Ampliación de Cálculo

Año: 2012

Ejercicios. Tema 7.

Pablo Alberca Bjerregaard

Integral de superficie

Ejercicio 1 *La curva conocida como "bruja de Agnesi" tiene por ecuación* $\Upsilon \equiv y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}, a > 0$, *y es tangente a cierta circunferencia (Figura* **??***).*

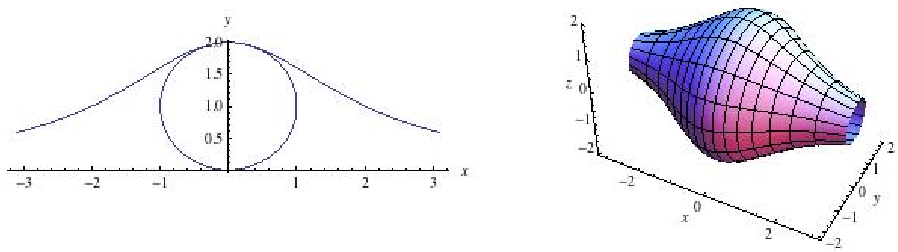

Figura 1: Curva "bruja de Agnesi" y superficie de revolución.

a. *Parametrice dicha curva usando* $x(t) = a\tan t$, $t \in [-1,1]$, *así como la superficie* S *que se obtiene al girar la curva alrededor del eje* X *(Figura* **??***).*

c. *Demuestre, usando la parametrización obtenida, que el área de la superficie de revolución anterior viene dada por* $A = 2\pi a^2 \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+4\cos^6 t \,\mathrm{sen}^2\, t}\, dt$.

Ejercicio 2 *Calcule el área de*

i) *La porción del paraboloide* $z = x^2+y^2$ *que se encuentra por debajo del plano* $z = 10$.

ii) *Las paredes y el techo de la bóveda de Viviani limitada por la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 1$ *y el cilindro* $x^2+y^2 = x$, $z \geq 0$.

iii) *La porción del cono* $z^2 = x^2+y^2$ *interior al cilindro* $x^2+y^2 = ax$, $z \geq 0$.

iv) *La porción del cono* $x^2+y^2 = 3z^2$ *interior al cilindro* $x^2+y^2 = 4y$.

v) *La región sólida limitada por los cilindros* $x^2+y^2 = 1$ *y* $x^2+z^2 = 1$.

vi) *La porción de la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 16$ *exterior al paraboloide* $x^2+y^2+z = 16$.

vii) *La región sólida limitada por* $y^2+z^2 = 4(x+9)$ *e* $y^2+z^2 = -6(x-6)$.

viii) *La porción de la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 9$ *en el primer octante limitada por los planos* $z = 1$, $z = 2$, $y = x$ *e* $y = 5x$.

Ejercicio 3 *Calcule la integral de superficie* $\displaystyle\iint_S \rho(x,y,z)dS$ *en los siguientes casos*

a) $\rho(x,y,z) = 4$ *con* $S = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$.

b) $\rho(x,y,z) = x^2y$ *con* S *la porción del plano* $x+y+z = 1$ *situado en el primer octante.*

c) $\rho(x,y,z) = 2x+y$ *con* S *el cilindro* $x^2+y^2 = 2$, $-1 \leq z \leq 1$.

d) $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ *con* S *la esfera centrada en el origen de radio* r.

e) $\rho(x,y,z) = \sqrt{z-9+5x^2+5y^2}$ *con* S *la porción del paraboloide* $z = 10-x^2-y^2$ *comprendida entre los planos* $z = 0$ *y* $z = 5$.

Ejercicio 4 *Calcule el flujo del campo vectorial* $F(x,y,z) = (x,y,z)$ *a través del toro parametrizado por* $T \equiv r(u,v) = ((4+\cos v)\cos u, (4+\cos v)\operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v)$, $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

Ejercicio 5 *Calcule el flujo del campo vectorial* $F(x,y,z) = (x,y,z)$ *a través de la superficie limitada por* $x^2+z^2 = y^2$ *y* $x^2+z^2+y = 6$, *con* $y \geq 0$.

Ejercicio 6

a) Verifique la igualdad del Teorema de Stokes calculando el flujo del rotacional del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (y-2x, yz^2, -y^2z)$$

sobre la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$.

b) Usando el apartado anterior, justifique que el flujo del rotacional de F *sobre el paraboloide* $z = 1-x^2-y^2$, $z \geq 0$, *es* $-\pi$, *sin realizar explícitamente los cálculos.*

Ejercicio 7 *Verifique la igualdad del Teorema de Stokes con el campo vectorial*

$$F(x,y,z) = (x^2, xy, z^2)$$

y la superficie plana $x+y+z = 1$ *que está dentro del cilindro* $x^2+y^2 = 2$.

Ejercicio 8 *Calcule la integral* $\iint_S \nabla \times F \cdot dS$ *donde*

$$F(x,y,z) = (y^2\cos(xz), x^3e^{yz}, -e^{-xyz})$$

y S *es la porción de la esfera* $x^2+y^2+(z-2)^2 = 8$ *que descansa sobre el plano* XY *(Figura* **??***).*

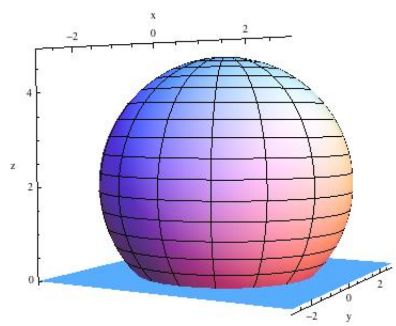

Figura 2: Una porción de la esfera $x^2+y^2+(z-2)^2 = 8$.

Ejercicio 9 *Use el Teorema de Stokes para calcular el flujo del campo vectorial* $F(x,y,z) = (1,0,0)$ *a través del trozo de paraboloide* $z = 4-x^2-y^2$ *limitado por los planos* $z = 0$ *y* $z = 2$.

Ejercicio 10 *A partir de un trozo de arco de lemniscata de Gerono, se puede obtener la superficie de revolución (un globo) de la Figura* **??***, que parametrizamos mediante*

$$\Phi(t,\theta) = (\cos t \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\theta, \cos t \operatorname{sen} t \cos\theta, 2\operatorname{sen} t),\ \theta \in [0,2\pi],\ t \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (1)$$

a) Sabiendo que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad y \quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad (2)$$

calcule el valor de

$$\iint_S \nabla \times F \cdot n_{ext} dS, \quad (3)$$

donde

$$F(x,y,z) = (-x^2y, \cos(yz^3), ze^{x+z}). \quad (4)$$

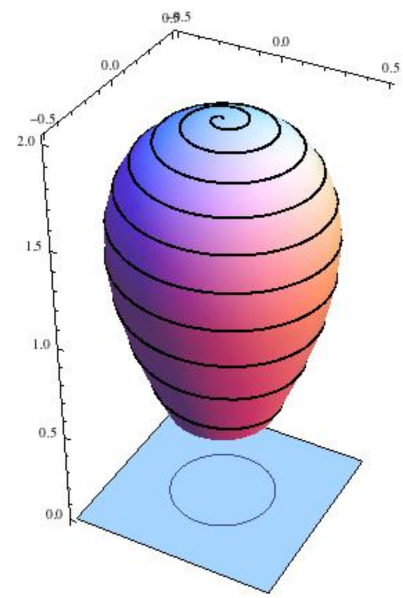

Figura 3: Un globo y la trayectoria de una gota.

b) Una gota de agua parte del techo del globo y describe la trayectoria de la Figura **??** *hasta finalizar en el borde inferior. Dicha trayectoria puede parametrizarse en* $4\pi \le t \le 24\pi$ *mediante*

$$\Gamma \equiv \gamma(t) = \left(\cos\frac{t}{48}\operatorname{sen}\frac{t}{48}\operatorname{sen} t, \cos\frac{t}{48}\operatorname{sen}\frac{t}{48}\cos t, 2\operatorname{sen}\frac{t}{48}\right). \tag{5}$$

Utilizando las razones trigonométricas del apartado anterior, determine el valor de $\int_\Gamma G \cdot d\gamma$*, donde*

$$G(x, y, z) = (e^{xyz} + \cos(xyz))(yz, xz, xy). \tag{6}$$