Ampliación de Cálculo

Año: 2012

Ejercicios. Tema 6.

Pablo Alberca Bjerregaard

Integral doble y Teorema de Green

Ejercicio 1 *Se fotografía una piscina de base el cuadrado* $[-2,2]\times[-2,2]$ *con oleaje y resulta la gráfica de la Figura* **??**. *Métodos de análisis gráfico proporcionan la ecuación de la superficie que resulta ser*

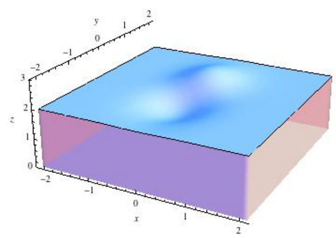

Figura 1: Piscina del Ejercicio **??**.

$z = 2 + ye^{-3x^2-y^2}$. *Calcule el volumen total de la piscina.*

Ejercicio 2 *Calcule el área de la región plana encerrada por:*

a) La lemniscata $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $a > 0$.

b) La cardioide $\rho = 5(1+\cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

c) El astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

d) La rosácea de 5 pétalos $\rho = a\,\mathrm{sen}(5\theta)$, $\theta \in [0,\pi]$.

Ejercicio 3 *Calcule el volumen de las regiones sólidas limitadas por:*

a) La esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ *y el cilindro* $x^2+y^2 = x$, $z \geq 0$, *conocida como Bóveda de Viviani.*

b) Los cilindros $x^2+y^2 = 1$ *y* $x^2+z^2 = 1$.

c) La semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 8$, $z \geq 0$, *y el interior del cono* $z^2 = 3x^2+3y^2$, *(trompo o helado).*

Ejercicio 4 *Mediante un cambio de variable adecuado, calcule la integral doble* $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$ *donde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 2\}$.

Ejercicio 5 *En el recinto* $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, *determine las integrales impropias*

$$\iint_R \frac{2xy}{x^2+y^2}dxdy, \quad \iint_R \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy, \quad \iint_R \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy.$$

Utilice el cálculo de la integral doble impropia $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy$ *para demostrar la igualdad*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ejercicio 6 *Compruebe la igualdad del Teorema de Green con el campo vectorial* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por* $F(x, y) = (3x^2y, -x^3)$ *y* D *la región plana comprendida entre la parábola* $y = x^2$ *y la recta* $y = 1$.

Ejercicio 7 *Calcule, mediante integrales de línea, el área de la región plana limitada por*

a) *La elipse de semiejes* a *y* b.

b) *La circunferencia de centro* (a, b) *y radio* r.

c) *La cicloide* $\Gamma \equiv \gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ *y el eje* OX*, con* $t \in [0, 6\pi]$.

d) *El astroide* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

e) *El ocho* $x^4 = x^2 - y^2$*, parametrizado por* $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 8 *Calcule, utilizando coordenadas polares y utilizando el Teorema de Green, el volumen de la región sólida limitada por las ecuaciones*

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1, \; x^2 + y^2 = z, \; z \geq 0.$$

Ejercicio 9 *Calcule la integral de línea*

$$I = \int_\Gamma (e^{x^2} + 2y^2)dx + (\cos y^2 + x)dy$$

donde Γ *es el contorno cerrado de la Figura* **??** *orientado positivamente, y donde los arcos lo son de circunferencias de radios* 2 *y* 4 *respectivamente, y centradas ambas en el origen de coordenadas.*

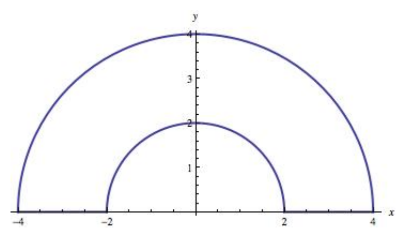

Figura 2: Contorno del Ejercicio **??**.

Ejercicio 10 *Compruebe la validez del Teorema de Green para la región plana* R *limitada por las circunferencias de centro el origen y radio, respectivamente, 2 y 4, y para el campo vectorial* $F(x, y) = (y, -x)$.