Ampliación de Cálculo

Año: 2012

Ejercicios. Tema 8.

Pablo Alberca Bjerregaard

Integral triple y Teorema de Gauss

Ejercicio 1 *Calcule el volumen de los cuerpos sólidos:*

a) Tetraedro limitado por el plano $x + y + z = 2$ *y los planos coordenados.*

b) Esfera de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \ r > 0.$$

c) Elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \ a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ejercicio 2 *El toro sólido* $\mathcal{T}$ *puede parametrizarse por*

$$\mathcal{T} \equiv T_{r,s}(\alpha, \beta, \rho) = ((s + \rho \cos \alpha) \cos \beta, (s + \rho \cos \alpha) \operatorname{sen} \beta, \rho \operatorname{sen} \alpha) \tag{1}$$

con $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ *y* $\rho \in [0, r]$. *Utilizando el Teorema del cambio de variable, calcule el volumen de dicho toro.*

Ejercicio 3 *Determine el volumen de la región sólida* Ω *en los siguientes casos*

a) Acotada lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, *superiormente por el cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e inferiormente por el plano* $z = 0$.

b) Limitada por los conos $z^2 = x^2 + y^2$ *y* $3z^2 = x^2 + y^2$ *y bajo la semiesfera* $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Ejercicio 4 *Determine el volumen de la esfera sólida* $x^2 + y^2 + (z - 7)^2 \leq 9$ *interior al paraboloide* $z = x^2 + y^2$.

Ejercicio 5 *Calcule la integral triple impropia*

$$\iiint_R e^{-x^2-y^2-z} dxdydz$$

donde R *es el interior del paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *situado en el primer octante.*

Ejercicio 6 *Compruebe la igualdad del Teorema de Gauss con el campo vectorial* $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ *y la esfera unitaria.*

Ejercicio 7 *Compruebe la igualdad del Teorema de Gauss con el campo vectorial* $F(x, y, z) = (z^2, y^2, x^2)$ *y la superficie limitada por el trozo de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *en el primer octante y los planos coordenados.*

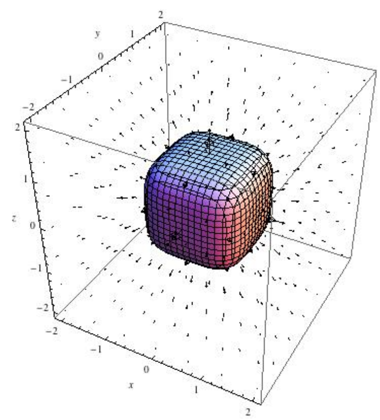

Figura 1: Campo de vectores del campo G del Ejercicio **??** junto con la superficie $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.

Ejercicio 8 *Considere el campo vectorial*[1] G *en* $\mathbb{R}^3$ *dado por*

$$G(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

con $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. *Demuestre que* G *es adivergente y determine el flujo exterior de* G *a través de la superficie de ecuación* $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ *(En la Figura* **??** *puede verse la superficie, así como una representación del campo vectorial* G*).*

Ejercicio 9 *Sea* F *el campo vectorial* $F(x, y, z) = (x, z, 2y)$ *y* S *el cilindro* $(y + 1)^2 + z^2 = 4$, $0 \leq x \leq 4$. *Compruebe la igualdad del Teorema de Gauss.*

Ejercicio 10 *Sea* F *el campo vectorial en* $\mathbb{R}^3$ *dado por* $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ *y* S *el elipsoide de semiejes* a, b *y* c *orientado exteriormente. Demuestre que*

$$\iint_S F \cdot dS = \frac{4}{3}\pi(a(b + c) + bc).$$

[1]Salvo constantes, se trata del campo gravitacional.