Matemáticas III
Relación de ejercicios Tema 1

Ejercicios

Ej. 1 — Encuentra el conjunto interior, adherencia y frontera los conjuntos siguientes. Determina si son abiertos y/o cerrados.

1. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + 1\}$.
2. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 < x < 3,\ 0 < y \leq 1\}$.
3. $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{Z}^+\right\}$. ¿Qué tipo de punto es el origen de coordenadas $(0, 0)$ respecto de U?
4. $U = \bigcup\limits_{0\leq z\leq 2} \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ej. 2 — Halla el máximo dominio de existencia de cada uno de los siguientes campos escalares. Determina cuáles de ellos son abiertos y cuáles de ellos son cerrados indicando en cada caso su frontera.

1. $f(x, y) = 3x^5y - 2x^2y^2$.
2. $f(x, y) = \dfrac{yx - 2x^2}{y}$.
3. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$
4. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.
5. $f(x, y) = \sqrt{1 - x2 - y2}$.
6. $f(x, y) = \log(1 + x - y)$
7. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$.
8. $f(x, y, z) = \log(z^2 - x^2 - y^2)$.

Ej. 3 — Dibuja las curvas de nivel de los siguientes campos escalares.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$.
3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. $f(x, y) = \log(1 + x - y)$,

Ej. 4 — Considera el campo escalar de dos dimensiones

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Calcula el límite de f cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ según las siguientes trayectorias: el eje $x = 0$, el eje $y = 0$ y la recta $y = x$.

2. ¿Es continuo el campo f en $(0,0)$?
3. Halla $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
4. Determina el plano tangente a f en $(0,0)$ ¿Es una buena aproximación de $z = f(x,y)$ cerca de $(0,0)$?

Ej. 5 — Dado el campo $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ calcula las siguientes rectas tangentes a f en $(1,1)$.

1. La recta tangente según la variable x.
2. La recta tangente según la dirección $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.
3. La recta tangente según la dirección $\vec{u} = \dfrac{1}{2}(1,\sqrt{3})$

Ej. 6 — Calcula el gradiente de los siguientes campos escalares.

1. $f(x,y) = 3x^5y - 2x^2y^2$.
2. $f(x,y) = xe^{y^2}$.
3. $f(x,y) = \log(1 + x - y)$.
4. $f(x,y) = \operatorname{sen}(\pi x - y)$.
5. $f(x,y,z) = x^2 + 2zx - y^2 + z^2y$.
6. $f(x,y,z) = \log(1 + z^2 - x^2 - y^2)$,

Ej. 7 — Determina para el campo escalar $f(x,y) = x^2y - y^3$ en qué direcciones se verifica que

$$D_{\vec{u}}f(1,1) = 2.$$

Ej. 8 — Construye el plano tangente a cada uno de los campos escalares dados en los puntos indicados, razonando previamente por qué son diferenciables en dichos puntos.

1. $f(x,y) = xe^{y^2}$ en $(0,1)$.
2. $f(x,y) = \operatorname{sen}(\pi x - y)$ en $(1,0)$.

Ej. 9 — Sea el campo escalar $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1. Establece su dominio y dibuja sus curvas de nivel.
2. Traza sin calcularlo la dirección y sentido del vector gradiente en el punto $(1/2, 1/2)$.
3. Calcula $\nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y comprueba que coincide con el vector trazado en el apartado anterior.

Ej. 10 — Calcula la recta tangente a la curva de ecuación $x^3 + 2xy - y^3 = 1$ en el punto $(1,0)$ haciendo uso de la propiedad de ortogonalidad del gradiente.

Ej. 11 — Calcula la recta tangente a los siguientes campos en el punto indicado según la dirección en la que la derivada direccional es máxima para dicho punto.

1. $f(x,y) = xy^2 + e^x$ en el punto $(0,1)$.
2. $f(x,y) = x^3y + 3\log y$ en el punto $(1,1)$.

Ej. 12 — Sea el campo escalar de dos variables $f(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}y^3$.

1. Halla todos los puntos para los cuales la derivada direccional de f según la dirección $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vale $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
2. ¿Para cuáles de los puntos del apartado anterior dicha derivada direccional es máxima?

3. Considera la curva de nivel $\frac{4}{3}$ del campo escalar f. Halla las rectas tangente y normal a dicha curva en el punto $(1, 1)$.

Ej. 13 — Considera el campo $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xyz^2 - zx$ y el punto $P = (1, 2, 3)$.

1. Calcula $D_{\vec{u}} f\ P$ para $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.
2. ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional de f en P? ¿Cuál es el valor máximo de dicha derivada?

Ej. 14 — Escribe las matrices jacobianas de los siguientes campos vectoriales y determínalas en el punto $(1, 3)$.

1. $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
2. $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.
3. $F(x, y) = (x^2 + 3y^2, e^{xy}, x^3)$.

Ej. 15 — Calcula la diferencial de los gradientes de los campos del ejercicio 6. Comprueba la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

Ej. 16 — Sea z un campo escalar de clase C^2 en un abierto U. Transforma las siguientes ecuaciones mediante los cambios indicados.

1. $z_x + z_y = 0$ mediante $u = x + y, v = x - y$.
2. $z_{xx} - z_{yy} = 0$ mediante $u = x + y$, $v = x - y$.
3. $z_{xx} - z_{yy} = 0$ mediante $u = e^y$, $v = \log x$.
4. $z_{xx} + z_{yy} + 2z_{xy} - z_x - z_y = 0$ mediante $u = y - x$, $v = 2x$.

Ej. 17 — Sea z un campo escalar de clase C^2 en un abierto U. Transforma las siguientes ecuaciones mediante los cambios indicados.

1. $x^2 z_{xx} + y^2 z_{yy} - 2xyz_{xy} + 2xz_x = 0$ mediante $x = uv$, $1 = uy$.
2. $xz_{xy} + yz_{yy} = 0$ mediante $x = u$, $y = uv$.
3. $2yz_{xy} + \sqrt{y} z_{xx} = 0$ mediante $x = u - v^2$, $y = u^2$.
4. $x^2 z_{xx} + z_{yy} + 2xz_{xy} + xz_x = 0$ mediante $x = e^u$, $y = u - v^2$.

Ej. 18 — Sea z un campo escalar de clase C^2 que puede expresarse en función de una sola variable t. Transforma las siguientes expresiones mediante los cambios indicados.

1. $3z_{yy} - xz_{xy} - x^2 z_{xx} = 0$ por el cambio $t = xe^y$.
2. $yz_{xx} - z_{xy} + z_y = 0$ por el cambio $t = x - y^2$.

Ej. 19 — Escribe la expresión de ∇f en coordenadas polares, suponiendo que f es un campo escalar de dos variables de clase C^1 en un abierto.

Ej. 20 — Para f un campo escalar de dos variables de clase C^2 en un abierto U el *laplaciano* de f se define como

$$\nabla^2 f = \Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Escribe la expresión del laplaciano en coordenadas polares.

Ej. 21 — Dada la curva de ecuación implícita $x^3 y^2 - 3xy + 2 = 0$ y el punto $(1, 2)$ se pide:

1. Probar que se puede expresar de manera única $y = y(x)$ de clase C^1 cerca del punto dado.
2. Calcular $y'(1)$ razonando previamente su existencia. Determina la recta tangente a la curva en dicho punto.

Ej. 22 — Sea $x^3 - y^3 + 2xy - x + y = 0$ una ecuación implícita en el plano.

1. Comprueba que se puede expresar $y = y(x)$ de clase C^3 cerca de $(0, 1)$.
2. Construye el polinomio de Maclaurin de $y(x)$ de grado 3.
3. ¿Puede despejarse $x = x(y)$ de clase C^1 cerca del punto $(0, 1)$?

Ej. 23 — Considera la superficie de ecuación implícita $x^3z - z^3yx = 0$ y el punto $(1, 1, 1)$.

1. Comprueba que se puede expresar $z = z(x, y)$ de clase C^1 cerca de $(1, 1, 1)$.
2. Halla $\nabla z(1, 1)$ y el plano tangente a la gráfica de $z(x, y)$ en $(1, 1)$.

Ej. 24 — Comprueba que la ecuación

$$x^3 - y^3 + 6xy + z^2x = 6$$

define $y = y(x, z)$ de clase C^1 cerca del punto $(1, 2, 1)$. Calcula el plano tangente a la gráfica de la función $y = y(x, z)$ en el punto $(1, 1)$.

Ej. 25 — Sea S la superficie dada implícitamente por la ecuación

$$\cos(xz)e^y - e^z + xy = 0.$$

1. Comprueba que, en un entorno del punto $P = (3, 0, 0)$, dicha superficie es la gráfica de un campo escalar $z = z(x, y)$ de clase C^1.
2. Halla el plano tangente de dicha superficie en el punto $P = (3, 0, 0)$.
3. Halla la derivada direccional del campo $z = z(x, y)$ en el punto $(3, 0)$ según dirección del vector $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Ej. 26 — Sea S la superficie dada implícitamente por la ecuación

$$y^2z + x(\log z - 1) - e^x + xy = 0.$$

1. Comprueba que, en un entorno del punto $P = (0, -1, 1)$, dicha superficie es la gráfica de un campo escalar $z = z(x, y)$ de clase C^1.
2. Halla la derivada direccional máxima del campo $z = z(x, y)$ en el punto $(0, -1)$, indicando la dirección en la que se alcanza.

Ej. 27 — Sea α la curva de corte entre el elipsoide $x^2+4y^2+3z^2 = 16$ y el plano $x+y+2z = 5$. Comprueba que cerca del punto (0,1,2) pueden expresarse $y = y(x)$, $z = z(x)$ de clase C^1 y determina la recta tangente a la curva α en dicho punto.

Ej. 28 — Sea P el punto $(0, 0, 2)$ y C la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + z^2 = y + 4 \end{cases}$$

1. ¿Qué dos variables pueden expresarse cerca de P como funciones de clase C^1 de la tercera? Justifica la respuesta.
2. Usando la respuesta del apartado anterior determina la recta tangente a C en P.

Ej. 29 — Dada la superficie S de ecuación implícita

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + z - 1 = 0$$

y el punto $P = (0, -1, 0)$ se pide:

1. Comprueba que puede expresarse $z = z(x, y)$ de clase C^1 cerca de P.
2. Calcula la derivada direccional $D_{\vec{u}}z(0, -1)$ máxima, indicando la dirección donde se alcanza.
3. Determina el plano tangente a S en $(0, -1, 0)$.
4. Sea C la curva de corte entre la superficie S y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Halla la recta tangente a C en el punto P.

Soluciones

Solución (Ej. 1) — Algunas respuestas son:

1. $\overset{\circ}{U} = \emptyset$, $\overline{U} = \partial U = U$.
2. $\overset{\circ}{U} = \{(x, y) : -3 < x < 3,\ 0 < y < 1\}$. U no es abierto, no es cerrado.
3. $\overline{U} = \partial U = U \cup \{(0, 0)\}$.
4. $\overset{\circ}{U} = \bigcup_{0<z<2} \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1\}$. U es un conjunto cerrado.

Solución (Ej. 2) —

1. Abierto $\mathbb{R}^2$. No existe frontera.
2. Abierto $\{(x, y) : y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Frontera eje OY.
3. Abierto $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Frontera el punto $(0, 0)$.
4. $\{(x, y) : x \neq y \text{ y } x \neq -y\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto. Frontera, rectas $y = x$ e $y = -x$.
5. El círculo $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, cerrado. Frontera: $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, circunferencia.
6. El semiplano (abierto) $\{(x, y) : y < x + 1\}$. Frontera, la recta $y = x + 1$.
7. $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} - \{(0, 0)\}$. Front: $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$.
8. $\{(x, y, z) : z^2 > x^2 + y^2\}$. Front: El cono $z^2 = x^2 + y^2$. Observemos que el dominio es el interior del cono.

Solución (Ej. 3) —

1. Circunferencias concéntricas al origen y equidistantes.
2. Hipérbolas asintóticas a las rectas $y = x$ y $y = -x$.
3. Circunferencias concéntricas cada vez más lejanas al origen.
4. Rectas paralelas y por debajo de $y = x + 1$.

Solución (Ej. 4) —

1. Los límites son $0, 0$ y $\frac{1}{2}$.
2. No.
3. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
4. Plano tang. en $(0,0)$ es $z = 0$. No.

Solución (Ej. 5) —

1. $r(t) = (1+t, 1, 2+4t)$. 2. $r(t) = (1+t, 1+t, 2+4t)$ 3. $r(t) = (1+t, 1+\sqrt{3}t, 2+4t)$.

Solución (Ej. 6) —

1. $\nabla f(x,y) = \left(15\,x^4\,y - 4\,x\,y^2, 3\,x^5 - 4\,x^2\,y\right)$
2. $\nabla f(x,y) = \left(e^{y^2}, 2xy\,e^{y^2}\right)$
3. $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{1}{x-y+1}, \dfrac{-1}{x-y+1}\right)$
4. $\nabla f(x,y) = (\pi\cos(\pi x - y), -\cos(\pi x - y))$
5. $\nabla f(x,y,z) = \left(2x + 2z, z^2 - 2y, 2x + 2zy\right)$
6. $\nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{-2x}{1+z^2-y^2-x^2}, \dfrac{-2y}{1+z^2-y^2-x^2}, \dfrac{2z}{1+z^2-y^2-x^2}\right)$

Solución (Ej. 7) — Las direcciones $\vec{u} = (1,0)$ y $\vec{u} = (0,-1)$.

Solución (Ej. 8) —

1. $z - e\,x = 0$.
2. $\pi x - y + z = \pi$.

Solución (Ej. 9) —

1. $x^2 + y^2 = 1 - k^2$.
2. ———
3. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Solución (Ej. 10) — La recta $3x + 2y = 3$.

Solución (Ej. 11) —

1. $(x,y,z) = (t, 1, 2\,t + 1)$
2. $(x,y,z) = \left(\frac{3t}{5} + 1, \frac{4t}{5} + 1, 5t + 1\right)$

Solución (Ej. 12) —

1. $x+y=1$ y $x+y=-1$.
2. $x=1/2$ y $x=-1/2$.
3. Recta tangente: $2x+2y=4$.
   Recta normal: $2x-2y=0$.

Solución (Ej. 13) —

1. $\dfrac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$.
2. $\vec{v}=\left(\frac{17}{\sqrt{435}},\frac{5}{\sqrt{435}},\frac{11}{\sqrt{435}}\right)$ y $\sqrt{435}$.

Solución (Ej. 14) —

1. $\begin{pmatrix}2 & -6\\ 6 & 2\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}e\,\cos 3 & -e\,\sin 3\\ e\,\sin 3 & e\,\cos 3\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}2 & 18\\ 3\,e^3 & e^3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

Solución (Ej. 15) — Sólo los impares:

1. $\begin{pmatrix}60x^3y-4y^2 & 15x^4-8xy\\ 15x^4-8xy & -4x^2\end{pmatrix}$
3. $(x-y+1)^{-2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 2\,z\\ 2 & 2\,z & 2\,y\end{pmatrix}$

Solución (Ej. 16) —

1. $z_u=0$.
2. $z_{uv}=0$.
3. $(z_{vv}-z_v)e^{-2v}-z_{uu}u^2-z_uu=0$
4. $2z_{vv}-z_v=0$

Solución (Ej. 17) —

1.$u^2z_{uu}+2\,u\,z_u=0$.
2.$z_{uv}-\frac{1}{u}z_v=0$.
3.$z_{uv}=0$ (supuesto $u>0$).
4.$z_{uu}=0$.

Solución (Ej. 18) —

1. $tz''+2z'=0$.
2. $3z''-z'=0$.

Solución (Ej. 19) — $\nabla f=f_\rho\,\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}f_\theta\,\hat{\theta}$

Solución (Ej. 20) — $\Delta f = f_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\theta\theta}$.

Solución (Ej. 21) —

1. $F(1,2) = 0$ con $F_y(1,2) = 1 \neq 0$.
2. Recta tangente $6x + y - 8 = 0$.

Solución (Ej. 22) — El polinomio de Maclaurin es $p(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{8}$.

Solución (Ej. 23) — $\nabla z(1,1) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$

Solución (Ej. 24) — $8x - 3y + z - 3 = 0$

Solución (Ej. 25) — El plano tang. $z = 4y$ y la derivada direccional $D_{\vec{u}} y(3,0) = \sqrt{8}$.

Solución (Ej. 26) — La derivada direccional máxima es $\sqrt{13}$ y la dirección en la que se alcanza es $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Solución (Ej. 27) — $r(t) = (t, 1 + 3t, 2 - 2t)$,

Solución (Ej. 28) — $r(t) = (t, 0, 2)$.

Solución (Ej. 29) —

1. —
2. $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ y $D_{\vec{u}} z(0,-1) = 2\sqrt{5}$.
3. $\Pi \equiv 4x + 2y - z - 2 = 0$
4. $r(t) = (t, -1, 4t)$.