tomar cada fuente de incertidumbre y tratarla separadamente para obtener la contribución de cada fuente. Cada una de las contribuciones separadas a la incertidumbre es referida como una componente de incertidumbre. En la literatura se distinguen dos métodos principales para cuantificar las fuentes de incertidumbre: el método de evaluación de **incertidumbre de tipo A** y el método de evaluación de **incertidumbre de tipo B**. La intención que guía esta clasificación de incertidumbres son las dos formas diferentes de evaluar las componentes de la incertidumbre de modo independiente de la naturaleza de tales contribuciones. Ambos tipos de componentes de la incertidumbre asumen ciertas distribuciones de probabilidad para el mensurando y ambas se cuantifican a través de desviaciones típicas, estando la diferencia en el origen de dichas distribuciones de probabilidad: en el tipo A estas distribuciones proceden de frecuencias muestrales en tanto que las de tipo B las distribuciones son supuestas por el observador.

Por tanto, las incertidumbres tipo A y tipo B no tienen nada que ver con las palabras “aleatorio” o “sistemático“. Ambos tipos de evaluación están basados en distribuciones de probabilidad y no tienen que ver con la naturaleza de la fuente (aleatoria o sistemática) sino con la forma de evaluarla.

Las diversas fuentes de incertidumbre son combinadas matemáticamente según la llamada “Ley de Propagación de la Incertidumbre” para obtener la llamada incertidumbre combinada u_c . Posteriormente, esta incertidumbre se se multiplica por número (**factor de cobertura**) para dar un intervalo nuevo (**incertidumbre expandida**) y un nivel de confianza de que el valor verdadero esté en dicho intervalo .

3.1.- Evaluación tipo A de la incertidumbre

Tipo A: Aquellas que pueden estimarse a partir de cálculos estadísticos obtenidos de las muestras recogidas en el proceso de medida.

Si la medida de una magnitud puede ser repetida reiteradamente, es posible obtener una distribución de probabilidad experimental de los valores medidos. En la mayor parte de los casos, la mejor estimación disponible del valor esperado de una magnitud X_i, de la cual se han obtenido n observaciones independientes, bajo las mismas condiciones de medición, es la media aritmética de las n observaciones:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

La varianza muestral dada por:

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

es un estimador fiel de la varianza poblacional. Esta varianza caracteriza la dispersión de los valores x_i alrededor del valor medio $\bar{x}$. A su vez, la varianza $s^2(\bar{x})$ de la media muestral $\bar{x}$, está relacionada con la varianza poblacional a través de:

$$s^2(\bar{x})=\frac{s^2}{n}$$

Es decir, s, caracteriza a la incertidumbre asociada a cada medida experimental, mientras que $s(\bar{x})$ caracteriza a la incertidumbre asociada con la media de cualquier conjunto de N mediciones. Claramente, cuanto más se mide una cantidad, mejor se conoce su media, pero como muestra la ecuación anterior, la incertidumbre disminuye sólo como la raíz cuadrada del número de mediciones. Por tanto, un buen estimador para la incertidumbre típica de tipo A asociada a la medida vendrá dada por la ***desviación típica experimental de la media***:

$$u_A(\bar{x})=\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

¿Cuántas veces hay que realizar el proceso de medida directa con el objeto de reducir esta incertidumbre tipo A? No se puede dar una recomendación general para el número ideal de las repeticiones n, ya que esté depende de las condiciones y exigencias de cada medición específica.

Es necesario considerar que:

- Al aumentar el número de repeticiones disminuye la incertidumbre tipo A, la cual es proporcional a $1/\sqrt{(n)}$;
- El número de medidas a realizar debe ser tal que esta incertidumbre sea menor o, a lo sumo, del mismo orden de magnitud que la asociada a la división de escala (ver evaluación tipo B de la incertidumbre).
- Un número grande de repeticiones aumenta el tiempo de medición, que puede ser contraproducente, si las condiciones ambientales u otras magnitudes de entrada no se mantienen constantes en este tiempo;
- En pocos casos se recomienda o se requiere n mayor que 10. Por ejemplo cuando se caracterizan instrumentos, patrones o se hacen mediciones o calibraciones de alta exactitud;
- Para determinar el impacto que tiene n en la incertidumbre expandida hay que estimar su influencia en el número efectivo de grados de libertad.
- Existen otros métodos estadísticos para evaluar la incertidumbre estándar de tipo A que se aplican en ciertas clases de mediciones; por ejemplo, análisis de varianza, estudios de reproducibilidad, regresión lineal (método de los mínimos cuadrados), entre otros.

En la práctica, una sola medida nos planteará la duda de que fiabilidad darle, ¿se repetirá el resultado en la siguiente medida?. Una segunda, caso de diferenciarse de la anterior, nos sume en una duda mayor si cabe. Por tanto, 3 mediciones parece un número mínimo para empezar a discutir sobre el valor verdadero, aunque sería más seguro realizar algunas más. Partiendo de estás 3 medidas, calculamos el rango de las mismas la diferencia entre los valores extremos (es decir, la diferencia entre el mayor y el menor valor), esto es, el rango D. Se nos pueden presentar dos casos:

1) que D sea cero o igual a la sensibilidad del instrumento de medida usado. En este caso, basta con las 3 medidas realizadas.
2) que D sea mayor que la sensibilidad del aparato. En este caso, calcularemos $\varepsilon_D = \frac{x_{máx} - x_{mín}}{\bar{x}} 100\,\%$, donde $\bar{x}$ es la media aritmética de los 3 valores encontrados. Para tener una idea de qué número de medidas se debe tomar[10], aplicaremos el siguiente criterio:

ε_D	Número total de medidas a realizar
$\varepsilon_D < 2\%$	3 medidas realizadas
$2\% \leq \varepsilon_D \leq 8\%$	6 medidas
$8\% \leq \varepsilon_D \leq 15\%$	15 medidas
$\varepsilon_D \geq 15\%$	50 medidas mínimas

La idea que se persigue con este criterio es que la incertidumbre que asociaremos a la medida no sea tan elevada que invalide (o deje sin sentido) a la medida misma (ver el epígrafe de "Incertidumbre expandida y factor de cobertura"). Como puede apreciarse el rango relativo que podemos asumir como válido para realizar nuestra estimación crece con el número de medidas puesto que el número de repeticiones disminuye la desviación típica experimental en una incertidumbre tipo A.

Los errores humanos al registrar o procesar los datos pueden introducir graves distorsiones. Los cálculos de incertidumbre no están diseñados para tratar este tipo de errores; errores grandes se pueden detectar por una buena revisión de los datos o por procedimientos estadísticos conocidos.

3.2.- Evaluación tipo B de la incertidumbre

Tipo B: Aquellas que únicamente están basadas en la experiencia o en otras informaciones. Este tipo de evaluación viene determinada por las contribuciones a la incertidumbre, estimadas mediante métodos no estadísticos, y que se caracterizan por unos términos $u_B(x)$, que pueden ser consideradas como unas aproximaciones de las varianzas correspondientes, evaluados mediante juicios y criterios científicos, basados en toda la información disponible sobre la variabilidad de x_i.

Las fuentes de información pueden ser:

- valores de mediciones anteriores;

10 La repetición de las medidas nos permita ganar cierta confianza "estadística" en la estimación que podemos hacer de la misma.

- datos suministrados mediante certificados de calibración u otros certificados:

> consiste en comparar la salida del equipo frente a la salida de un patrón de exactitud conocida cuando la misma entrada —magnitud medida— es aplicada a ambos instrumentos. Todo procedimiento de calibración se puede considerar como un proceso de medida del error que comete un equipo. En el entorno industrial se acepta que una fuente de incertidumbre puede considerarse no significativa cuando su estimación es inferior en valor absoluto a 4 veces la mayor de todas las fuentes estimadas.

- manuales de los instrumentos de medición
- conocimiento sobre las especificaciones de los materiales e instrumentos utilizados en la medición

Al evaluar las componentes individuales de incertidumbre en un proceso de medición se consideran, al menos, las siguientes posibles fuentes:

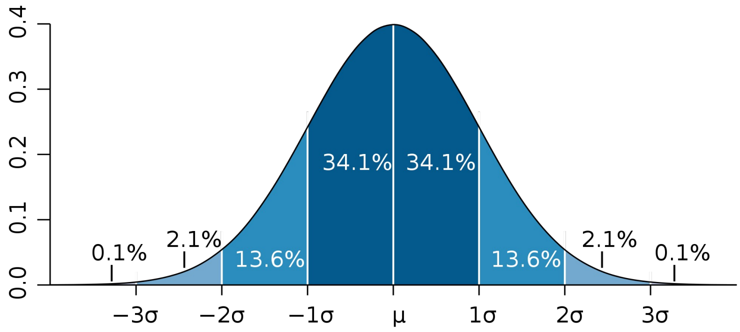
- incertidumbre reportada en los certificados de calibración de los instrumentos patrones
- y cualquier deriva o inestabilidad en sus valores o lecturas
- los equipos de medición: su resolución, histéresis e inestabilidad durante la realización de las mediciones;
- el efecto de las condiciones ambientales
- el método y procedimiento de medición
- los equipos auxiliares, como las líneas de conexión, fuentes de alimentación, baños termostáticos, etc., y cualquier deriva o inestabilidad en sus valores o lecturas;
- el observador.

La evaluación tipo B de la incertidumbre estándar es en esencia al igual que la evaluación tipo A, una determinación de la desviación estándar; pero la evaluación tipo B no se basa en un análisis estadístico, sino que en la mayoría de los casos se asume una función de distribución a priori a partir de la cual se realiza la evaluación.

En la práctica se nos pueden presentar los siguientes casos:

Si la estimación x_i se toma de una especificación del fabricante, de un certificado de calibración, manual u otra fuente, y su incertidumbre asignada se establece como un múltiplo de una desviación estándar, la incertidumbre estándar u_B (x_i) es simplemente el valor asignado dividido por el multiplicador (factor de cobertura, ver en epígrafe posterior);

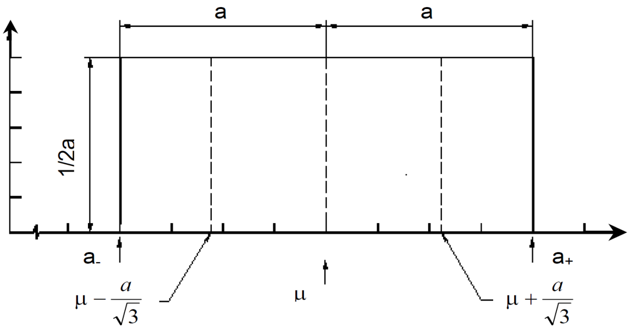
La incertidumbre asignada a x_i no necesariamente está dada como un múltiplo de una desviación estándar. En lugar de eso, puede encontrarse que la incertidumbre asignada define un intervalo con un nivel de confianza de (90; 95 o 99) %. A menos que se indique otra cosa, se asume que se usó una distribución normal (ver figura) y se recupera la incertidumbre estándar dividiendo la incertidumbre asignada por el factor apropiado. Los factores correspondientes a los tres niveles de confianza mencionados son: 1,64; 1,96; y 2,58.



Los resultados de una medición repetida, afectada por una o más magnitudes de influencia que varían aleatoriamente, generalmente, siguen en buena aproximación una distribución normal.

En otros casos puede que sea posible estimar sólo los límites (superior e inferior) para x_i, en particular para establecer que la probabilidad de que el valor de x_i esté dentro del intervalo de [a_- , a_+] es uno y la probabilidad de que x_i esté fuera cero (distribución uniforme o rectangular). Si no existe un conocimiento específico acerca de los posibles valores de x_i dentro del intervalo, uno puede únicamente suponer que es igualmente probable para x_i tomar cualquier valor dentro del intervalo (ver en la figura distribución uniforme o rectangular). Entonces la esperanza o valor esperado de x_i, es el punto medio del intervalo, $x_i = \frac{a_- + a_+}{2}$, con una varianza asociada $u_B^2(\bar{x}) = \frac{(a_- + a_+)^2}{12}$ o una desviación estándar (incertidumbre estándar tipo B de x_i), caso de que la diferencia entre los límites a_+ y a_- se denote por 2a,:

$$u_B(\bar{x}) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



La fórmula anterior se utiliza generalmente cuando se analizan componentes individuales de incertidumbre tales como:

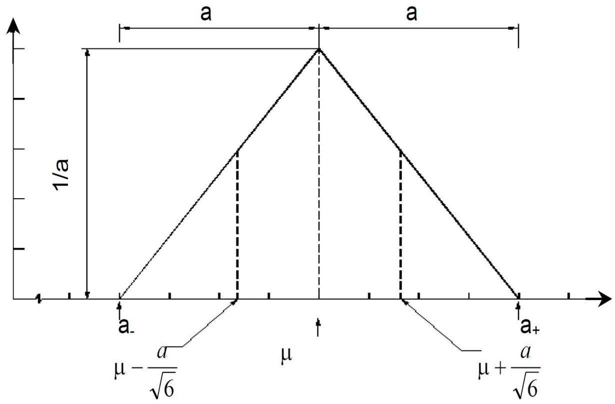
- el error de un instrumento de medición el cual se supone que está comprendido dentro de los límites del error máximo permisible (EMP)
- la resolución (R) de un instrumento digital o la apreciación (A) de las lecturas con un instrumento analógico
- la histéresis (H) de las indicaciones de un instrumento de medición
- el efecto de algunas magnitudes influyentes ($\pm\Delta$)

En estos casos se sustituye el valor de "a" por EMP; R/2; A/2; H/2; ó $\pm\Delta$ según corresponda.

La distribución rectangular es una descripción razonable, en términos de probabilidad, de nuestro conocimiento incompleto sobre la posible variabilidad de la magnitud dada; pero si se conoce además que los valores próximos al centro del intervalo son más frecuentes que aquellos próximos a los límites, una distribución triangular (ver figura anterior) o normal (como la presentada anteriormente) puede utilizarse mejor para estimar la incertidumbre estándar tipo B,

$$u_B(\bar{x})=\frac{a}{\sqrt{6}} \quad \text{ó respectivamente} \quad u_B(\bar{x})=\frac{a}{3}$$

Para una distribución normal de esperanza matemática μ y desviación típica σ, el intervalo μ ± 3σ comprende aproximadamente el 99,73 por ciento de la distribución. Si los límites superior e inferior, a+ y a−, definen un intervalo con un 99,73 por ciento, en lugar de un 100 por ciento, y si X_i puede suponerse distribuida de forma aproximadamente normal, en lugar de carecer de información específica sobre X_i entre los limites, entonces $u^2(x_i) = a^2/9$. En comparación, la varianza de una distribución rectangular simétrica de sem iamplitud a es $a^2/3$ y la de una distribución triangular simétrica de semi amplitud a es $a^2/6$. Los valores de las varianzas para las tres distribuciones son sorprendentemente similares a pesar de las grandes diferencias de información que las justifican.



La distribución rectangular se utiliza para modelar que no se tiene conocimiento específico sobre los valores posibles de X_i dentro de sus límites estimados de a_- a a_+ (cualquier valor en el interior de esos límites es equiprobable y fuera de ellos la probabilidad es nula). Tales discontinuidades en forma de función escalón para una distribución de probabilidad, raramente se dan en la física. En numerosos casos, es más realista suponer que los valores cerca de los límites son menos probables que los situados en torno al centro. Es entonces razonable reemplazar la distribución rectangular simétrica por una distribución trapezoidal simétrica de pendientes iguales (un trapecio isósceles), con una base mayor de anchura $a_+ - a_- = 2a$ y una base menor de anchura 2aβ, donde 0 ≤ β ≤ 1. Cuando β → 1 esta distribución trapezoidal se aproxima a la distribución rectangular de 4.3.7, mientras que para β = 0 es una distribución triangular. Suponiendo tal distribución trapezoidal para X_i, se encuentra que la esperanza matemática de X_i es $x_i = (a_- + a_+)/2$ y su varianza es:

$$u^2(x_i)=\frac{a^2(1+\beta^2)}{6}$$

La distribución trapezoidal es equivalente a la convolución de dos distribuciones rectangulares, una de semiamplitud a_1 igual a la semiamplitud media del trapecio, $a_1 = a\,(1+\beta)/2$, y la otra de semiamplitud a_2 igual a la anchura media de una de las porciones triangulares del trapecio, $a_2 = a\,(1-\beta)/2$. La varianza de la distribución es $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$. La distribución resultante puede interpretarse como una distribución rectangular cuya anchura $2a_1$ posee una incertidumbre representada a su vez por una distribución rectangular de anchura $2a_2$ y explica el hecho de que los límites de una magnitud de entrada no son conocidos con exactitud.

Para un resultado de una medición *y*, la incertidumbre total, denominada incertidumbre estándar combinada y denotada por $u_c(y)$, es una desviación estándar estimada igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza total obtenida por la combinación de todas las componentes de la incertidumbre, evaluada por lo tanto, utilizando la ley de propagación de incertidumbre:

$$u_c=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \quad \ldots \quad \sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

Notar que no debe contarse dos veces las componentes de incertidumbre. Si una componente de incertidumbre, que resulta de un efecto en particular, se obtiene a partir de una evaluación tipo B, debe incluirse como una componente independiente de incertidumbre únicamente si su efecto no contribuye a la variabilidad apreciada en las observaciones, ya que dicha componente puede haber sido evaluada a partir del análisis estadístico de las observaciones.

Es posible determinar directamente la contribución combinada de varias fuentes usando datos anteriores, por ejemplo de estudios de validación (tests realizados en el laboratorio), de control de calidad o información de la calibración.

4.- Medida indirecta de una magnitud: propagación de incertidumbres

Una medida indirecta de una magnitud proviene del cálculo a partir de otras magnitudes medidas a su vez directa o indirectamente, mediante la aplicación de leyes físicas o fórmulas matemáticas. Es importante saber cómo se propagan las incertidumbre de las magnitudes utilizadas en el cálculo. Consideremos una magnitud Y que no se ha medido directamente, sino que está determinada a través de otras N magnitudes $\{X_i\}_{i=1}^{N}$ mediante la relación funcional

$$Y=f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

Consideremos que esta función admite un desarrollo en serie de Taylor y supongamos que las magnitudes X_1, X_2,..., X_N sólo tienen componentes de incertidumbre de tipo A, obtenidas mediante la repetición de su medida p veces. Entonces podremos escribir

$$y^i=f(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_N^i) \quad j=1,\ldots,N$$

donde cada una de las magnitudes de entrada presenta un valor medio y una incertidumbre dado por

$$\bar{x}_j=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_j^i; \quad u_A^2(\bar{x}_j)=\frac{1}{p(p-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_j^i-\bar{x}_j)^2 \quad j=1,\ldots,N$$

Desarrollando la función f y realizando una aproximación a primer orden[11]

$$y^i=f(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_N^i)\approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j^i-\bar{x}_j)$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ denota la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial X_j}$ evaluada en el punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$.

El valor esperado para la magnitud Y en esta serie de medidas corresponderá a:

$$\bar{y}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y^i=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} f(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_N^i)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j^i-\bar{x}_j)\}=$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(x_j^i-\bar{x}_j)=f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$$

donde se ha tenido en cuenta que la desviación media respecto al valor medio es cero por definición del valor medio. Dicho de otra manera, la medida indirecta se calcula dando como entrada a la función los valores más probables de cada una de las magnitudes medidas.

Podemos calcular también la incertidumbre de tipo A para la magnitud Y basándonos en los supuestos anteriores y en el último resultado. Para ello:

---

11 Si la no linealidad de la función **f** es significativa, puede ser necesario añadir términos de mayor orden en la expansión.

$$u_A^2(\bar{y})=\frac{1}{p(p-1)}\sum_{i=1}^{p}(y^i-\bar{y})^2=\frac{1}{p(p-1)}\sum_{i=1}^{p}\{\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j^i-\bar{x}_j)\}^2=$$
$$=\frac{1}{p(p-1)}\sum_{i=1}^{p}\{\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_j})^2(x_j^i-\bar{x}_j)^2+2\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(\frac{\partial f}{\partial x_k})(x_j^i-\bar{x}_j)(x_k^i-\bar{x}_k)\}=$$

y teniendo en cuenta que:

$$u_A^2(\bar{x}_j)=\frac{1}{p(p-1)}\sum_{i=1}^{p}(x_j^i-\bar{x}_j)^2$$
$$cov(\bar{x}_j,\bar{x}_k)=\frac{1}{p(p-1)}\sum_{i=1}^{p}(x_j^i-\bar{x}_j)(x_k^i-\bar{x}_k)$$

la expresión final

$$u_A^2(\bar{y})=\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_j})^2u_A^2(\bar{x}_j)+2\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(\frac{\partial f}{\partial x_k})cov(\bar{x}_j,\bar{x}_k)$$

Esta expresión recoge la ***forma general de la ley de propagación para las incertidumbres***. La deducción se puede repetir considerando distribuciones de frecuencias supuestas en lugar de distribuciones de frecuencia, por lo que la fórmula es válida también para incertidumbres tipo B y para incertidumbre combinada.

4.1.- Cantidades de entrada no correlacionadas

Si se supone que todas las magnitudes de entrada son independientes, esto es, pueden ser consideradas estadísticamente como variables independientes, $cov(\bar{x}_j,\bar{x}_k)=0$ y por tanto la expresión de la incertidumbre combinada para la magnitud Y es

$$u_A^2(\bar{y})=\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial x_j})^2u_A^2(\bar{x}_j)$$

Esta expresión se conoce como ***ley de propagación de la incertidumbre*** para magnitudes no correlacionadas. Notar que las derivadas parciales establecen la influencia que la incertidumbre x_j tiene sobre la incertidumbre combinada, conociéndose como coeficientes de sensibilidad.

En el caso de que la función f que expresa la dependencia funcional sea complicada, o sea necesaria su evaluación mediante métodos numéricos, podemos considerar que la componente de la incertidumbre $u_j(y)$ puede ser calculada como

$$u_j(y)=\frac{1}{2}\{f(x_1,x_2,\ldots,x_j+u(x_j),\ldots,x_N)-f(x_1,x_2,\ldots,x_j-u(x_j),\ldots,x_N)\}$$

es decir, corresponde a la mitad de la variación de y debida a tomar variaciones en x_j de $+u(x_j)$ y de $-u(x_j)$.

Ejemplo función tangente inversa

Se puede calcular la propagación de la incertidumbre para la función tangente inversa como ejemplo del uso de derivadas parciales para la propagación del error. Definiendo $f(\theta)=\arctan(\theta)$ donde σ_θ es la incertidumbre absoluta en la medida de θ.

La derivada parcial de f(θ) con respecto a θ es $\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{1}{1+\theta^2}$ En consecuencia, la incertidumbre propagada es $\sigma_f=\frac{1}{1+\theta^2}$ donde σ_f es la incertidumbre absoluta propagada.

Medición de la resistencia

Una aplicación práctica es un experimento en el que se mide la corriente, *I*, y el voltaje de un resistor con el fin de determinar la resistencia, *R*, usando la ley de Ohm, R=V/I. Dadas las variables medidas con sus incertidumbres, $I \pm \Delta I$ y $V \pm \Delta V$, la incertidumbre en la cantidad calculada, ΔR, es $\Delta R=|\frac{\Delta V}{I}|+|\frac{V}{I^2}\Delta I|$.

4.2.- Cantidades de entrada correlacionadas

En el caso de que las magnitudes de entrada X_i correspondan a variables aleatorias correlacionadas estadísticamente, será necesario tener en cuenta su correlación a través de las covarianzas entre distintas magnitudes. Por ejemplo, puede haber correlación entre dos magnitudes de entrada si se usa el mismo instrumento de medición, el mismo patrón físico o datos de referencia comunes entre otras.

A veces se usa en lugar de la covarianza el coeficiente de correlación

$$\rho(\bar{x}_j,\bar{x}_k)=\frac{cov(\bar{x}_j,\bar{x}_k)}{u(\bar{x}_j)u(\bar{x}_k)}$$

que está acotado en el intervalo [-1,1]. La expresión general para la ley de propagación de incertidumbres queda como

$$u^2(\bar{y})=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 u_A^2(\bar{x}_j)+2\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\rho(\bar{x}_j,\bar{x}_k)u(\bar{x}_j)u(\bar{x}_k)$$

Esta incertidumbre combinada se puede también escribir en forma matricial como

$$u_c^2(\bar{y})=[\vec{\nabla} f]^T\cdot \boldsymbol{M}\cdot[\vec{\nabla} f]$$

donde se ha hecho uso de la matriz de covarianza[12]

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} u^2(\bar{x}_1) & cov(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & \cdots & cov(\bar{x}_1,\bar{x}_N) \\ cov(\bar{x}_2,\bar{x}_1) & u^2(\bar{x}_2) & \cdots & cov(\bar{x}_2,\bar{x}_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov(\bar{x}_N,\bar{x}_1) & cov(\bar{x}_N,\bar{x}_2) & \cdots & u^2(\bar{x}_N) \end{pmatrix}$$

12 Esta matriz es por definición simétrica. Caso de magnitudes no correlacionadas, los elementos fuera de la diagonal son nulos y la matriz tiene forma diagonal.

y del vector columna gradiente $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{pmatrix}$ de la función $f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$

4.3.- Ejemplos con funciones

La siguiente tabla muestra las varianzas de funciones simples de las variables reales A, B con desviaciones estándar σ_A, σ_B, coeficiente de correlación ρ_{AB} y constantes de valores reales, conocidas precisamente, a, b.

Función	
$f = aA$	$\sigma_f^2 = a^2\sigma_A^2$
$f = aA \pm bB$	$\sigma_f^2 = a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2 \pm 2abCOV_{AB}$
$f = aAB$	$\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 + 2\frac{\sigma_A}{A}\frac{\sigma_B}{B}\rho_{AB}$
$f = a\frac{A}{B}$	$\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 - 2\frac{\sigma_A}{A}\frac{\sigma_B}{B}\rho_{AB}$
$f = aA^{\pm b}$	$\frac{\sigma_f}{f} = b\frac{\sigma_A}{A}$
$f = a\ln(\pm bA)$	$\sigma_f = a\frac{\sigma_A}{A}$
$f = ae^{\pm bA}$	$\frac{\sigma_f}{f} = b\sigma_A$
$f = a^{\pm bA}$	$\frac{\sigma_f}{f} = b\ln a\sigma_A$

5.- Incertidumbre expandida y factor de cobertura

La incertidumbre típica combinada, $u_c(\bar{x})$, es una desviación estándar combinada que caracteriza, al nivel estándar ~ 68,3%, la dispersión de los valores que puede atribuirse al mensurando de acuerdo a nuestros mejores conocimientos . Es decir, el valor real se encuentra a un ~ 68,3% de confianza en el intervalo $\bar{x}-u_c$ y $\bar{x}+u_c$. Si los resultados de una medición se ajustan a una distribución normal de probabilidad[13], la probabilidad de que el valor real esté en el intervalo dado por $x \pm ku_c$ es de un 68,27%, 95,45% o del 99,73% para k=1, 2 y 3 respectivamente[14] (ver tabla inferior). Este factor multiplicativo se conoce como ***factor de cobertura*** en tanto que al producto $U=k^* \ u_c$ se conoce como ***incertidumbre expandida***. Por tanto, se define la incertidumbre expandida como el intervalo alrededor del resultado de medición que , con una probabilidad o nivel de confianza p determinada, abarca una fracción suficientemente grande de la dispersión de los valores que "razonablemente" pueden atribuirse al mensurando .

Nótese que, siempre se debe indicar el nivel de confianza de la incertidumbre que hayamos determinado, aunque no se mencione explícitamente el factor de cobertura empleado, para que, la incertidumbre estándar combinada de la magnitud medida pueda ser recuperada.

Por tanto, en la elección del valor de k deben considerarse el nivel de confianza requerido, cualquier conocimiento de las distribuciones y cualquier conocimiento del número de valores utilizado para estimar efectos aleatorios. En las medidas del laboratorio, nos conformaremos con un nivel de confianza del 68% (k = 1, con lo que $U = u_c(\bar{x})$).

Nivel de confianza p	68,27	90	95	95,45	99	99,73
Factor de cobertura *k* (%)	1	1,645	1,960	2	2,576	3

Valor del factor de cobertura *k* que proporciona un intervalo correspondiente a un nivel de confianza p, suponiendo una distribución normal[15].

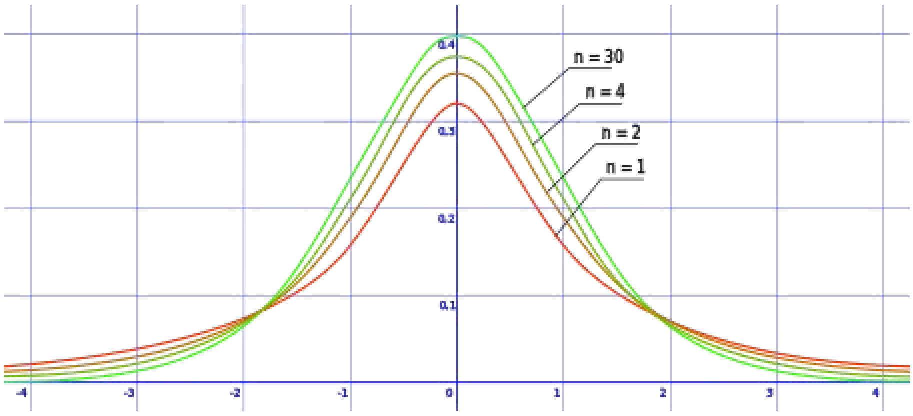
13 Nótese que, una comparación de varianzas de las distribuciones normal, rectangular y triangular indica que sus magnitudes son sorprendentemente similares a pesar de provenir de distribuciones con justificaciones notablemente diferentes. Normalmente se suele trabajar con la *distribución normal*.

14 Con un número de grados de libertad finito estos valores cambian, debiendo ser tanto mas grande cuanto menor es el número de observaciones para mantener un determinado grado de confianza en el intervalo. Ver número de grados efectivos de libertad de Welch-Satterthwaite.

15 Se pueden consultar más valores en Tablas estadísticas: Distribución Normal. (http://es.wikibooks.org/wiki/Tablas_estadísticas).

5.1.- Otras consideraciones sobre el valor del factor de cobertura

Para la mayoría de los propósitos es recomendado que k se igual a 2. Sin embargo, el valor de k puede ser insuficiente cuando la incertidumbre combinada está basada en observaciones estadísticas con relativamente pocos grados de libertad (menor que 6). Entonces, la elección de k depende no sólo del nivel de confianza que se requiera sino del número de grados de libertad efectivos. En este epígrafe se esboza una breve explicación a este problema.



Frecuentemente, los valores del mensurando siguen una distribución normal. Sin embargo, el mejor estimado del mensurando, la media (obtenida por muestreos de n mediciones repetidas) dividida entre su desviación estándar, sigue una distribución llamada t de Student, la cual refleja las limitaciones de la información disponible debidas al número finito de mediciones. Se suele considerar que una mejor aproximación a la incertidumbre expandida se obtiene considerando que la magnitud de salida sigue aproximadamente una *t* de Student con un número de grados de libertad υ, de modo que:

$$U=t_{\alpha/2;\upsilon} * u_c$$

siendo u_c la incertidumbre típica combinada asociada a la magnitud de salida y $t_{\alpha/2;\upsilon}$ el percentil de una *t* de Student con un número de grados de libertad υ que cumple que $p(|t|>t_{\alpha/2;\upsilon})=\alpha$[16][17]. Notar que, la distribución t de Student coincide con la distribución normal en el límite cuando n tiende a infinito, pero difiere considerablemente cuando n es pequeño.

Cuando la incertidumbre típica combinada de la magnitud de salida sea suma de varias contribuciones:

$$u_c^2(\bar{y})=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 u^2(\bar{x}_j)$$

16 Consultar valores tabulados en el apéndice C.

17 Se pueden consultar más valores y detalles de la distribución en Tablas estadísticas: Distribución t de Student. (http://es.wikibooks.org/wiki/Tablas_estadísticas).

se define el número de grados de libertad de Welch-Satterthwaite[18] mediante la relación

$$\frac{u_c^2(\bar{y})}{\upsilon_{eff}}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 u^2(\bar{x}_j)}{\upsilon_j}$$

con lo que

$$\upsilon_{eff}=\frac{u_c^2(\bar{y})}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 u^2(\bar{x}_j)}{\upsilon_j}}$$

Esta definición implica un resultado no entero que, para su aplicación, supone redondear al número entero positivo más cercano. En la expresión anterior, υ_i se corresponde con los grados de libertad de una componente de incertidumbre de una magnitud de entrada. Si la estimación de una componente de incertidumbre es de tipo A con n repeticiones hablamos de υ_i=n-1. En el caso de incertidumbre de tipo B es más difícil evaluar el número de grados de libertad y suele considerarse

$$\upsilon_i=\frac{1}{2}\frac{u^2(\bar{x}_i)}{\sigma[u(\bar{x}_i)]}\approx\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(\bar{x}_i)}{u(\bar{x}_i)}\right]^{-2}$$

donde sigma es la varianza de esta incertidumbre y el corchete grande la incertidumbre relativa de $u(x_i)$. Para una evaluación Tipo B de la incertidumbre típica, se trata de una magnitud subjetiva cuyo valor se obtiene mediante juicio científico basado en el conjunto de informaciones disponibles.

18 Ver más detalles en la entrada de la wikipedia (versión en inglés), http://en.wikipedia.org/wiki/Welch%E2%80%93Satterthwaite_equation

6.- Resumen y ejemplos de la evaluación y expresión de la incertidumbre.

Las etapas a seguir para evaluar y expresar la incertidumbre del resultado de una medición puede resumirse como sigue:

1) Expresar matemáticamente la relación existente entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las que depende Y según $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. La función *f* debe contener todas las magnitudes, incluyendo todas las correcciones y factores de corrección que pueden contribuir significativamente a la incertidumbre del resultado de medición.

2) Determinar x_i, el valor estimado de la magnitud de entrada X_i, bien a partir del análisis estadístico de una serie de observaciones, bien por otros métodos.

3) Evaluar la incertidumbre típica $u(x_i)$ de cada estimación de entrada x_i. Para una estimación de entrada obtenida por análisis estadístico de series de observaciones, la incertidumbre típica se evalúa tal como se describe en 3.1 (evaluación Tipo A de la incertidumbre típica). Para una estimación de entrada obtenida por otros medios, la incertidumbre típica $u(x_i)$ se evalúa tal como se describe en 3.2 (evaluación Tipo B de la incertidumbre típica).

4) Evaluar las covarianzas asociadas a todas las estimaciones de entrada que estén correlacionadas.

5) Calcular el resultado de medición; esto es, la estimación *y* del mensurando Y, a partir de la relación funcional *f* utilizando para las magnitudes de entrada X_i las estimaciones x_i obtenidas en el paso 2.

6) Determinar la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ del resultado de medida *y*, a partir de las incertidumbres típicas y covarianzas asociadas a las estimaciones de entrada.

7) (No será necesario hacer esto) Si es necesario dar una incertidumbre expandida U, cuyo fin es proporcionar un intervalo $[y-U, y+U]$ en el que pueda esperarse encontrar la mayor parte de la distribución de valores que podrían, razonablemente, ser atribuidos al mensurando Y, multiplicar la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ por un factor de cobertura k, normalmente comprendido en un margen de valores entre 2 y 3, para obtener $U= k\, u_c(y)$. Seleccionar k considerando el nivel de confianza requerido para el intervalo.

8) Documentar el resultado de medición y, junto con su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$, o su incertidumbre expandida U.

> Descripción larga: "m_S = (100,021 5 ± 0,000 9) g, donde el número que sigue al símbolo ± es el valor numérico de $U = k\, u_c$ (incertidumbre expandida), con U determinada a partir de uc = 0,4 mg (incertidumbre típica combinada), y de k = 2,26 (factor de cobertura), basado en la distribución *t* de Student para $\upsilon = 9$ grados de libertad, definiendo un intervalo estimado para tener un nivel de confianza del 95%"
>
> Descripción corta:"m_S = (100,021 5 ± 0,000 4) g" ó "m_S = 100,021 5(0,000 4) g" ó " m_S = (100,021 5 g con (una incertidumbre típica combinada) u_c = 0,4 mg"

Describir también, cómo han sido obtenidos los valores de *y* y de $u_c(y)$ ó U.

EJEMPLO 1.- Con una báscula, se pesa una persona obteniendo los siguientes valores (expresados en kg): {72,5; 71,6; 72,0}. La sensibilidad de la báscula es S = 0,5 kg. Exprese correctamente el resultado de la medida con su incertidumbre.

La mejor estimación que podemos realizar del peso de esa persona es su valor medio:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_j^i = \frac{72{,}5\,kg + 71{,}6\,kg + 72{,}0\,kg}{3} = 72{,}03\hat{3}\,kg$$

se calcula el rango de las medidas:

$$D = 72{,}5\,kg - 71{,}6\,kg = 0{,}9\,kg$$

como este valor del rango es mayor que la sensibilidad del aparato, se calcula la fracción de esta dispersión sobre la medida

$$\varepsilon_D = \frac{x_{máx} - x_{mín}}{\bar{x}} 100\,\% = \frac{72{,}5\,kg - 71{,}6\,kg}{72{,}36\hat{6}\,kg} 100\,\% = 1{,}25\,\%$$

por tanto parece que las tres medidas dan un número suficiente de valores para estimar un peso.

La incertidumbre debida a la dispersión, tipo A, es:

$$u_A(\bar{x}_j) = \sqrt{\frac{1}{3(3-1)}\sum_{i=1}^{3}(x_j^i - \bar{x}_j)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3(3-1)}((72{,}5\,kg - 72{,}03\hat{3}\,kg)^2 + (71{,}6\,kg - 72{,}03\hat{3}\,kg)^2 + (72{,}0\,kg - 72{,}03\hat{3}\,kg)^2)} = 0{,}2603\,kg$$

La incertidumbre combinada sería

$$u_c(\bar{x}_j) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}_j) + u_B^2(\bar{x}_j)} = \sqrt{0{,}2603^2 + \frac{0{,}5}{2\sqrt{3}}} = 0{,}4606\,kg$$

Dado que la incertidumbre debe expresarse con una única cifra significativa si ésta no es la unidad, la incertidumbre final del valor que tomamos como convencionalmente verdadero (la media aritmética) es 0,5 kg.

Por lo tanto, el peso que asignamos a la persona es (*72,0 ± 0,5) kg* con un *nivel de confianza* del *68%*.

EJEMPLO 2.- Con una báscula, se pesa una persona obteniendo los siguientes valores (expresados en kg): {72,9; 71,6; 70,7}. La sensibilidad de la báscula es S = 0,5 kg. Exprese correctamente el resultado de la medida con su incertidumbre.

La mejor estimación que podemos realizar del peso de esa persona es su valor medio:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_j^i = \frac{72{,}9\,kg + 71{,}6\,kg + 70{,}7\,kg}{3} = 71{,}73\hat{3}\,kg$$

se calcula el rango de las medidas:

$$D = 72{,}9\,kg - 70{,}7\,kg = 2{,}2\,kg$$

como este valor del rango es mayor que la sensibilidad del aparato, se calcula la fracción de esta dispersión sobre la medida

$$\varepsilon_D = \frac{x_{máx} - x_{mín}}{\bar{x}} 100\,\% = \frac{72{,}9\,kg - 72{,}7\,kg}{71{,}73\hat{3}\,kg} 100\,\% = 3{,}067\,\%$$

por tanto parece que las tres medidas en esta ocasión no dan un número suficiente de valores para estimar un peso.

Se realizan 3 mediciones más para completar la muestra a seis observaciones, obteniendo los valores {73,6; 72,2; 70,2}. La mejor estimación del peso, el valor medio, de las observaciones cambia:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_j^i = \frac{72{,}9\,kg + 71{,}6\,kg + 70{,}7\,kg + 73{,}6\,kg + 72{,}2\,kg + 70{,}2\,kg}{3} = 71{,}86\hat{6}\,kg$$

y el rango de las medidas también:

$$D = 73{,}6\,kg - 70{,}2\,kg = 3{,}4\,kg$$

dando una fracción de esta dispersión sobre la medida

$$\varepsilon_D = \frac{x_{máx} - x_{mín}}{\bar{x}} 100\,\% = \frac{73{,}6\,kg - 70{,}2\,kg}{71{,}86\hat{6}\,kg} 100\,\% = 4{,}731\,\%$$

La incertidumbre debida a la dispersión, tipo A, es:

$$u_A(\bar{x}_j) = \sqrt{\frac{1}{6(6-1)}\sum_{i=1}^{6}(x_j^i - \bar{x}_j)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6(6-1)}((72{,}5\,kg - 71{,}86\hat{6}\,kg)^2 + \ldots + (\ldots - 71{,}86\hat{6}\,kg)^2)} = 0{,}5289\,kg$$

La incertidumbre combinada sería

$$u_c^2(\bar{x}_j) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}_j) + u_B^2(\bar{x}_j)} = \sqrt{0{,}5289^2 + (\frac{0{,}1}{2\sqrt{3}})^2} = 0{,}6512\,kg$$

La incertidumbre debida a la dispersión (0,5289 kg) es mayor que la debida a la división de escala (0.1443). Podemos optar por: analizar cuidadosamente los datos experimentales desconfiando de las medidas que por alguna razón se desvíen mucho de las demás (en nuestro caso la medida de 73,6 kg, aunque también podríamos eliminar la de 70,2), realizando una nueva medida para completar las 6 medidas o simplemente prescindiendo de ella. Si concluimos que no tenemos razón alguna para rechazar medidas, continuamos tomando más valores hasta que la incertidumbre debida a la dispersión sea, como mínimo, del mismo orden de magnitud que la debida a la división de escala.

De otra parte podemos no plantearnos nada y, dado que la incertidumbre debe expresarse con una única cifra significativa si ésta no es la unidad, la incertidumbre final del valor que tomamos como convencionalmente verdadero (la media aritmética) es 0,7 kg.

Por lo tanto, el peso que asignamos a la persona es (*71,9 ± 0,7) kg* con un *nivel de confianza* del *68%*.

Nota: se puede comprobar los efectos que tiene repetir las medidas. Para , utilizando una hoja de cálculo u otro programa de cálculo (Octave, Scilab, Matlab, ….), tomad un conjunto de valores aleatoriamente seleccionados en el intervalo [0,1] (normalmente suele venir una función programada que devuelve valores en este intervalo) y añadirlos, mitad de las veces sumando, mitad de las veces restando, a la media. Comprobad como cambia la incertidumbre debida a la dispersión y la incertidumbre combinada. Se puede modificar el intervalo en el que se seleccionan los datos aleatoriamente a otros, simplemente multiplicando la función que los genera por un factor de escala (0.5, 2,.....).

EJEMPLO 3.- Supongamos que el fabricante de la báscula nos indica que la desviación máxima de la medida se ha establecido en el 1% para masas inferiores a 100 kg. ¿cómo cambia el resultado del ejemplo 1?

Para evaluar cuál es la contribución de esta incertidumbre tipo B tendremos en cuenta que la medida puede desviarse del valor correcto en:

$$\Delta \bar{m} \;\; ó \;\; EMP \; = \; 0{,}01 \;\; x \;\; 72{,}03\, kg = 0{,}7203\, kg$$

y como consecuencia de esta corrección y suponiendo una distribución de probabilidad uniforme para los valores de la masa, asignamos una incertidumbre tipo B a esta nueva fuente:

$$u_B(\Delta \bar{m}) = \frac{0{,}7203}{\sqrt{3}} = 0{,}4159\, kg$$

La incertidumbre combinada sería

$$u_c^2(\bar{x}_j) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}_j) + u_B^2(\bar{x}_j) + u_B^2(\Delta \bar{m})} = \sqrt{0{,}2603^2 + \frac{0{,}5}{2\sqrt{3}} + \frac{0{,}7203}{\sqrt{3}}} = 0{,}7925\, kg$$

Dado que la incertidumbre debe expresarse con una única cifra significativa si ésta no es la unidad, la incertidumbre final del valor que tomamos como convencionalmente verdadero (la media aritmética) es 0,8 kg. Por lo tanto, el peso que asignamos a la persona es (*72,0 ± 0,8) kg* con un *nivel de confianza* del *68%*. El valor aceptado como verdadero no cambia pero sí lo hace el intervalo de incertidumbre, siendo ahora mayor, consecuencia directa de la nueva fuente de error.

EJEMPLO 4.- Se quiere medir el valor de una resistencia eléctrica midiendo la corriente eléctrica con un amperímetro y la diferencia de potencial en los extremos. Para ello se realizan 5 medidas independientes que dan los valores que figuran en la tabla

Voltaje (V)	5,05	5,26	4,55	4,66	4,95
Intensidad (A)	0,00474	0,00522	0,00478	0,00474	0,00496

Los valores medios para las magnitudes V e I son 4,894 V y 0,004884 A respectivamente, lo que permite estimar un valor para la resistencia, dada por la ley de Ohm, de

$$\bar{R}=\frac{\bar{V}}{\bar{I}}=1002{,}05\,\Omega$$

Por simplificar, como incertidumbres de las mediciones de voltaje e intensidad se tomarán únicamente las incertidumbres tipo A.

$$u_A(\bar{V})=\sqrt{\frac{1}{5(5-1)}\sum_{i=1}^{5}(V_j^i-\bar{V})^2}=\sqrt{\frac{1}{5(5-1)}((5{,}05\,v-4{,}894\,V)^2+\ldots)}=0{,}1293\,V$$

$$u_A(\bar{I})=\sqrt{\frac{1}{5(5-1)}\sum_{i=1}^{5}(I_j^i-\bar{I})^2}=\sqrt{\frac{1}{5(5-1)}((0{,}00474\,A-0{,}004884\,A)^2+\ldots)}=0.0000941\,A$$

Por otra parte, las covarianzas y el coeficiente de correlación son

$$cov(\bar{V},\bar{I})=\frac{1}{5(5-1)}\sum_{i=1}^{5}(V_j^i-\bar{V})(I_j^i-\bar{I})=0.000008556\,V\cdot A$$

$$\rho(\bar{V},\bar{I})=\frac{cov(\bar{V},\bar{I})}{u_A(\bar{V})u_A(\bar{I})}=0{,}703$$

Dado que la resistencia es una magnitud derivada de V e I, R=V/I , la incertidumbre viene dada por la forma general de la ley de propagación para las incertidumbres, que en este caso se escribe como:

$$u_c^2(\bar{R})=\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 u_A^2(\bar{V})+\left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 u_A^2(\bar{I})+2\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)cov(\bar{V},\bar{I})=$$

$$=\left(\frac{1}{\bar{I}^2}\right)^2 u_A^2(\bar{V})+\left(\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right)^2 u_A^2(\bar{I})+2\left(\frac{1}{\bar{I}^2}\right)\left(-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right)cov(\bar{V},\bar{I})=18{,}845\,\Omega$$

Por tanto, la medida que se obtendría de la resistencia eléctrica es (1000±20)Ω.

7.- Representación gráfica de datos experimentales

A la hora de realizar representaciones gráficas se deben respetar las siguientes normas:

Un convenio bien establecido para todas las prácticas es representar en el eje de abscisas (horizontal) la variable independiente (aquella que elige el experimentador en cada medida), y en el eje de ordenadas (vertical) la variable dependiente (aquella cuyo valor se determina). Se trata de representar el efecto (en el eje vertical) frente a la causa (en el eje horizontal).

c) Identificación de cada eje . Los ejes deben rotularse siempre con el nombre y símbolo de la magnitud representada junto a las unidades en que se expresa. También debe indicarse, en su caso, la potencia de 10 correspondiente, por la que va multiplicada la unidad. De este modo, las divisiones en un eje pueden enumerarse 1, 2, 3,... en lugar de 10.000, 20.000, 30.000,... ó de 0,001, 0,002, 0,003,... etc., si en el eje se indica $\times 10^4$ ó $\times 10^{-3}$, respectivamente. En los ejes se marcarán los valores de las variables representadas, a intervalos regulares, de acuerdo con la escala escogida.

Siempre deben indicarse las magnitudes y las unidades usadas en cada eje.

La selección de la escala utilizada en cada eje debe hacerse de modo que los puntos experimentales no queden todos juntos, repartiéndose sobre todo el área de la figura. Para ello, el origen de la representación no tiene por qué ser el punto (0, 0). Salvo en casos especiales la escala y el origen se tomarán de manera que la curva a representar quede centrada y ocupe la mayor parte de éste. De otra parte, además de utilizar una escala lineal para ambos ejes se puede utilizar una escala logarítmica sobre un eje y lineal sobre el otro o una escala logarítmica sobre ambos ejes.

Las etiquetas de los ejes debe ser homogénea y legible.

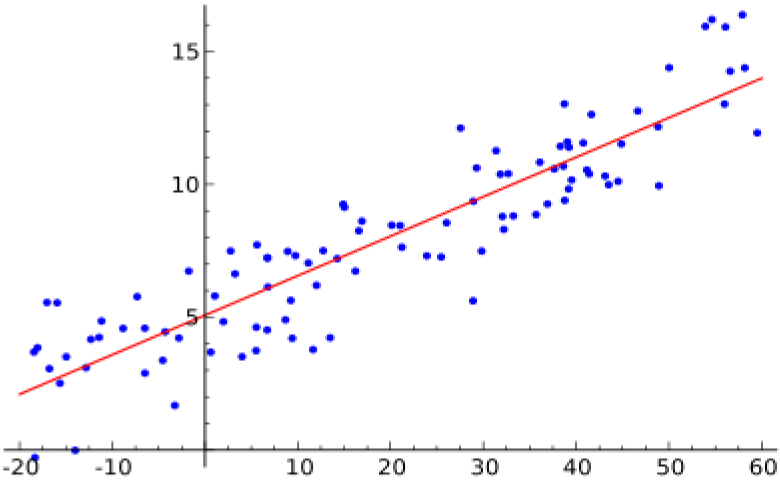
Cada medición se representa por un punto (.), un asterisco (*), u otro símbolo parecido. Si existen varias curvas en la misma gráfica con diferentes significados, los puntos de cada una se representan con distintos símbolos y/o en distintos colores.

Asimismo, también se representa directamente en la gráfica la incertidumbre de las coordenadas del punto trazando un segmento vertical y otro horizontal de forma que las distancias del punto a los extremos de dichos segmentos sean las incertidumbres absolutas de las coordenadas .

Una vez representada las mediciones, en ciertas ocasiones interesa unir los puntos por una curva suave (aproximación/ajuste) de forma que pase lo más cerca posible de todos y cada uno de los puntos. Si durante esta operación detectamos que alguna medición condiciona mucho la suavidad de la curva muy posiblemente esa medición no resulta adecuada y se puede prescindir de la misma. No tiene ningún sentido unir los puntos representativos de las mediciones uno a uno.

8.- Ajuste de una recta por mínimos cuadrados

Uno de los tipos más comunes de experimento involucra la medición de varios valores de dos variables diferentes para investigar la relación matemática entre las dos variables.



Si esta relación es lineal, debe existir entonces una relación matemática del tipo:

$$y = m x + n$$

donde x e y representan las magnitudes observadas. Ajustar los datos experimentales a una recta consiste en encontrar los valores de m y n así como la incertidumbre asociada a dichos valores que, en base a algún criterio, dejen los datos próximos a la recta. Uno de los métodos de búsqueda es el de los mínimos cuadrados, mediante el que se determinan m y b imponiendo la condición de que la suma de los cuadrados de las desviaciones de cada valor medido respecto del valor estimado sea mínima.

Si bien la idea que se persigue pudiera no ser muy complicada de plasmar, la derivación y las expresiones resultantes son un tanto farragosas de escribir y de utilizar caso de que se quisiera calcular manualmente. Existen numerosos tratados de Introducción a la estadística donde se explica esto[19]. Os recomiendo utilizar directamente la herramienta que traen las hojas de cálculo (Excel, OpenOffice, etc) para calcular ésta. Normalmente, todos estos programas proporcionan los valores de m, n, la bondad del ajuste y otros ajustes (funciones logarítmica, exponencial, …); si se quiere incertidumbre de dichos parámetros, posibilidad de tener en dicho ajuste presente la incertidumbre de cada uno de los datos, probar otros métodos de ajuste, etc os recomiendo SciDAVis (http://scidavis.sourceforge.net/, software GNU) o MicrocalOrigin.

19 Ver las entradas en Wikipedia "Linear regression" (http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_regression) o "Least squares".(http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares)

9.- Bibliografía

Ambler Thompson and Barry N. Taylor, (2008), *Guide for the Use of the International System of Units (SI)*, (Special publication 811), Gaithersburg, MD: National Institute of Standards and Technology, section 6.1.2

Boletín Oficial del Estado (España) - Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, por el que se establecen las unidades legales de medida. BOE Núm. 18, jueves 21 de enero de 2010. Sec. I pgs. 5607-5618

Boletín Oficial del Estado (España) - Corrección de errores y erratas del Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, por el que se establecen las unidades legales de medida.

Colaboradores de Wikipedia. *Metrología* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2012 [fecha de consulta: 27 de junio del 2012]. Disponible en <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Metrolog%C3%ADa&oldid=56868507>.

Colaboradores de Wikipedia. *Propagación de errores* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2010 [fecha de consulta: 27 de junio del 2012]. Disponible en <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Propagaci%C3%B3n_de_errores&oldid=39544295>.

Evaluación de datos de medición — Guía para la expresión de la incertidumbre de medida . EDICIÓN DIGITAL 1 en español (traducción 1a ed. Sept. 2008) . Primera edición Septiembre 2008 (original en inglés) . Centro Español de Metrología .

John R. Taylor, An Introduction to Error Analysis, 2a Ed. University Science Books, Sausalito, CA, USA, 1997)

« NIST Guide to SI Units — Rules and Style Conventions». National Institute of Standards and Technology (July 2008). Consultado el 29 de diciembre de 2009.

The International System of Units (SI) (8 edición). International Bureau of Weights and Measures (BIPM). 2006. p. 133.

Wikipedia contributors. Least squares [Internet]. Wikipedia, The Free Encyclopedia; 2012 May 21, 16:56 UTC [cited 2012 Jun 28]. Available from: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Least_squares&oldid=493685622.

Wikipedia contributors. Linear regression [Internet]. Wikipedia, The Free Encyclopedia; 2012 Jun 5, 02:20 UTC [cited 2012 Jun 28]. Available from: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Linear_regression&oldid=496046154.

Tratamiento de datos fisicos. Luis Miguel Varela Cabo, Faustino Gómez Rodríguez, Jesús Carrete Montaña. Universidade de Santiago de Compostela, 2010, isbn 9788498873801

Apéndice A: Glosario de términos utilizados en estas notas

La utilización del paréntesis en torno a ciertas palabras de algunos términos significa que dichas palabras pueden ser omitidas, si ello no crea confusión.

Magnitud (mensurable) : atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia, que es susceptible de ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente .

Sistema de unidades (de medición): conjunto de unidades básicas, junto con unidades derivadas, definidas de acuerdo con reglas dadas, para un sistema de cantidades dado. Valor (de una magnitud) : expresión cuantitativa de una magnitud particular, generalmente en forma de una unidad de medida multiplicada por un número .

Unidad (de medición): cantidad particular, definida y adoptada por convención, con la cual otras cantidades de la misma clase se comparan con el fin de expresar sus magnitudes relativas a esa cantidad.

Valor verdadero (de una magnitud) : valor en consistencia con la definición de una magnitud particular dada .

Valor convencionalmente verdadero (de una magnitud) : valor atribuido a una magnitud particular y aceptado, a veces por convenio, como teniendo una incertidumbre apropiada para un uso dado .

Medición : conjunto de operaciones que tienen por finalidad determinar un valor de una magnitud .

Principio de medida : base científica de una medición .

Método de medida : sucesión lógica de operaciones, descritas de una forma genérica, utilizadas en la ejecución de las mediciones .

Indicación (de un instrumento de medición): valor de una cantidad ofrecido por un instrumento de medición.

Procedimiento de medida : conjunto de operaciones, descritas de forma específica, utilizadas en la ejecución de mediciones particulares, conforme a un método dado .

Mensurando : magnitud particular sometida a medición .

Magnitud de influencia : magnitud que no es el mensurando, pero que tiene un efecto sobre el resultado de la medición .

Resultado de una medición : valor atribuido a un mensurando, obtenido por medición .

Resultado sin corregir : resultado de una medición, antes de la corrección del error sistemático .

Resultado corregido : resultado de una medición, después de la corrección del error sistemático .

Exactitud de medida : grado de concordancia entre el resultado de una medición y un valor verdadero del mensurando .

Repetibilidad (de los resultados de las mediciones) : grado de concordancia entre resultados de sucesivas mediciones del mismo mensurando, realizadas bajo las mismas condiciones de medida

Reproducibilidad (de los resultados de las mediciones) : grado de concordancia entre los resultados de las mediciones del mismo mensurando, realizadas bajo diferentes condiciones de medida .

Incertidumbre (de medida) : parámetro, asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían razonablemente ser atribuidos al mensurando.

Error (de medida) : resultado de una medición menos un valor verdadero del mensurando error relativo relación entre el error de medida y un valor verdadero del mensurando .

Error aleatorio : resultado de una medición menos la media de un número infinito de mediciones del mismo mensurando, efectuadas bajo condiciones de repetibilidad .

Error sistemático : media que resultaría de un número infinito de mediciones del mismo mensurando efectuadas bajo condiciones de repetibilidad, menos un valor verdadero del mensurando .

Corrección : valor sumado algebraicamente al resultado sin corregir de una medición, para compensar un error sistemático .

Factor de corrección : factor numérico por el que se multiplica el resultado sin corregir de una medición para compensar un error sistemático .

Apéndice B. Informe de laboratorio: consideraciones sobre la elaboración.

Título de la práctica

Autores

Laboratorio de Física II, Departamento de Física,

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial, Universidad de Málaga

Brevemente debe resumirse la experiencia realizada: el objetivo del trabajo (no se escriben ecuaciones), lo que se midió, qué tipo de instrumentos y material se usó, y los resultados hallados (sin llegar a presentar tablas o gráficas). Hacer esto en no más 200-300 palabras o unos diez renglones. La escritura del resumen es importante porque, con él, en un artículo científico un lector decide si la lectura del resto del informe le será útil o no.

I. INTRODUCCIÓN

Debe contener una descripción general de la experiencia, comentando los aspectos mas relevantes que lo relacionan con la teoría. La introducción no debe ser muy extensa. Se puede plantear una introducción que englobe los dos siguientes epígrafes.

Objetivos

Cuando los objetivos, generales o específicos, no son mencionados en la introducción, se pueden enumerar en una sección aparte.

Fundamento teórico

En esta sección se escribirá la teoría necesaria para describir los resultados o realizar predicciones. La teoría que se incluya debe ser suficiente para entender el resto del informe y no contener información que no se utilizará más adelante. Por tanto, este aspecto debe ser descrito con detalle (normalmente se indica en los guiones de prácticas).

Deben plantearse las ecuaciones y enunciarse los principios básicos relacionados con la experiencia de laboratorio de que se trate. Cada vez que se escriba una ecuación es preciso dar el significado de cada uno de los símbolos que aparecen por primera vez en el escrito. Las ecuaciones deben ser enumeradas en orden correlativo. Ver informe modelo.

II. EQUIPOS, INSTRUMENTOS, DATOS y METODOLOGÍA

Debe mencionarse las principales características de los equipos y del material utilizado (resolución, rango de medida, posibles anomalías observadas ...). En un artículo científico o informe técnico normalmente no se realizan listas de material, y por tanto, aquí tampoco se utilizarán.

Describir el procedimiento experimental usado y todas las incidencias que puedan tener algún tipo de repercusión. La idea es asesorar a un lector que quiera reproducir el experimento como debe proceder: indicar que se midió en el experimento (variables independientes y las dependientes), mencionar cuántas veces se midió cada una de las variables, que precauciones y medidas de seguridad se siguieron.

Por último presentarlas mediciones realizadas con sus incertidumbres y unidades. Explicar el tratamiento que se dará a los datos obtenidos (cálculo de medias y desviaciones típicas, ajuste de una curva a los datos, discriminación de observaciones claramente defectuosas (establecer criterios objetivos). Debe explicarse cómo se calculan las incertidumbres propias del trabajo experimental, pero no deben transformarse en el centro del trabajo. Cualquier derivada parcial de una función no tiene mayor interés que el de evaluarse numéricamente con los datos medidos para arrojar un valor que da idea de la sensibilidad …. si se necesita se puede llevar esta información al final, en un apéndice, respetando la secuencia de lectura lógica del trabajo.

III. RESULTADOS Y ANALISIS

Los resultados deben ser redactados de forma clara. Recordar que las mediciones se escriben con el número de cifras significativas y un formato correcto (unidades). Para ello las gráficas ayudan a presentar la información. No duplicar la información, esto es, si se utilizan tablas no repetir esta información en una gráfica y/o viceversa. El análisis, apoyado por las observaciones (figuras/tablas) y por la teoría, debe ser lo mas exhaustivo posible. Cada figura/tabla debe tener un número que la identifique y un pie que ayude a entender lo que representa/contiene. Los ejes deben ser etiquetados y deben contener las unidades. Ver informe modelo.

IV. DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Esta parte es una de las más importantes, pues es aquí donde se interpretan los resultados del experimento y se concluye el trabajo.

Se comparan los resultados con lo que se esperaba teóricamente, con datos de valores aceptados (convencionalmente reales) tomados de tablas o textos, o contrastando los diferentes valores que dan los diferentes procedimientos utilizados dentro de la misma práctica. La comparación debe tener muy presente el intervalo de incertidumbre, la precisión de las medidas, el error del ... Cuando los resultados no son los esperados existe una cierta tentación de manipularlos para forzar lo que se espera; este tema es muy común en la investigación y la línea que separa una buena práctica científica en el reprocesamiento de los datos de un falseamiento interesado de la información a veces resulta sutil (normalmente detrás de un trabajo de laboratorio existen intereses económicos y académicos que presionan sobre los resultados obtenidos). Normalmente la explicación de por qué esos valores y no otros ofrecen una comprensión más profunda y oportunidades para lucir la tarea realizada. Se debe pensar que la mera repetición de algo que ha dicho o hecho otro normalmente resta importancia al acto en sí.

En la parte de las conclusiones se debe indicar si se cumplieron los objetivos planteados originalmente, relacionadas ya sea con los objetivos generales o con los objetivos específicos. También pueden enunciarse aquellas conclusiones que no estén directamente relacionadas con los objetivos generales y/o específicos indicando, por ejemplo, si el procedimiento experimental es el más apropiado para alcanzar dichos objetivos, o si existen propuestas para realizarlo mejor. No hay una extensión determinada.

V. BIBLIOGRAFÍA

Un aspecto importante son las referencias bibliográficas. Deben aparecer citados los textos, apuntes, artículos o direcciones electrónicas que hayan sido usadas en la elaboración de este informe. Utilizar una uniformidad en las citas. Para ello, prestad atención en como éstas citas se realizan en libros y artículos.

Normalmente, el formato de un libro es: Autor, título del libro (editorial, ciudad de publicación, año de publicación), páginas consultadas. El formato de un artículo es: Autor, título del artículo, nombre de la revista, volumen, (año), páginas.

Nota: el trabajo no se valora al peso sino por el contenido, el formato y la coherencia interna de todo el proceso. La reflexión resulta un elemento clave para todo este desarrollo.

Apéndice C: Tabla t de Student

Valor de t(υ) de la distribución t de Student, para υ grados de libertad, que multiplicada por la incertidumbre combinada y restada y sumada al estimador de la medida proporciona un intervalo $[\bar{x} - t(\upsilon)\, u_c(\bar{x})\ ,\ \bar{x} + t(\upsilon)\, u_c(\bar{x})]$ en donde se tiene una confianza *p* de encontrar un valor razonable del mensurando.

Grados de libertad	**Fracción *p* (%)**					
ν	**68,27** [a)]	**90**	**95**	**95,45** [a)]	**99**	**99,73** [a)]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

(a) Para una magnitud x descrita por una distribución normal de esperanza matemática μ_x y desviación típica σ_x, el intervalo $\mu_x \pm k\sigma$ comprende respectivamente las fracciones p = 68,27 %; 95,45 % y 99,73 % de la distribución, para los valores k = 1, 2 y 3.