Matemáticas III
Tema 1
Funciones de varias variables. Diferenciabilidad

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

Contenido

1 Campos escalares **2**
1.1 Definiciones 2
1.2 Topología de $\mathbb{R}^n$ 2
1.3 Gráfica de un campo escalar. Conjunto de nivel 4

2 Límites y continuidad **5**
2.1 Límite de un campo escalar en un punto 5
2.2 Continuidad de un campo escalar 6

3 Derivadas parciales y derivadas direccionales **6**
3.1 Derivadas parciales 6
3.2 Derivada direccional 7
3.3 Campo escalar de clase $\mathbf{C^1}$ 8

4 Diferenciabilidad **8**
4.1 Diferencial de un campo escalar 9
4.2 Diferencial de funciones vectoriales 11
4.3 Gradiente 11

5 Derivadas parciales de orden superior **12**
5.1 Derivadas de segundo orden 12
5.2 Matriz hessiana de un campo escalar 13
5.3 Regla de la cadena. Teorema de la función inversa. Cambios de variables 13

6 Derivación implícita y teorema de la función implícita **17**
6.1 Teorema de la función implícita para una curva en el plano. 17
6.2 Teorema de la función implícita para una superficie en el espacio 18
6.3 Teorema de la función implícita para una curva en el espacio 18

1 Campos escalares

1.1 Definiciones

Un campo escalar es una aplicación $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \in N\,, n > 1$, que a cada vector $\vec{x} \in U$ le hace corresponder el número $f(\vec{x})$. Si $n = 2$ se denomina campo escalar de dos variables y si $n = 3$ se dice de tres variables. El conjunto U es llamado *dominio* del campo escalar.

En lo que sigue se estudiarán preferentemente campos escalares de dos o tres variables, siendo similar su estudio para valores de n mayores. Normalmente se enuncian conceptos y resultados en dos variables, particularizando para tres variables cuando exista alguna diferencia notable.

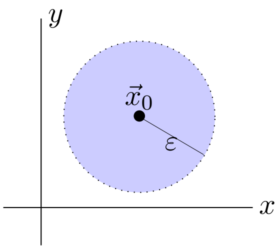
Polinomio de varias variables. Un *monomio* de dos variables es un campo escalar de dos variables $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $P(x, y) = ax^p y^q$ con $a \in \mathbb{R}$ y $p, q \in \mathbb{N}$. El *grado del monomio* anterior es $p + q$. Un polinomio de dos variables es una suma de monomios de dos variables. El *grado del polinomio* es el grado mayor de los monomios que lo conforman. El dominio de un polinomio de dos variables es $U = \mathbb{R}^2$.

1.2 Topología de $\mathbb{R}^n$

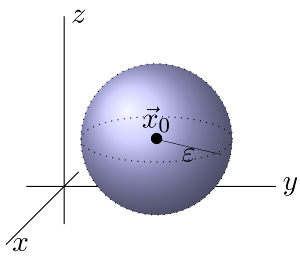
Dado un punto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, llamamos *bola abierta o entorno* de centro (x_0, y_0) de radio $\varepsilon > 0$ al conjunto

$$B(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon\}$$

es decir, los puntos del plano que distan del centro menos de ε.



(a) Entorno en $\mathbb{R}^2$

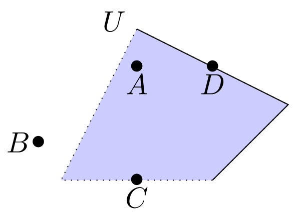


(b) Entorno en $\mathbb{R}^3$

Análogamente se definen bolas abieras o entornos de los puntos de $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

- Se dice que (x_0, y_0) es **punto interior** a U si existe algún entorno de (x_0, y_0) totalmente contenido en U.
- Se dice que (x_0, y_0) es **punto exterior** a U si existe algún entorno de (x_0, y_0) totalmente contenido en el complementario de U.
- Si un punto (x_0, y_0) es **punto frontera** de U si no es ni interior ni exterior a U, es decir, cualquier entorno suyo tiene puntos en U y puntos fuera de U.
- Se dice que (x_0, y_0) es **punto adherente** de U si para cualquier entorno de (x_0, y_0), $B(\vec{x}_0, \varepsilon)$, se cumple que $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$. Es decir, un punto es adherente si es interior de U o es frontera de U.



A punto interior, $A \in U$.
B punto exterior, $B \notin U$
C punto frontera, $C \notin U$
D punto frontera, $D \in U$
A, C, D son puntos adherentes

Los puntos interiores de U pertenecen siempre a U, los exteriores nunca pertenecen a U y los puntos frontera pueden pertenecer o no. Puede haber puntos frontera para los cuales es posible construir un entorno donde el único punto del conjunto sea él mismo, dichos puntos frontera son llamados **puntos aislados**.

Interior de un conjunto. Si U es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$, llamamos *interior* de U, designado por $\mathring{U}$, al conjunto de todos los puntos interiores de U. Es decir

$$\mathring{U} = \{\vec{x} \in U : \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq U\}$$

Por convenio establecemos que $\mathring{\emptyset} = \emptyset$.

Propiedades del interior de un conjunto. Si A, B son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathring{A} \subseteq A$ y $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$
2. Si $A \subseteq B$, entonces $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$
3. $\overset{\circ}{A \cup B} \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$
4. $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Adherencia de un conjunto. Llamamos *adherencia* de un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ al conjunto de puntos adherentes de U y lo designamos como $\overline{U}$.

$$\overline{U} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \text{ para todo } \varepsilon > 0, B(\vec{x}, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset\}$$

Se conviene que $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Propiedades de la adherencia de un conjunto. Si A, B son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq \overline{A}$ y $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Frontera de un conjunto. Si U es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ llamamos *frontera* de U al conjunto de puntos que son frontera de U y lo denotamos por ∂U.

Claramente se tiene que ∂U es un conjunto cerrado y que $\partial U = U - \mathring{U}$.

1.2.1 Conjuntos abiertos y cerrados

Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ se denomina **abierto** si ninguno de sus puntos frontera pertenece al conjunto. Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es **cerrado** cuando su frontera está contenida en el conjunto, es decir, un conjunto es cerrado si su complementario en $\mathbb{R}^2$ es abierto. Existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

Además se tienen las siguientes caracterizaciones:

1. Un conjunto U es un conjunto abierto si y solo si $\mathring{U} = U$.
2. Un conjunto U es un conjunto cerrado si y solo si $\overline{U} = U$.

Consecuentemente, cualquiera que sea U de $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\mathring{U}$ es siempre abierto y el conjunto $\overline{U}$ es siempre cerrado.

1.3 Gráfica de un campo escalar. Conjunto de nivel

Sea el campo escalar de dos variables $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La *gráfica* de f es el conjunto de $\mathbb{R}^3$ generado por la ecuación $z = f(x, y)$ para los puntos de U, es decir

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}$$

cuya representación corresponde a una superficie. La gráfica de campos escalares de mayor número de variables puede definirse pero no podría ser representada puesto que discurriría en más de tres dimensiones.

Para el campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la *curva de nivel* k es el conjunto de puntos del dominio U cuya imagen por f es k, esto es

$$\{(x, y) \in U : f(x, y) = k\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Este conjunto corresponde a la gráfica de la curva $f(x, y) = k$, o lo que es lo mismo a la proyección en el plano OXY de la curva de corte de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $z = k$.

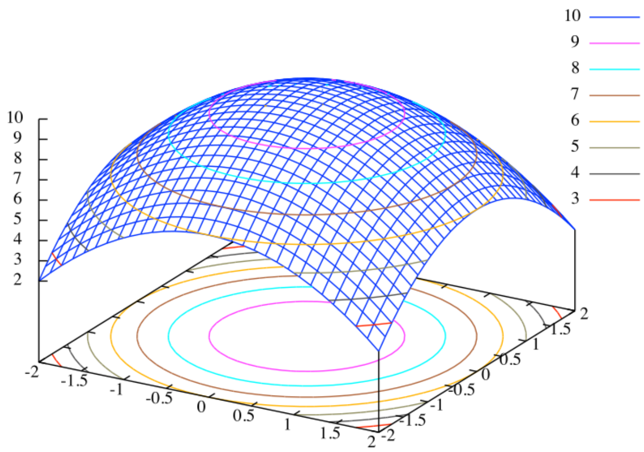


Figura 1: Gráfica y curvas de nivel para $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$.

Es posible también representar conjuntos de nivel para campos escalares de tres variables, llamándose en este caso *superficies de nivel*. Si $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la superficie de nivel k es el conjunto de puntos del dominio U cuya imagen por f es k, esto es

$$\{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = k\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

2 Límites y continuidad

2.1 Límite de un campo escalar en un punto

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ un campo escalar de dos variables y $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto del interior o de la frontera de U. Se dice que L es el límite de f cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0),

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R},$$

si para cualquier entorno de L existe un entorno de (x_0, y_0) contenido en U de manera que las imágenes de todos sus puntos están en el entorno dado de L. Lo podemos interpretar como que al acercarnos a (x_0, y_0) por cualquier trayectoria dentro de U las imágenes de dichos puntos tienden a L.

A diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}$, en este caso se tienen infinitas formas de acercarse al punto (x_0, y_0) lo que dificulta la existencia del límite.

Ejemplo. Veamos que el siguiente límite no existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Para ello nos acercmos al punto $(0, 0)$ por dos conjuntos diferentes,

1. Haciendo que $x = 0$, tenemos entonces $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$

2. Haciendo $x = y$, tenemos $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$

Luego no existe el límite porque depende de la “forma”de acercarse al punto.

Criterio de cero por acotada. Una técnica para calcular límites se centra en los campos escalares acotados, es decir, $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que verifica que existe un número real K tal que

$$|f(x, y)| < K \text{ para todo } (x, y) \in U$$

Sean $f, g\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ campos escalares y $(x_0, y_0) \in U$. Si f es acotado en U y $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = 0$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0$$

Ejemplo (véase Ejercicio ??). Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Para ello expresamos el límite anterior de la siguiente forma

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,\frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

donde claramente $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ y la función $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$ es acotada porque $y^2 \leq x^2+y^2$, de donde $0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$. De lo anterior se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

2.2 Continuidad de un campo escalar

Se dice que $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ es continuo en un punto $(x_0, y_0) \in U$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

El campo es *continuo en el dominio* U si es continuo en todos los puntos de U. Se verifica el mismo álgebra de funciones continuas que en una variable.

Ejemplo: El campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en todos los puntos salvo en el $\vec{x}_0 = (0,0)$. Para comprobar esto veamos que no existe el limíte de la función en dicho punto. Tomamos diversas rutas que nos acercan al $(0,0)$:

$$\text{Si } x = 0, \quad \lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\ x\,=\,0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

$$\text{Si } x = y, \quad \lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\ x\,=\,y}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

sin embargo, si nos acercamos al punto $(0,0)$ a través del camino $x = y^2$

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\ x\,=\,y^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

de donde se deduce que no existe límite en el punto $(0,0)$.

3 Derivadas parciales y derivadas direccionales

3.1 Derivadas parciales

Derivada parcial de un campo escalar. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables y (x_0, y_0) un punto interior a U. Se define la derivada parcial de f respecto de la variable x en el punto (x_0, y_0) como

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h},$$

cuando el límite anterior existe.

Igualmente se puede definir la derivada parcial de f respecto de la variable y en el punto (x_0, y_0) como

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h},$$

cuando el límite anterior existe.

La existencia de las derivadas parciales de f en (x_0, y_0) no garantiza que f sea continua en (x_0, y_0).

Ejemplo. El campo escalar del ejemplo anterior $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ tiene derivadas parciales en el punto $\vec{x}_0 = (0,0)$. Veamos:

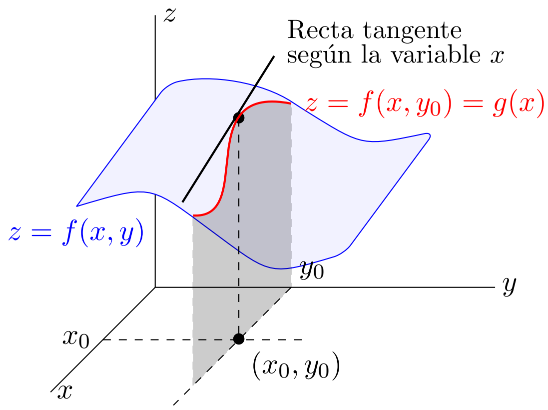
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

luego existen las derivadas parciales $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, sin embargo f no es continua en el punto $(0,0)$, como ya hemos visto.

Interpretación geométrica de las derivadas parciales. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables y (x_0, y_0) un punto interior a U. La derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ mide la variación del campo f cerca de (x_0, y_0) según los puntos de la recta $y = y_0$ contenidos en U. Si se define $g(x) = f(x, y_0)$ entonces $f_x(x_0, y_0) = g'(x_0)$.

La derivada parcial de f respecto de x en (x_0, y_0), $f_x(x_0, y_0)$, es por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva $z = g(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0, y_0))$.

Dicha curva, de ecuaciones $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$ es el resultado de cortar la gráfica de f en el plano $y = y_0$ de $\mathbb{R}^3$. La recta tangente anterior, vista en el espacio, se denomina *recta tangente a (la gráfica de) f en el punto (x_0, y_0) según la variable x*



La parametrización $\alpha(t) = (t, y_0, f(t, y_0))$ representa la curva de corte, por lo que la dirección de esta recta tangente es el vector $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$.

Análogamente se puede interpretar $f_y(x_0, y_0)$ y el vector $(0, 1, f_y(x_0, y_0))$ nos da la dirección de la recta tangente a la gráfica en el punto (x_0, y_0) según la variable y.

3.2 Derivada direccional

Una dirección unitaria en el plano se entiende como un vector del plano $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ con $\|\vec{u}\| = 1$.

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables, (x_0, y_0) punto interior a U y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ una dirección unitaria. Se define la derivada direccional de f respecto a la dirección unitaria u en el punto (x_0, y_0) como

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h},$$

cuando el límite anterior existe. Las derivadas parciales del campo f son casos particulares de derivadas direccionales tomando las direcciones canónicas, así

$$f_x(x_0, y_0) = D_{(1,0)}f(x_0, y_0) \text{ y } f_y(x_0, y_0) = D_{(0,1)}f(x_0, y_0).$$

La existencia de todas las derivadas direccionales de f en (x_0, y_0) no garantiza que la función sea continua en (x_0, y_0).

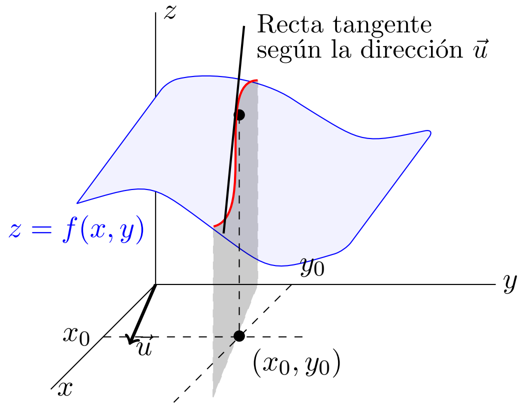
Interpretación geométrica de la derivada direccional. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables, (x_0, y_0) un punto interior a U y una dirección unitaria $\vec{u}$. La derivada $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ mide la variación del campo escalar f cerca de (x_0, y_0) según los puntos de la recta dada por $(x_0, y_0)+t\vec{u}$. Si se define la función $g(t) = f((x_0, y_0)+t\vec{u})$ entonces $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = g'(0)$.

Si, $u_1 \neq 0$, se considera la curva

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 + \dfrac{u_2}{u_1}(x - x_0) \end{cases}$$

resultado de cortar la gráfica de f con el plano ortogonal a OXY que contiene la dirección $\vec{u}$ y al punto (x_0, y_0), una parametrización suya sería $\alpha(t) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, g(t))$. La dirección tangente a dicha curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es $(u_1, u_2, D_u f(x_0, y_0))$.

La recta tangente a la curva anterior en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se denomina *recta tangente a (la gráfica de) f en (x_0, y_0) según la dirección $\vec{u}$.*



3.3 Campo escalar de clase $\mathbf{C^1}$

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con U abierto de forma que existe la derivada parcial de f respecto de x en todos los puntos de U. Esta derivada parcial es un nuevo campo escalar $f_x\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que a cada punto $(x, y) \in U$ le hace corresponder $f_x(x, y)$, e igualmente se puede definir la función derivada parcial de $f$respecto de y, fy. Se dice que f es de *clase C^1 en U* si los campos escalares f, f_x y f_y existen y son continuos en U.

4 Diferenciabilidad

Plano tangente. Dado $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables y (x_0, y_0) punto interior de U para el cual existen las derivadas parciales $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$, se define el plano tangente a (la gráfica de) f en el punto (x_0, y_0) como

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

El plano tangente pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y contiene a las rectas tangentes a (la gráfica de) f según las variables x e y. Sin embargo, aunque inicialmente denominamos a este plano "tangente", puede no ser una buena aproximación de la gráfica del campo cerca del punto.

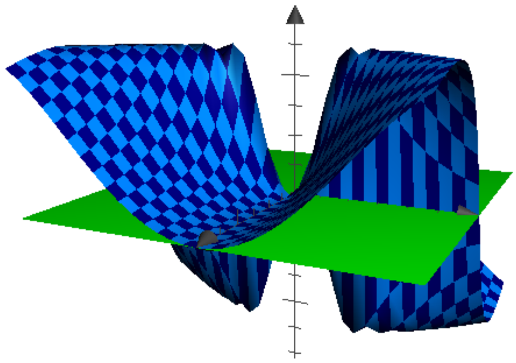


Figura 2: Plano tangente que no aproxima la gráfica.

Por ejemplo, la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si} \quad x \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = (0,0) \end{cases}$ definida anteriormente, tiene derivadas parciales en el $(0,0)$, por lo tanto está definido el plano tangente, si bien, como se ve en la figura 2, dicho plano no aproxima la función.

4.1 Diferencial de un campo escalar

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables para el que existe derivadas parciales en punto (x_0, y_0). Se dice que f *es diferenciable* en (x_0, y_0) punto interior a U si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)]}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Lo que significa que existe el plano tangente a f en (x_0, y_0) y es una buena aproximación de la superficie $z = f(x,y)$ suficientemente cerca del punto (x_0, y_0).

Condición suficiente de diferenciabilidad. Si $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1 en U conjunto abierto, entonces f es diferenciable en todos los puntos de U.

Propiedades de los campos escalares diferenciables. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en (x_0, y_0) punto interior a U. Se verifican las siguientes propiedades:

1. El campo f es continuo en (x_0, y_0).
2. Existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0).
3. El plano tangente a f en (x_0, y_0) aproxima bien a la gráfica del campo escalar cerca del punto.

4. Existen todas las derivadas direccionales de f en (x_0, y_0). Más aún, si la dirección unitaria es $\vec{u} = (u_1, u_2)$ entonces

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$

5. El plano tangente a f en (x_0, y_0) contiene a las rectas tangentes a f en (x_0, y_0) según cualquier dirección.

6. Sea $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$, una curva parametrizada con $c(I) \subseteq U$ y derivable en $t_0 \in I$ tal que $c(t_0) = (x_0, y_0)$. La función $g(t) = f(c(t))$ para todo $t \in I$, que evalua el campo escalar dado sobre cada uno de los puntos de la curva en función del parámetro t, es derivable en t_0 y su derivada se calcula como

$$g'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0).$$

4.1.1 Definición.

Si $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de dos variables diferenciable en (x_0, y_0) punto interior de U, llamaremos *diferencial* de f en (x_0, y_0) a la aplicación lineal

$$df_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definida como $df_{(x_0,y_0)}(x, y) = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y$.

Como cualquier aplicación lineal se puede expresar en forma matricial y, respecto a la base canónica, corresponde a la diferencial de f en (x_0, y_0) una matriz 1×2 cuyas dos columnas son las derivadas parciales de f. Dicha matriz recibe el nombre de **matriz jacobiana** de f en el punto (x_0, y_0), o bien $J(f)(x_0, y_0)$. Por tanto

$$df_{(x_0,y_0)}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J(f)(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4.1.2 Diferencial de campos escalares de 3 variables

Si $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar y (x_0, y_0, z_0) es un punto del interior de U, entonces de forma análoga a como se ha definido para campos de dos 2 variables, se definen las derivadas parciales:

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0);\ f_y(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0);\ f_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^3$, se define también, análogamente, la derivada direccional:

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0, z_0)$$

y la diferencial del campo escalar f será entonces la aplicación lineal $df_{(x_0,y_0,z_0)}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con matriz jacobiana 1×3 que toma la expresión

$$J(f)(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

4.2 Diferencial de funciones vectoriales

Si $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se pude expresar de la forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

siendo sus componentes $f_i\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ campos escalares de n variables definidos en U.

Dado un punto $P_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ de U, decimos que F es **continuo** en P_0 si lo son todas sus componentes, y, si P es del interior de U, decimos que F es **diferenciable** en P_0 si lo es cada una de sus componentes.

La diferencial de F en el punto P_0 será entonces la aplicación lineal $dF_{P_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ representada,respecto a las bases canónicas, por la **matriz jacobiana** de dimensión $m \times n$,

$$dF_{P_0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Campos vectoriales. Un *campo vectorial* de dos variables es una función $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Esto se puede interpretar como una función que en cada punto del dominio le asigna un vector del plano.

Si expresamos F a partir de dos campos escalares $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ su diferencial en un punto $x_0, y_0)$ es la aplicación lineal $dF_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz jacobiana es

$$dF_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Todo lo anterior es válido para campos vectoriales de tres variables $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

4.3 Gradiente

Obsérvese que la diferencial de un campo escalar f de dos variables puede ser vista como un vector del plano (que cambia en cada punto). En este sentido *df* puede ser interpretado como un campo vectorial de dos variables $\nabla f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido

$$\nabla f(x, y) = df_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

que se suele escribir $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, donde el símbolo ∇ se lee "*nabla*" y el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ se llama *gradiente* de f en el punto (x_0, y_0) que coincide con la diferencial en dicho punto.

Con esta notación es posible reescribir las siguientes fórmulas:

1. La diferencial en un punto aplicada a un vector se expresa como un producto escalar

$$df_{(x_0,y_0)}(x, y) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x, y)$$

2. Plano tangente a f en (x_0, y_0),

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

3. Derivada direccional de f en (x_0, y_0) para la dirección unitaria $\vec{u}$,

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

4. Derivada del campo f evaluado sobre una curva parametrizada $c(t)$ en (x_0, y_0), es decir $g(t) = f(c(t))$, siendo $c(t_0) = (x_0, y_0)$,

$$g'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot c'(t_0)$$

4.3.1 Propiedades geométricas del gradiente.

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en (x_0, y_0) punto interior a U. El gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ verifica las siguientes propiedades:

1. *Propiedad de dirección óptima*: la derivada direccional máxima de f en (x_0, y_0) se alcanza para la dirección y sentido del gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, esto es

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}.$$

   Además, el valor de dicha derivada es el módulo del gradiente $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.

2. *Propiedad de ortogonalidad*: el gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ nos da la dirección ortogonal a la curva de nivel de f que pasa por (x_0, y_0), esto es la curva $f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Todo lo anterior es válido para el gradiente definido sobre campos escalares de tres (y de más) variables.

5 Derivadas parciales de orden superior

5.1 Derivadas de segundo orden

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f\colon U \to \mathbb{R}$ un campo escalar de forma que existe la función derivada parcial de f respecto de x en todos los puntos de U. En un punto (x_0, y_0) de U pueden construirse las parciales del campo escalar f_x respecto ambas variables,

$$f_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = (f_x)_x(x_0, y_0)$$
$$f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = (f_x)_y(x_0, y_0).$$

De la misma forma puede hacerse con la derivada parcial de f respecto de la variable y, definiendo

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = (f_y)_x(x_0, y_0)$$
$$f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = (f_y)_y(x_0, y_0).$$

A todas estas parciales, si existen, se les denomina **derivadas parciales de segundo orden** de f en (x_0, y_0). En particular, a las parciales $f_{xy}(x_0, y_0)$ y $f_{yx}(x_0, y_0)$ se les llama *parciales cruzadas*.

De la misma forma a las funciones derivadas parciales de segundo orden del campo f se les puede calcular sus derivadas parciales, las cuales se llamarían **derivadas parciales de tercer orden**, y así sucesivamente.

5.1.1 Campo escalar de clase $\mathbf{C^2}$

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con U conjunto abierto de manera que existan las parciales de segundo orden en todos sus puntos. Se dice que f *es de clase* C^2 *en* U si f, f_x, f_y, f_{xx},f_{xy}, f_{yx} y f_{yy} existen y son continuas en U.

De la misma forma se puede decir que el campo escalar f es de clase C^n en el abierto U si f y todas sus parciales hasta el orden n son continuas en U. Cuando un campo f tiene infinitas derivadas parciales, todas continuas, se dice que f es de clase C^∞.

Condición suficiente de igualdad de las parciales cruzadas. Sea el campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con U abierto. Si f es de clase C^2 en U entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales para todos los puntos de U,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad \forall (x_0, y_0) \in U.$$

> Nota.- Una condición suficiente para la igualdad de las derivadas cruzadas, más general es comocida como ***teorema de Schwartz*** *o teorema de Clairaut*. Las condiciones en este teorema son tan generales que casi todas las funciones que se usan en la práctica lo verifican (Véase bibliografía).

5.2 Matriz hessiana de un campo escalar

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ campo escalar diferenciable en U abierto diferenciable en todos sus puntos y sea $\nabla f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial gradiente. Sabemos que las funciones componentes de este campo vectorial son las funciones derivadas parciales. Si ∇f es diferenciable a su vez en (x_0, y_0) entonces se dirá que f es *dos veces diferenciable* en (x_0, y_0). Esta diferencial en (x_0, y_0) es una aplicación lineal

$$d(\nabla f)_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

cuya matriz respecto a las bases canónicas se le llama **matriz hessiana** (o segunda diferencial) de f en (x_0, y_0)

$$H(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Si f es está en las condiciones del teorema de Schwartz (en la práctica, siempre) entonces la matriz hessiana es simétrica en todos los puntos de U.

5.3 Regla de la cadena. Teorema de la función inversa. Cambios de variables

5.3.1 Regla de la cadena.

Sean $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $G\colon V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ funciones vectoriales definidas de forma que $F(U) \subseteq V$. Tiene sentido entonces la nueva función vectorial $G \circ F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ compuesta de F y G.

Teorema. Sean F y G en las condiciones anteriores, siendo F diferenciable en P_0 del interior de U y G diferenciable en $Q_0 = F(P_0)$ del interior de V. Entonces la función compuesta $G \circ F$ es diferenciable en P_0 y además

$$d(G \circ F)_{P_0} = dG_{Q_0} \circ dF_{P_0}$$

es decir, la diferencial de la función compuesta es la compuesta de las diferenciales. Esto es equivalente a decir que la matriz jacobiana de la función compuesta es el producto de matrices jacobianas de las funciones que la componen (en orden inverso de la composición).

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left, "G \circ F"] & V \arrow[r, "G"] & \mathbb{R}^l \\ P_0 \arrow[r, mapsto, dashed] & Q_0 = F(P_0) \arrow[r, mapsto, dashed] & G(F(P_0)) \end{tikzcd}$$

(a) Composición de funciones.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "dF_{P_0}"] \arrow[rr, bend left, "dG_{Q_0} \circ dF_{P_0}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "dG_{Q_0}"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

(b) Composición de diferenciales.

5.3.2 El teorema de la función inversa.

Llamamos transformación en $\mathbb{R}^n$ a una función $T\colon V \subseteq \mathbb{R}^n \to U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se acostumbra a expresar T de la forma

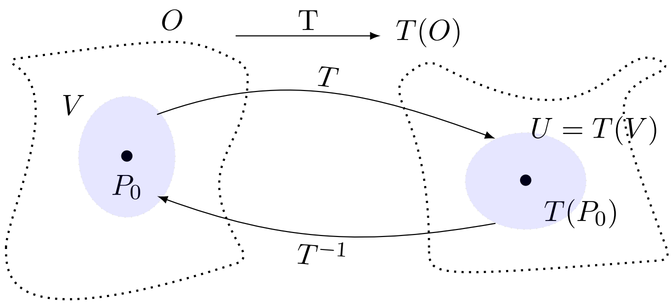
$$T(u_1, u_2, \dots, u_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde cada u_i es un campo escalar de n variables. Si T es biyectiva, entonces tiene inversa $T^{-1}\colon U \to V$.

Teorema. Sea T es una transformación diferenciable en un abierto O con derivadas parciales continuas. Si $P_0 \in O$ verifica que dT_{P_0} es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, entonces existe un entorno abierto V de P_0 tal que $T\colon V \to U = T(V)$ es invertible con inversa $T^{-1}\colon U \to V$ diferenciable. Además

$$d(T^{-1})_{T(P_0)} = (dT_{P_0})^{-1}$$

En términos de matrices, en las condiciones del teorema, diremos que T es diferenciable en P_0 con matriz jacobiana $J(T)(P_0)$ invertible (determinante distinto de cero), entonces T^{-1} es diferenciable en $T(P_0)$ y su matriz jacobiana es la matriz inversa de la anterior.



Jacobiano. Al determinante de la matriz jacobiana de una transformación diferenciable en un punto se le llama *jacobiano* en dicho punto. Según lo anterior, si una transformación es diferenciable (con continuidad) en un punto P_0 y su jacobiano $\det J(T)(P_0) \neq 0$ entonces T es invertible en un entorno del punto P_0.

En dos coordenadas, si $T(u, v) = (x, y)$ el jacobiano se suele expresar

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(J(T)) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

5.3.3 Cambios de variables.

A veces se pueden cambiar las variables (x, y) de un campo escalar para obtener nuevas funciones diferenciables. Veamos algunos casos interesantes:

1. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en un punto (x_0, y_0) interior de U y sea $\alpha\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, donde $I = (a, b)$ es un intervalo abierto una función vectorial diferenciable[1] en el punto $t_0 \in (a, b)$ de forma que $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$. Se suele expresar α como una parametrización de la forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

   En esta situación podemos definir una función real $g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

   $$g(t) = (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) = f\left(x(t), y(t)\right)$$

   La diferencial de g en t_0, que no es otra cosa que su derivada, toma la expresión

   $$dg_{t_0} = df_{\alpha(t_0)} \circ d\alpha_{t_0} = df_{(x_0,y_0)} \circ d\alpha_{t_0}$$

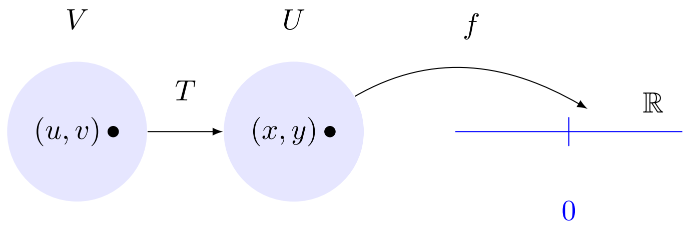
   que usando las respectivas matrices jacobianas tenemos:

   $$g'(t_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0)$$

   que, en un lenguaje clásico, prescindiendo del punto donde se aplica la derivada, se suele expresar:

   $$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2. Sea $f\colon U \to \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable en el abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Supongamos que existe una transformación diferenciable $T\colon V \subseteq \mathbb{R}^2 \to U$ definida en un abierto V definida como $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$.

   La composición $f \circ T$ nos permite redefinir las variables del campo escalar f del siguiente modo[2]

   $$f(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

   Entonces podemos calcular el gradiente de f en las nuevas variables a partir de las antiguas

   $$\nabla f(u, v) = d(f \circ T)_{(u,v)} = df_{T(u,v)} \cdot dT_{(u,v)} = \nabla f(x, y) \cdot dT_{(u,v)}$$

   En coordenadas tenemos

   $$\begin{pmatrix} f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix}$$

[1] La función α define una curva en $\mathbb{R}^2$.

[2] Abusamos del lenguaje llamando $f = f \circ T$.

que se suele expresar:

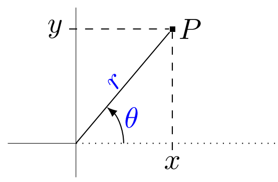
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Todo esto es válido para tres (y más) dimensiones, así si el cambio de variable es $(x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}$$

Coordenadas polares. El cambio de variables más usado en $\mathbb{R}^2$ es el llamado *cambio a polares.* En los términos antes expresados, la transformación que rige este cambio de variables $T\colon V \to U$, con $T(r, \theta) = (x, y)$, siendo

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= r\cos\theta \\ y(r,\theta) &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \quad (r > 0 \text{ y } 0 < \theta < 2\pi)$$



donde $V = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ y $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$ es el abierto del plano que se obtiene al quitar el origen y el semieje OX positivo.

El jacobiano de esta transformación es el siguiente:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Coordenadas cilíndricas. El cambio de variables a polares en el plano se puede generalizar a $\mathbb{R}^3$ sin más que proyectar el punto P sobre el plano OX, considerar las coordenadas polares de la proyección t subir por el eje z. En la figura 3 se indica el cambio a cilíndricas.

$$\begin{aligned} x(r,\theta,z) &= r\cos\theta \\ y(r,\theta,z) &= r\operatorname{sen}\theta \\ z(r,\theta,z) &= z \\ &\text{con } r > 0, \theta \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

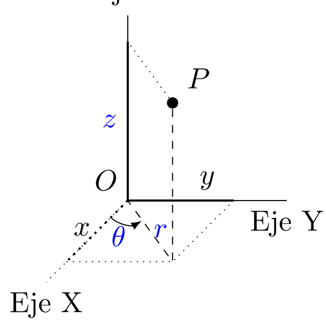


Figura 3: Coordenadas cilíndricas.

El jacobiano de la transformación de coordenadas cilíndricas a rectangulares es

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Coordenadas esféricas. En muchas aplicaciones se utilizan las coordenadas esféricas. Un punto del espacio queda identificado con su distancia ρ al origen de coordenadas y un par de ángulos. El *ángulo polar o colatitud* ϕ que mide en radianes el ángulo que forma el radio vector del punto con la parte positiva del Eje Z y el *ángulo acimutal o azimut (también llamado longitud)* θ que mide en radianes el ángulo que mide la proyección en el plano con la parte positiva del Eje X. Véase la figura 4.

$$\begin{aligned} x(\rho,\phi,\theta) &= \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y(\rho,\phi,\theta) &= \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z(\rho,\phi,\theta) &= \rho\cos\phi \end{aligned}$$
con $\rho > 0, \phi \in (0,\pi), \theta \in (0, 2\pi)$

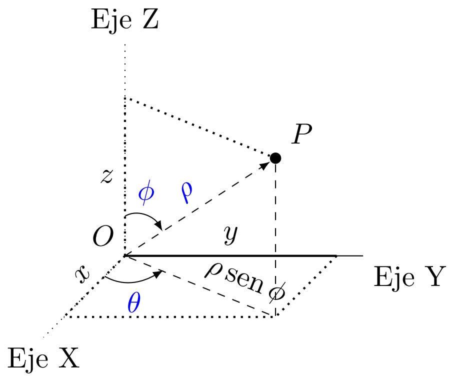


Figura 4: Coordenadas esféricas

El jacobiano de la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares es

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\phi & 1 \end{vmatrix} = \rho^2\operatorname{sen}\phi$$

6 Derivación implícita y teorema de la función implícita

Curvas y superficies en forma implícita. Una representación implícita de una curva en el plano es una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$. Una representación implícita de una superficie en $\mathbb{R}^3$ es una ecuación de la forma $F(x,y,z) = 0$. La representación implícita de una curva en el espacio se realiza mediante dos ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

En los tres casos es posible que no pueda despejarse, al menos de forma sencilla, las variables necesarias como para escribir dichas curvas y superficies mediante una representación explícita. Los siguientes teoremas permiten saber que es posible hacerlo y trabajar, sin conocer dichas representaciones, de manera local.

6.1 Teorema de la función implícita para una curva en el plano.

Teorema. Sea la curva plana $F(x,y) = 0$ con $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^n en un abierto U. Si $(x_0, y_0) \in U$ es un punto de la curva, esto es $F(x_0, y_0) = 0$, y $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

entonces es posible expresar y en función de x en un entorno de x_0, es decir, existe una función $y = y(x)$ verificando que $F(x, y(x)) = 0$ en un entorno de x_0, de manera que $y(x_0) = y_0$ y que $y(x)$ es un función de clase C^n en dicho entorno.

6.1.1 Derivación implícita en el plano

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ verifica las condiciones del teorema anterior en (x_0, y_0) entonces se sabe que $y = y(x)$ en un entorno de x_0. La derivación implícita consiste en derivar la expresión $F(x, y(x)) = 0$ respecto de x y calcular $y'(x)$ en función de x e y.

Volviendo a derivar la ecuación encontrada obtenemos $y''(x)$ en función de x, y e y', y así sucesivamente. Dicha derivación sólo es posible en un entorno de x_0.

6.2 Teorema de la función implícita para una superficie en el espacio

Teorema. Sea la superficie $F(x, y, z) = 0$ con $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^n en un abierto U. Si $(x_0, y_0, z_0) \in U$ es un punto de la superficie, esto es $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, y $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ entonces es posible expresar z en función de x e y en un entorno de (x_0, y_0), es decir, existe una función $z = z(x, y)$ verificando que $F(x, y, z(x, y)) = 0$ en un entorno de (x_0, y_0), de manera que $z(x_0, y_0) = z_0$ y que $z(x, y)$ es un campo escalar de clase C^n en dicho entorno.

6.2.1 Derivación implícita de una ecuación en el espacio

Si la ecuación dada por $F(x, y, z) = 0$ verifica las condiciones del teorema anterior entonces se puede escribir $z = z(x, y)$ en un entorno de (x_0, y_0). La derivación implícita consiste en hallar las derivadas parciales de la ecuación

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

respecto de las dos variables que quedan, lo que lleva a dos ecuaciones donde es posible despejar $z_x(x, y)$ y $z_y(x, y)$. Si nuevamente se derivan estas dos ecuaciones se obtienen parciales de segundo orden y así sucesivamente. Esta derivación sólo es aplicable en un entorno de (x_0, y_0).

6.3 Teorema de la función implícita para una curva en el espacio

Teorema. Sea la curva dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

con $F, G\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos campos escalares de clase C^n en un abierto U. Si $(x_0, y_0, z_0) \in U$ es un punto de la curva, esto es $F(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0) = 0$, y

$$\begin{vmatrix} F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ G_y(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces es posible expresar las variables y y z en función de x en un entorno de x_0, es decir, existen dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ verificando $F(x, y(x), z(x)) = G(x, y(x), z(x)) = 0$ en un entorno de x_0, de manera que $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ y, además, las funciones $y(x)$ y $z(x)$ son de clase C^n en dicho entorno.

6.3.1 Derivación implícita de dos ecuaciones en el espacio.

Si las ecuaciones $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ verifican las condiciones del teorema anterior entonces se puede escribir $y=y(x)$ y $z=z(x)$ en un entorno de x_0. La derivación implícita consiste en derivar las ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x,y(x),z(x)) &= 0 \\ G(x,y(x),z(x)) &= 0 \end{aligned}$$

respecto de la variable que queda, lo que lleva a dos ecuaciones donde es posible despejar $y'(x)$ y $z'(x)$. Si nuevamente se derivan estas dos ecuaciones se obtienen derivadas de segundo orden y así sucesivamente. Estas fórmulas son aplicables sólo en un entorno de x_0.