Matemáticas III
Relación de ejercicios Tema 2

Ejercicios

Ej. 1 — Clasifica las siguientes matrices simétricas y escribe su forma cuadrática asociada.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Ej. 2 — Calcula los polinomios de Taylor de grado 2 centrados en los puntos indicados de los siguientes campos escalares.

1. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ en $(0, 0)$.
2. $(x, y) = x^2 e^y$ en $(1, 0)$.
3. $f(x, y) = xy^2 + x^4$ en $(0, 0)$.
4. $f(x, y) = \cos(xy)$ en $(0, \pi)$.
5. $f(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} z + y^2 \cos z$ en $(1, 1, 0)$.
6. $f(x, y, z) = e^{x+y} \operatorname{sen} z$ en $(0, 0, 0)$.

Ej. 3 — Dada la ecuación $x^3 - z^3 - y^2 - yx + 2z^2 = 0$, prueba que define $z = z(x, y)$ de clase C^2 cerca del punto $(1, 1, 1)$. Halla el polinomio de Taylor de $z(x, y)$ centrado en el punto $(1, 1)$ de grado 2.

Ej. 4 — Encuentra los puntos críticos de los siguientes campos escalares y clasifícalos.

1. $f(x, y) = x - y^2$
2. $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$
3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$
4. $f(x, y) = -y^3 + 3yx^2 - x + 3y$
5. $f(x, y) = (x + y^2)e^x$
6. $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$
7. $f(x, y) = x^2 y + xy^2 + x + y$
8. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
9. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

* **Ej. 5 —** Encuentra los puntos críticos de los siguientes campos y clasifícalos.

1. $z = x^2 + y^4$
2. $z = x^2 - y^4$
3. $z = x^2 + y^2 + 2xy$
4. $z = x^3$

Ej. 6 — Sea el campo escalar $f(x, y) = x^3 - 3axy + y^3$ con $a \in \mathbb{R}$. Clasifica los puntos críticos de f según los valores de a.

Ej. 7 — Para las superficies definidas por las siguientes ecuaciones implícitas prueba que es posible expresar $z = z(x, y)$ alrededor del origen de coordenadas. ¿Es el $(0, 0)$ un punto crítico de dicho campos escalares $z(x, y)$? Clasifícalo cuando la respuesta sea afirmativa.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = e^{x+y+z} - 1$.
2. $z \cos z + xy = 0$.

Ej. 8 — Considera la ecuación implícita

$$e^y \cos(xz) + xy = e^z.$$

1. Comprueba que se define $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $(3, 0, 0)$.
2. Halla el polinomio de Taylor de z (x,y) centrado en el punto (3,0) de grado 2.
3. Comprueba que el punto $(3, 0)$ es un punto crítico del campo escalar dado por $f(x, y) = z(x, y) - 4y$ y estudia su naturaleza.

Ej. 9 — Considera la ecuación implícita

$$z^2 + xyz - 2x - 2y - 2x^2y^2 + 6xy = 0.$$

1. Comprueba que en un entorno del punto $(1, 1, 0)$ se define $z = z(x, y)$ de clase C^3.
2. Demuestra que el punto $(1, 1)$ es un punto crítico de dicha función y clasifícalo.

Ej. 10 — Encuentra los puntos críticos de los siguientes campos escalares y clasifícalos.

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.
2. $f(x, y, z) = xyz + xz + yz$.
3. $f(x, y, z) = xyz$.
4. $f(x, y, z) = 1 + 3xz - x^2 - y^2 - z^2$.
5. $f(x, y, z) = y^3 - x^2 - z^2 + 4yz + 3$.

Ej. 11 — Encuentra los extremos absolutos de los siguientes campos escalares en las regiones indicadas.

1. $f(x, y) = 3x^2y^2 + 2x^3 + 2y^3$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 1,\ -5 \leq y \leq 1\}$.
2. $f(x, y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 + y^2)$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y^2$ en $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$.
5. $f(x, y, z) = x^2y - z^2$ en $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
6. $f(x, y, z) = x^2 + yz$ en $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z,\ z \leq 1\}$.
7. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ en $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \leq 0\}$.
8. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z^2 \leq x\}$.

Ej. 12 — Determina el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ej. 13 — Encuentra la longitud, usando multiplicadores de Lagrange, de los semiejes de la elipse centrada en el origen de ecuación

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8.$$

Ej. 14 — Calcula los puntos de las siguientes curvas más próximos al origen de coordenadas.

1. La recta $x + y = 4$.
2. La elipse $\begin{cases} x^2 + z^2 = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$.
3. La curva intersección del cono $2z^2 = x^2 + y^2$ con el plano $z = 1 + x + y$.

Soluciones

Solución (Ej. 1) —

1. Indefinida. $f(x, y) = x^2 - 2xy$.
2. Definida positiva.
3. Definida negativa. $f(x, y) = -5x^2 + 6xy - 2y^2$.
4. Semidefinida positiva.
5. Indefinida.
6. Definida positiva. $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4yz + 4xz + 8xy$.
7. Semidefinida positiva.
8. Definida negativa.

Solución (Ej. 2) —

1. $p_2(x, y) = x$.
2. $p_2(x, y) = x^2 + \dfrac{y^2}{2} + 2xy - y$.
3. $p_2(x) = 0$.
4. $p_2(x, y) = 1 - \dfrac{\pi^2 x^2}{2}$
5. $p_2(x, y, z) = -\frac{z^2}{2} + 2xz - z + y^2$.
6. $p_2(x, y, z) = yz + xz + z$.

Solución (Ej. 3) — $p_2(x, y) = x^2 + 10y^2 - 11xy + 7x - 6y$.

Solución (Ej. 4) —

2. Punto de silla en $(0, 0)$.
4. Resolver usando CAS. Dos puntos de silla.
5. Mínimo en $(-1, 0)$.
6. Máximo en $(0, 0)$ y mínimos en los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
9. Puntos de silla en los puntos $(0, k\pi)$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Solución (Ej. 5) — Punto crítico $(0, 0)$: 1. Mínimo. 2. Punto de silla.

Solución (Ej. 6) — Para cada a, f tiene un punto de silla en $(0,0)$. Además:

- Si $a<0$, máximo en (a,a).
- Si $a>0$, mínimo en (a,a).

Solución (Ej. 7) — 1. No es un punto crítico. 2. Punto de silla.

Solución (Ej. 8) — 1. — 2. $p_2(x,y) = -\frac{159y^2}{2} + xy + y$. 3. Punto de silla.

Solución (Ej. 10) —

1. Mínimo en $(0,0,0)$.
2. $\left(-\dfrac{a}{a+1}, a, 0\right)$, con $a \neq -1$.
3. $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$.
4. Punto de silla en $(0,0,0)$.
5. Punto de silla en $(0,0,0)$, Máximo en $\left(0, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right)$

Solución (Ej. 11) —

1. Máximo absoluto en $(-2,-4)$. Mínimo absoluto en $(0,-5)$.
2. Mínimo absoluto: $(0, 2/3)$. Máximo absoluto $(0,-1)$ (frontera).
3. Mínimo absoluto $(0,0)$. Máximo absoluto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ (frontera).
4. Mínimo absoluto: $(0,0)$. 4 Máximos absolutos $(\pm\frac{\sqrt{(2)}}{4}, \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}})$ (frontera).
5. Mínimos absolutos en $(0,0,\pm 1)$. Maximos absolutos $(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ (los 4 en la frontera).
6. Mínimo absoluto en $(0,0,0)$ (frontera). Máximos absolutos $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ (ambos en la frontera).
7. Mínimo absoluto en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (interior). Máximo absoluto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ (frontera).
8. Mínimo absoluto en $(0,0,0)$. Máximos absolutos $(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$ (Los 5 en la frontera)

Solución (Ej. 12) — Rectángulo de dimensiones $\sqrt{2}a \times \sqrt{2}b$.

Solución (Ej. 13) — Longitudes: 4 y 1.

Solución (Ej. 14) —

1. $(2,2)$.
2. $(1,0,1)$ y $(1,0,-1)$.
3. $(-1/3, -1/3, 1/3)$.