Ampliación de Cálculo

Año: 2012

Prueba. Tema 4.

Pablo Alberca Bjerregaard

Transformada de Laplace y de Fourier

Problema 1 *De la solución $x(t)$ de una ecuación diferencial se conoce su transformada de Laplace que resulta ser*

$$X(s) = e^{-2s}\frac{1}{\sqrt{as+b}} + \arctan\frac{4}{s},\ \ s > 0,\ \ a, b > 0. \tag{1}$$

Determine $x(t)$ enunciando todos los resultados y fórmulas que se utilicen.

Problema 2 *Resuelva la ecuación diferencial*

$$y'(x) + y(x) = \begin{cases} 0, & si\ t \notin [1,2], \\ 1, & si\ t \in [1,2]. \end{cases}$$

Problema 3 *Se considera la ecuación diferencial*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t). \tag{2}$$

*a) Sea $y_1(t)$ la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a (**??**) con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e $y_2(t)$ la solución de la misma ecuación diferencial homogénea pero con las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$. Utilizando las identidades*

$$(y * f)'(t) = (y' * f)(t) + y(0)f(t), \quad (y * f)''(t) = (y'' * f)(t) + y'(0)f(t) + y(0)f'(t), \tag{3}$$

demuestre que

$$y(t) = (y_1 * f)(t) + y_2(t) \tag{4}$$

*es solución de la ecuación diferencial (**??**) con $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$.*

b) Aplique el método anterior a la resolución de la ecuación diferencial

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^3e^t,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0. \tag{5}$$

Problema 4 *La corriente $i(t)$ en un circuito en serie RC se puede determinar con la ecuación integral*

$$R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t), \tag{6}$$

donde $E(t)$ es el voltaje aplicado. Halle $i(t)$ para $R = 10\Omega$, $C = 0{,}5f$ y $E(t) = 2(t^2 + t)$.

Problema 5 *Resuelva, con la ayuda de la transformada de Laplace, la EDP*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 - t,\ \ t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u(0,t) &= e^t. \end{aligned} \tag{7}$$

Problema 6 *Resuelva, con la ayuda de la transformada de Laplace, la EDP*

$$\begin{aligned} t\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} &= 1,\ \ t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u(0,t) &= 2. \end{aligned} \tag{8}$$