# Matemáticas III
# Tema 1
# Funciones de varias variables. Diferenciabilidad

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

## Campo escalar

Aplicación $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \in N$ , $n > 1$, que a cada vector $\vec{x} \in U$ le hace corresponder el número $f(\vec{x})$. Si $n = 2$ se denomina campo escalar de dos variables y si $n = 3$ se dice de tres variables. El conjunto $U$ es llamado *dominio* del campo escalar.

## Polinomio de varias variables.

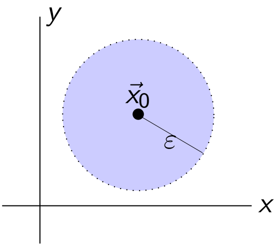
Un *monomio* de dos variables es un campo escalar de dos variables $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $P(x, y) = ax^p y^q$ con $a \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{N}$. El *grado del monomio* anterior es $p + q$. Un polinomio de dos variables es una suma de monomios de dos variables. El *grado del polinomio* es el grado mayor de los monomios que lo conforman. El dominio de un polinomio de dos variables es $U = \mathbb{R}^2$.

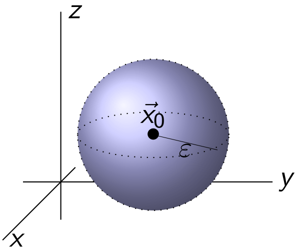
# Topología de $\mathbb{R}^n$

Dado un punto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, llamamos *bola abierta o entorno* de centro $(x_0, y_0)$ de radio $\varepsilon > 0$ al conjunto

$$B(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon\}$$

es decir, los puntos del plano que distan del centro menos de $\varepsilon$.

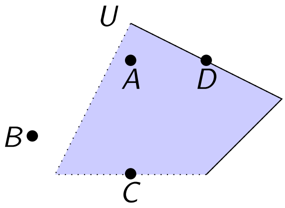



Análogamente se definen bolas abieras o entornos de los puntos de $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

- Se dice que $(x_0, y_0)$ es punto interior a $U$ si existe algún entorno de $(x_0, y_0)$ totalmente contenido en $U$.
- Se dice que $(x_0, y_0)$ es punto exterior a $U$ si existe algún entorno de $(x_0, y_0)$ totalmente contenido en el complementario de $U$.
- Si un punto $(x_0, y_0)$ es punto frontera de $U$ si no es ni interior ni exterior a $U$, es decir, cualquier entorno suyo tiene puntos en $U$ y puntos fuera de $U$.
- Se dice que $(x_0, y_0)$ es punto adherente de $U$ si para cualquier entorno de $(x_0, y_0)$, $B(\vec{x}_0, \varepsilon)$, se cumple que $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$. Es decir, un punto es adherente si es interior de $U$ o es frontera de $U$.




$A$ punto interior, $A \in U$.
$B$ punto exterior, $B \notin U$
$C$ punto frontera, $C \notin U$
$D$ punto frontera, $D \in U$
$A, D, C$ puntos adherentes

Puede haber puntos frontera para los cuales es posible construir un entorno donde el único punto del conjunto sea él mismo, dichos puntos frontera son llamados puntos aislados.

Se supondrá en lo que sigue que los dominios tomados no tienen nunca puntos aislados. Se entiende como interior de **U** al conjunto de sus puntos interiores y como frontera de **U** a sus puntos frontera.

## Interior y adherencia de un conjunto.

- Llamamos interior de $U$, al conjunto de todos sus puntos interiores.

$$\mathring{U} = \{\vec{x} \in U : \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq U\}$$

- Llamamos adherencia de $U$ al conjunto de puntos adherentes de $U$

$$\overline{U} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \text{ para todo } \varepsilon > 0, B(\vec{x}, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset\}$$

## Conjuntos abiertos y cerrados

Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ se denomina **abierto** si ninguno de sus puntos frontera pertenece al conjunto. Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es **cerrado** cuando su frontera está contenida en el conjunto, es decir, un conjunto es cerrado si su complementario en $\mathbb{R}^2$ es abierto. Existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

Además se tienen las siguientes caracterizaciones:

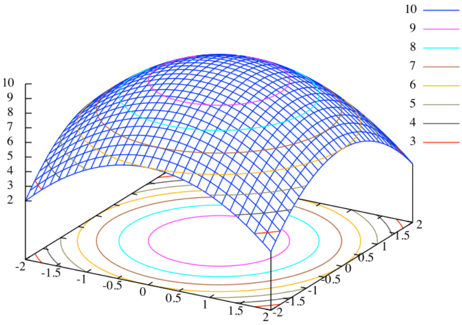
1. Un conjunto $U$ es un conjunto abierto si y solo si $\overset{\circ}{U} = U$.
2. Un conjunto $U$ es un conjunto cerrado si y solo si $\overline{U} = U$.

Consecuentemente, cualquiera que sea $U$ de $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\overset{\circ}{U}$ es siempre abierto y el conjunto $\overline{U}$ es siempre cerrado.

# Gráfica de un campo escalar. Conjunto de nivel

Para el c.e. $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la curva de nivel $k$ es el conjunto

$$\{(x, y) \in U : f(x, y) = k\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$




Los conjuntos de nivel para c.e. de tres variables, se llaman superficies de nivel.

$$\{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = k\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

## Definición

*Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ un campo escalar de dos variables y $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto del interior o de la frontera de $U$. Se dice que $L$ es el límite de $f$ cuando $(x, y)$ tiende a $(x_0, y_0)$,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R},$$

*si para cualquier entorno de $L$ existe un entorno de $(x_0, y_0)$ contenido en $U$ de manera que las imágenes de todos sus puntos están en el entorno dado de $L$.*

Lo podemos interpretar como que al acercarnos a $(x_0, y_0)$ por cualquier trayectoria dentro de $U$ las imágenes de dichos puntos tienden a $L$.
A diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}$, en este caso se tienen infinitas formas de acercarse al punto $(x_0, y_0)$ lo que dificulta la existencia del límite.

# Continuidad de un campo escalar

## Definición

*Se dice que* $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ *es continuo en un punto* $(x_0, y_0) \in U$ *si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

*El campo es continuo en el dominio* $U$ *si es continuo en todos los puntos de* $U$*. Se verifica el mismo álgebra de funciones continuas que en una variable.*

## Ejemplo:

El campo escalar $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ es continua en todos los puntos salvo en el $\vec{x}_0 = (0, 0)$.

# Derivadas parciales

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables y $(x_0, y_0)$ un punto interior a $U$. Se define la derivada parcial de $f$ respecto de la variable $x$ en el punto $(x_0, y_0)$ como

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

cuando el límite anterior existe.

Igualmente se puede definir la derivada parcial de $f$ respecto de la variable $y$ en el punto $(x_0, y_0)$ como

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

cuando el límite anterior existe.

La existencia de las derivadas parciales de $f$ en $(x_0, y_0)$ no garantiza que $f$ sea continua en $(x_0, y_0)$.

## Ejemplo.

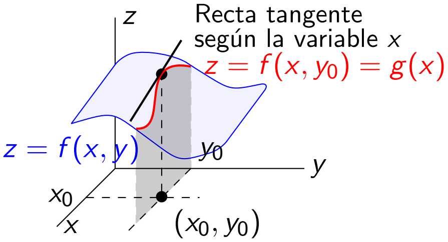
El campo escalar del ejemplo anterior
$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ tiene derivadas parciales en el punto $\vec{x}_0 = (0,0)$. Veamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

luego existen las derivadas parciales $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, sin embargo $f$ no es continua en el punto $(0,0)$, como ya hemos visto.

# Interpretación geométrica de las derivadas parciales.

La curva de ecuaciones $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$ es el resultado de cortar la gráfica de $f$ en el plano $y = y_0$ de $\mathbb{R}^3$. La recta tangente, vista en el espacio, se denomina recta tangente a (la gráfica de) $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ según la variable $x$




La dirección de esta recta tangente es el vector $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$.
Análogamente el vector $(0, 1, f_y(x_0, y_0))$ nos da la dirección de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, y_0)$ según la variable $y$.

# Derivada direccional

Una dirección unitaria en el plano se entiende como un vector del plano $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ con $\|\vec{u}\| = 1$.

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables, $(x_0, y_0)$ punto interior a $U$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ una dirección unitaria. Se define la derivada direccional de f respecto a la dirección unitaria u en el punto $(x_0, y_0)$ como

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h},$$

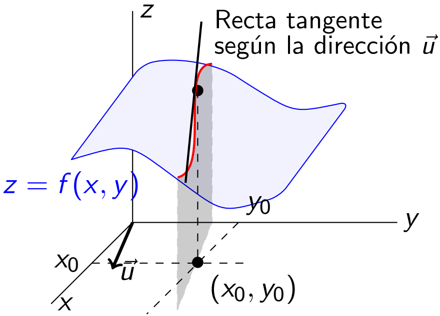
cuando el límite anterior existe.
Las derivadas parciales son casos particulares de derivadas direccionales:

$$f_x(x_0, y_0) = D_{(1,0)}f(x_0, y_0) \text{ y } f_y(x_0, y_0) = D_{(0,1)}f(x_0, y_0).$$

La existencia de todas las derivadas direccionales de $f$ en $(x_0, y_0)$ no garantiza que la función sea continua en $(x_0, y_0)$.

# Interpretación geométrica de la derivada direccional.

La derivada $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ mide la variación del campo escalar $f$ cerca de $(x_0, y_0)$ según los puntos de la recta dada por $(x_0, y_0) + t\vec{u}$. Si se define la función $g(t) = f((x_0, y_0) + t\vec{u})$ entonces $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = g'(0)$.




La dirección tangente a dicha curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es $(u_1, u_2, D_u f(x_0, y_0))$.

# Campo escalar de clase $\mathbf{C}^1$

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $U$ abierto de forma que existe la derivada parcial de $f$ respecto de $x$ en todos los puntos de $U$.
Esta derivada parcial es un nuevo campo escalar $f_x\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que a cada punto $(x, y) \in U$ le hace corresponder $f_x(x, y)$, e igualmente se puede definir la función derivada parcial de $f$ respecto de $y$, $fy$.

Se dice que $f$ es de *clase* $C^1$ *en* $U$ si los campos escalares $f$, $f_x$ y $f_y$ existen y son continuos en $U$.

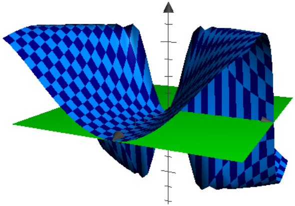
# Plano tangente.

Se define el plano tangente a (la gráfica de) $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ como

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

El plano tangente pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y contiene a las rectas tangentes a (la gráfica de) $f$ según las variables $x$ e $y$.

A veces el plano "tangente", puede no ser una buena aproximación de la gráfica del campo cerca del punto.



# Diferencial de un campo escalar

Sea $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables para el que existe derivadas parciales en punto $(x_0, y_0)$. Se dice que $f$ es diferenciable en $(x_0, y_0)$ punto interior a $U$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)]}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Lo que significa que existe el plano tangente a $f$ en $(x_0, y_0)$ y es una buena aproximación de la superficie $z = f(x,y)$ suficientemente cerca del punto $(x_0, y_0)$.

**Condición suficiente de diferenciabilidad.**

Si $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase $C^1$ en $U$ conjunto abierto, entonces $f$ es diferenciable en todos los puntos de $U$.

Andalucía Tech

# Propiedades de los campos escalares diferenciables.

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $(x_0, y_0)$ punto interior a $U$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. El campo $f$ es continuo en $(x_0, y_0)$.
2. Existen las derivadas parciales de $f$ en $(x_0, y_0)$.
3. El plano tangente a $f$ en $(x_0, y_0)$ aproxima bien a la gráfica del campo escalar cerca del punto.
4. Existen todas las derivadas direccionales de $f$ en $(x_0, y_0)$. Más aún, si la dirección unitaria es $\vec{u} = (u_1, u_2)$ entonces
$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$
5. El plano tangente a $f$ en $(x_0, y_0)$ contiene a las rectas tangentes a f en $(x_0, y_0)$ según cualquier dirección.
6. Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, una curva parametrizada con $c(I) \subseteq U$ y derivable en $t_0 \in I$ tal que $c(t_0) = (x_0, y_0)$. La función $g(t) = f(c(t))$ para todo $t \in I$, es derivable en $t_0$ y su derivada se calcula como
$$g'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0).$$

### Definición

*Si* $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es un campo escalar de dos variables diferenciable en* $(x_0, y_0)$ *punto interior de* $U$*, llamaremos diferencial de* $f$ *en* $(x_0, y_0)$ *a la aplicación lineal*

$$df_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

*definida como* $df_{(x_0,y_0)}(x, y) = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y$*.*

Como cualquier aplicación lineal se puede expresar en forma matricial y, respecto a la base canónica, corresponde a la diferencial de $f$ en $(x_0, y_0)$ una matriz $1 \times 2$ cuyas dos columnas son las derivadas parciales de $f$. Dicha matriz recibe el nombre de **matriz jacobiana** de $f$ en el punto $(x_0, y_0)$, o bien $J(f)(x_0, y_0)$. Por tanto

$$df_{(x_0,y_0)}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J(f)(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se pude expresar de la forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

siendo sus componentes $f_i\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ campos escalares de $n$ variables definidos en $U$.

Dado un punto $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ de $U$, decimos que $F$ es **continuo** en $P_0$ si lo son todas sus componentes, y, si $P$ es del interior de $U$, decimos que $F$ es **diferenciable** en $P_0$ si lo es cada una de sus componentes.

La diferencial de $F$ en el punto $P_0$ será entonces la aplicación lineal $dF_{P_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ representada por la matriz jacobiana de dimensión $m \times n$,

$$dF_{P_0}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

## Campos vectoriales.

Un *campo vectorial* de dos variables es una función $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Si expresamos $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ su diferencial en un punto $(x_0, y_0)$ es la aplicación lineal $dF_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz jacobiana es

$$dF_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

# Gradiente

La diferencial de un campo escalar $f$ puede ser vista como un vector del plano (que cambia en cada punto). En este sentido $df$ puede ser interpretado como un campo vectorial $\nabla f \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido

$$\nabla f(x,y) = df_{(x,y)} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

donde el símbolo $\nabla$ se lee "*nabla*" y el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ se llama gradiente de $f$ en el punto $(x_0, y_0)$ que coincide con la diferencial en dicho punto.

Con esta notación es posible reescribir las siguientes fórmulas:

1. La diferencial se expresa como un producto escalar

$$df_{(x_0,y_0)}(x,y) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x,y)$$

2. Plano tangente a $f$ en $(x_0, y_0)$,

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

3. Derivada direccional de $f$ en $(x_0, y_0)$ para la dirección unitaria $\vec{u}$,

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{u}.$$

# Propiedades geométricas del gradiente.

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $(x_0, y_0)$ punto interior a $U$. El gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ verifica las siguientes propiedades:

1. Propiedad de dirección óptima: la derivada direccional máxima de $f$ en $(x_0, y_0)$ se alcanza para la dirección y sentido del gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, esto es
$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}.$$
Además, el valor de dicha derivada es el módulo del gradiente $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.
2. Propiedad de ortogonalidad: el gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ nos da la dirección ortogonal a la curva de nivel de $f$ que pasa por $(x_0, y_0)$, esto es la curva $f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Todo lo anterior es válido para el gradiente definido sobre campos escalares de tres (y de más) variables.

$$f_{xx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=(f_x)_x(x_0,y_0)$$
$$f_{xy}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=(f_x)_y(x_0,y_0).$$

De igual forma puede hacerse con la derivada parcial de $f$ respecto de y,

$$f_{yx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)=(f_y)_x(x_0,y_0)$$
$$f_{yy}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=(f_y)_y(x_0,y_0).$$

A todas estas parciales, si existen, se les denomina derivadas parciales de segundo orden de $f$ en $(x_0,y_0)$. En particular, a las parciales $f_{xy}(x_0,y_0)$ y $f_{yx}(x_0,y_0)$ se les llama parciales cruzadas.

De la misma forma a las funciones derivadas parciales de segundo orden del campo $f$ se les puede calcular sus derivadas parciales, las cuales se llamarían derivadas parciales de tercer orden, y así sucesivamente.

### Campo escalar de clase $\mathbf{C^n}$

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $U$ conjunto abierto de manera que existan las parciales de segundo orden en todos sus puntos. Se dice que f es de clase $C^2$ en $U$ si $f$, $f_x$, $f_y$, $f_{xx}$,$f_{xy}$, $f_{yx}$ y $f_{yy}$ existen y son continuas en $U$.

De la misma forma se puede decir que el campo escalar $f$ es de clase $C^n$ en el abierto $U$ si $f$ y todas sus parciales hasta el orden $n$ son continuas en $U$. Cuando un campo $f$ tiene infinitas derivadas parciales, todas continuas, se dice que $f$ es de clase $C^\infty$.

# Condición suficiente de igualdad de las parciales cruzadas.

Sea el campo escalar $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $U$ abierto. Si $f$ es de clase $C^2$ en $U$ entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales para todos los puntos de U,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad \forall (x_0, y_0) \in U.$$

*Nota.- Una condición suficiente para la igualdad de las derivadas cruzadas, más general es comocida como* **teorema de Schwartz** *o teorema de Clairaut. Las condiciones en este teorema son tan generales que casi todas las funciones que se usan en la práctica lo verifican (Véase bibliografía).*

# Matriz hessiana de un campo escalar

Sea $f$ un c. e. diferenciable en todos los puntos de $U$ y sea $\nabla f$ el campo vectorial gradiente. Si $\nabla f$ es diferenciable a su vez en $(x_0, y_0)$ entonces se dirá que $f$ es dos veces diferenciable en $(x_0, y_0)$. Esta diferencial es una aplicación lineal

$$d(\nabla f)_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

cuya matriz se le llama **matriz hessiana** (o segunda diferencial) de $f$ en $(x_0, y_0)$

$$H(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Si f es está en las condiciones del teorema de Schwartz (en la práctica, siempre) entonces la matriz hessiana es simétrica en todos los puntos de $U$.

# Regla de la cadena.

Sean $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $G\colon V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ definidas de forma que $F(U) \subseteq V$. La nueva función vectorial $G \circ F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ compuesta de $F$ y $G$.

**Teorema**

*Sean $F$ y $G$ en las condiciones anteriores, siendo $F$ diferenciable en $P_0$ del interior de $U$ y $G$ diferenciable en $Q_0 = F(P_0)$ del interior de $V$. Entonces la función compuesta $G \circ F$ es diferenciable en $P_0$ y además*

$$d(G \circ F)_{P_0} = dG_{Q_0} \circ dF_{P_0}$$

*es decir, la diferencial de la función compuesta es la compuesta de las diferenciales.*

Esto es equivalente a decir que la matriz jacobiana de la función compuesta es el producto de matrices jacobianas de las funciones que la componen (en orden inverso de la composición).

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G \circ F"] & V \arrow[r, "G"] & \mathbb{R}^l \\ P_0 \arrow[r, mapsto, dashed] & Q_0 = F(P_0) \arrow[r, mapsto, dashed] & G(F(P_0)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "dF_{P_0}"] \arrow[rr, bend left, "dG_{Q_0} \circ dF_{P_0}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "dG_{Q_0}"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

# El teorema de la función inversa.

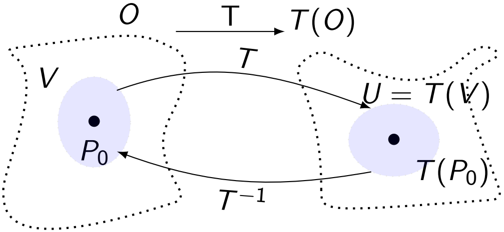
Llamamos transformación en $\mathbb{R}^n$ a una función $T\colon V \subseteq \mathbb{R}^n \to U \subseteq \mathbb{R}^n$.

**Teorema**

*Sea $T$ es una transformación diferenciable en un abierto $O$ con derivadas parciales continuas. Si $P_0 \in O$ verifica que $dT_{P_0}$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, entonces existe un entorno abierto $V$ de $P_0$ tal que $T\colon V \to U = T(V)$ es invertible con inversa $T^{-1}\colon U \to V$ diferenciable. Además*

$$d(T^{-1})_{T(P_0)} = (dT_{P_0})^{-1}$$

En términos de matrices, en las condiciones del teorema, diremos que $T$ es diferenciable en $P_0$ con matriz jacobiana $J(T)(P_0)$ invertible (determinante distinto de cero), entonces $T^{-1}$ es diferenciable en $T(P_0)$ y su matriz jacobiana es la matriz inversa de la anterior.




## Jacobiano.

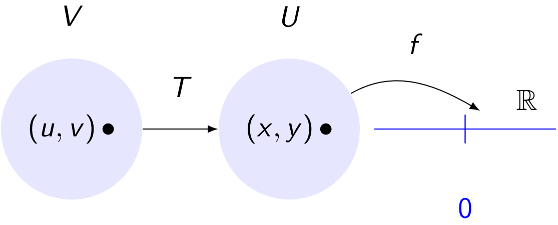
Es el determinante de la matriz jacobiana de una transformación. Según lo anterior, si una transformación es diferenciable (con continuidad) en un punto $P_0$ y su jacobiano $\det J(T)(P_0) \neq 0$ entonces $T$ es invertible en un entorno del punto $P_0$.

En dos coordenadas, si $T(u, v) = (x, y)$ el jacobiano se suele expresar

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(J(T)) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

# Cambios de variables.

Sea $f\colon U \to \mathbb{R}$ es un c. e. diferenciable. Supongamos que existe una transformación $T\colon V \to U$ definida como $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.




Entonces podemos calcular el gradiente de $f$ en las nuevas variables a partir de las antiguas

$$\nabla f(u,v) = d(f \circ T)_{(u,v)} = df_{T(u,v)} \cdot dT_{(u,v)} = \nabla f(x,y) \cdot dT_{(u,v)}$$

En coordenadas tenemos

$$\begin{pmatrix} f_u(u,v) & f_v(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(u,v) = df_{T(u,v)} \cdot dT_{(u,v)} = \nabla f(x,y) \cdot dT_{(u,v)}$$

$$\begin{pmatrix} f_u(u,v) & f_v(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{pmatrix}$$

que se suele expresar:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

En tres variables $(x,y,z) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ tenemos:

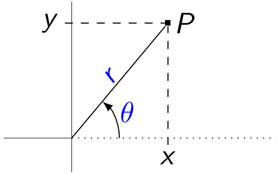
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}$$

El cambio de variables más usado en $\mathbb{R}^2$ es el llamado *cambio a polares*. En los términos antes expresados, la transformación que rige este cambio de variables $T: V \to U$, con $T(r, \theta) = (x, y)$, siendo

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= r\cos\theta \\ y(r,\theta) &= r \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \quad (r > 0 \text{ y } 0 < \theta < 2\pi)$$



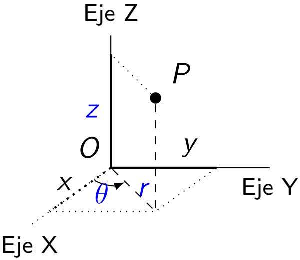

donde $V = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ y $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$ es el abierto del plano que se obtiene al quitar el origen y el semieje $OX$ positivo.
El jacobiano de esta transformación es el siguiente:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

# Coordenadas cilíndricas.

El cambio de variables a polares en el plano se puede generalizar a $\mathbb{R}^3$ sin más que proyectar el punto $P$ sobre el plano $OX$, considerar las coordenadas polares de la proyección t subir por el eje $z$.

$$
\begin{aligned}
x(r,\theta,z) &= r\cos\theta \\
y(r,\theta,z) &= r\operatorname{sen}\theta \\
z(r,\theta,z) &= z \\
\text{con } r > 0, \theta &\in (0,2\pi), z \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$




El jacobiano de la transformación de coordenadas cilíndricas es

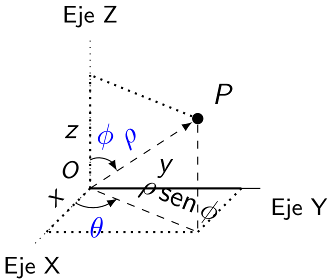
$$
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r
$$

# Coordenadas esféricas.

Un punto del espacio queda identificado con su distancia $\rho$ al origen de coordenadas, el ángulo polar o colatitud $\phi$ y el ángulo acimutal o azimut (también llamado longitud) $\theta$.

$$\begin{aligned} x(\rho,\phi,\theta) &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y(\rho,\phi,\theta) &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z(\rho,\phi,\theta) &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

con $\rho > 0, \phi \in (0,\pi), \theta \in (0,2\pi)$




El jacobiano de la transformación de coordenadas esféricas es

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\phi & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

# Curvas y superficies en forma implícita.

- Una representación implícita de una curva en el plano es una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$.
- Una representación implícita de una superficie en $\mathbb{R}^3$ es una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$.
- La representación implícita de una curva en el espacio se realiza mediante dos ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

En los tres casos es posible que no pueda despejarse, al menos de forma sencilla, las variables necesarias como para escribir dichas curvas y superficies mediante una representación explícita.

## Teorema

*Sea la curva plana* $F(x,y)=0$ *con* $F\colon U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *un campo escalar de clase* $C^n$ *en un abierto* $U$*. Si* $(x_0,y_0)\in U$ *es un punto de la curva, esto es* $F(x_0,y_0)=0$*, y* $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ *entonces es posible expresar* $y$ *en función de* $x$ *en un entorno de* $x_0$*, es decir, existe una función* $y=y(x)$ *verificando que* $F(x,y(x))=0$ *en un entorno de* $x_0$*, de manera que* $y(x_0)=y_0$ *y que* $y(x)$ *es un función de clase* $C^n$ *en dicho entorno.*

### Teorema

*Sea la superficie $F(x, y, z) = 0$ con $F$ un campo escalar de clase $C^n$ en un abierto $U$. Si $(x_0, y_0, z_0) \in U$ es un punto de la superficie y $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces es posible expresar $z$ en función de $x$ e $y$ en un entorno de $(x_0, y_0)$, es decir, existe una función $z = z(x, y)$ verificando que $F(x, y, z(x, y)) = 0$ en un entorno de $(x_0, y_0)$, de manera que $z(x_0, y_0) = z_0$ y que $z(x, y)$ es un campo escalar de clase $C^n$ en dicho entorno.*

### Derivación implícita de una ecuación en el espacio

La derivación implícita consiste en hallar las derivadas parciales de la ecuación $F(x, y, z(x, y)) = 0$ respecto de las dos variables que quedan, lo que lleva a dos ecuaciones donde es posible despejar $z_x(x, y)$ y $z_y(x, y)$. Si nuevamente se derivan estas dos ecuaciones se obtienen parciales de segundo orden y así sucesivamente. Esta derivación sólo es aplicable en un entorno de $(x_0, y_0)$.

## Teorema

*Sea la curva dada por las ecuaciones* $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ *con* $F,G$ *dos c. e. de clase* $C^n$ *en un abierto* $U$*. Si* $(x_0,y_0,z_0)\in U$ *es un punto de la curva y*

$$\begin{vmatrix} F_y(x_0,y_0,z_0) & F_z(x_0,y_0,z_0) \\ G_y(x_0,y_0,z_0) & G_z(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

*entonces es posible expresar las variables* $y$ *y* $z$ *en función de* $x$ *en un entorno de* $x_0$*, es decir, existen dos funciones* $y=y(x)$ *y* $z=z(x)$ *verificando* $F(x,y(x),z(x))=G(x,y(x),z(x))=0$ *en un entorno de* $x_0$*, de manera que* $y(x_0)=y_0$*,* $z(x_0)=z_0$ *y, además, las funciones* $y(x)$ *y* $z(x)$ *son de clase* $C^n$ *en dicho entorno.*

## Derivación implícita de dos ecuaciones en el espacio.

Si las ecuaciones $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ verifican las condiciones del teorema anterior entonces se puede escribir $y=y(x)$ y $z=z(x)$ en un entorno de $x_0$. La derivación implícita consiste en derivar las ecuaciones

$$F(x,y(x),z(x))=0$$
$$G(x,y(x),z(x))=0$$

respecto de la variable que queda, lo que lleva a dos ecuaciones donde es posible despejar $y'(x)$ y $z'(x)$. Si nuevamente se derivan estas dos ecuaciones se obtienen derivadas de segundo orden y así sucesivamente. Estas fórmulas son aplicables sólo en un entorno de $x_0$.

OCW UMA

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

2014.