Ampliación de Cálculo

Año: 2012
Prueba. Tema 5.

Pablo Alberca Bjerregaard

Integral de línea. Potencial

Problema 1 *Sea F el campo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dado por $F(x,y) = -\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Calcule el valor de la integral de línea de F a lo largo de: a). La circunferencia de radio a y centro $(0,0)$ con orientación positiva. b). La recta que une $(0,1)$ con $(1,0)$.*

Problema 2 *Calcule el valor de la integral de línea*

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz, \tag{1}$$

donde C es la curva intersección de las superficies $x^2+y^2=1$ y $x+y+z=1$. Deberá determinar la orientación usada para el cálculo. A la vista del resultado, ¿es conservativo el campo $F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$? Confirme la respuesta con algún resultado teórico.

Problema 3 *Se considera el campo vectorial F en $\mathbb{R}^3 \setminus \{eje\ Y\}$ dado por $F(x,y,z) = \left(-\frac{z}{x^2+z^2}, y, \frac{x}{x^2+z^2}\right)$. Demuestre que se trata de un campo irrotacional. Se consideran las curvas $\Gamma_1 \equiv x^2+z^2=1, y=1$ y $\Gamma_2 \equiv x^2+y^2=1, z=1$. ¿Es posible aventurar si es nula alguna de las integrales $\oint_{\Gamma_1} F\cdot d\gamma$ y $\oint_{\Gamma_2} F\cdot d\gamma$? Realice los cálculos correspondientes que confirmen lo afirmado en el apartado anterior.*

Problema 4 *Dada la lemniscata de Bernoulli de ecuación*

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), a > 0, \tag{2}$$

a) Parametrice dicha curva usando coordenadas polares.

b) Demuestre, usando dicha parametrización, que la longitud l de la lemniscata de Bernoulli viene dada por $l = 2a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sec t}\, dt$.

Problema 5 *Usando la parametrización $x = a \operatorname{sen} t$, $y = a \operatorname{sen} t \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ de la lemniscata de Gerono, demuestre que su longitud es*

$$l = 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{2+\cos(2t)+\cos(4t)}\, dt, \tag{3}$$

cuyo valor numérico aproximado es $6.097\, a$.

Problema 6 *Demuestre que la longitud del arco de la espiral exponencial $\rho = e^\theta$ en $[0, 2\pi]$ es $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$. Véase la Figura* **??**.

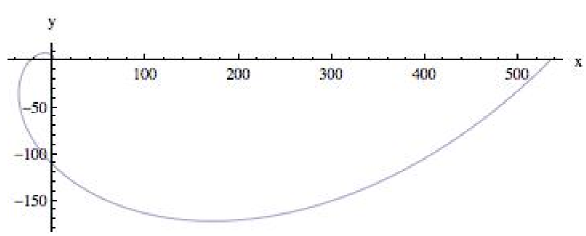

Figura 1: Parte de una espiral exponencial.

Problema 7 *Calcule la longitud de un arco de la cicloide*

$$x(t) = a(t - \operatorname{sen} t),\ y(t) = a(1-\cos t),\ a > 0. \tag{4}$$

Problema 8 *Se considera la curva* Γ, *conocida como espiral esférica, parametrizada por* $\Gamma \equiv \gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = r(\cos(mt)\cos t, \operatorname{sen}(mt)\cos t, \operatorname{sen} t)$, $r > 0$.

a) Demuestre que la espiral esférica está contenida en la superficie de la esfera de centro $(0,0,0)$ *y radio* r.

b) Calcule su longitud.

c) Calcule $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot d\gamma$, *donde* $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.