Matemáticas III
Tema 2
Optimización en campos escalares

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.
2014. OCW-Universidad de Málaga, http://ocw.uma.es. Bajo licencia
Creative Commons Attribution- NonComercial-ShareAlike 3.0 Spain

Índice

1. Formas cuadráticas y matrices simétricas reales

Sea A una matriz cuadrada **simétrica** de tamaño 2×2. La *forma cuadrática* asociada a dicha matriz es el campo escalar definido por

$$f_A(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si A es simétrica de tamaño 3×3, de forma análoga, define una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$,

$$f_A(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Igualmente para formas cuadráticas de $\mathbb{R}^n$, con $n > 3$.

Una forma cuadrática es siempre un polinomio de grado 2.

Ejemplo. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} f_A(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= x^2 - 4xy - y^2 \end{aligned}$$

El signo de la forma cuadrática asociada permite clasificar las matrices simétricas.

1. Se dice que A es *definida positiva* si su forma cuadrática asociada es siempre positiva, es decir $f_A(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no nulo.
2. Se dice que A es *definida negativa* si su forma cuadrática asociada es siempre negativa, es decir $f_A(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no nulo.
3. Se dice que A es *indefinida* si su forma cuadrática asociada cambia de signo, es decir existen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f_A(x_1, y_1) > 0$ y $f_A(x_2, y_2) < 0$.
4. Existen matrices A que no son ni definidas ni indefinidas, a dichas matrices se les llama *semidefinidas positivas* si $f_A(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y *semidefinidas negativas* si $f_A(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Todo lo dicho anteriormente es válido para matrices simétricas de tamaño 3×3.

Determinación del signo de una matriz simétrica

Sea A una matriz simétrica de orden 2 o 3.

1. La matriz A es definida positiva si y sólo si todos sus autovalores son positivos.
2. La matriz A es definida negativa si y sólo si todos sus autovalores son negativos.
3. La matriz A es indefinida si y sólo si tiene autovalores negativos y positivos.
4. La matriz A es semidefinida positiva si todos sus autovalores son no negativos y alguno es cero.
5. La matriz A es semidefinida negativa si todos sus autovalores son no positivos y alguno es cero.

1.0.1. Criterio de Sylvester

Facilita la clasificación del signo de una matriz simétrica A, cuando no se conocen los autovalores. Representamos por Δ_0, Δ_1, $\Delta_2, \ldots$ los menores principales de la matriz, es decir, si A es de orden 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ entonces } \Delta_0 = a_{11}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Teorema. Sea A es una matriz simétrica de orden n. Entonces:

1. A es definida positiva $\iff$ $\Delta_i > 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots n$.
2. A es definida negativa $\iff$ $(-1)^n \Delta_i < 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots n$.

En cualquier otro caso la matriz es indefinida o semidefinida.

Ejemplo.

1. La matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ es definida positiva porque $\Delta_0 = 1$ y $\Delta_1 = 4$.

2. La matriz $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ es definida negativa porque $\Delta_0 = -3$, $\Delta_1 = 2$ y $\Delta_2 = -1$.

3. Las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   no son definidas.

Ejercicio

Clasifica las anteriores matrices simétricas A, B y C del apartado 3 calculando sus autovalores.

2. Extremos relativos de un campo escalar

2.1. Polinomio de Taylor de un campo escalar de dos variables

Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ campo escalar de clase C^2 en un abierto U y sea $(x_0, y_0) \in U$. *El polinomio de Taylor de f centrado en (x_0, y_0) de grado* 1 es aquel cuya gráfica coincide con el plano tangente a f en (x_0, y_0), esto es

$$p_1(x, y) = f(x_0, y_0) + df_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Además se verifica que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - p_1(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

El polinomio de Taylor de f centrado en (x_0, y_0) de grado 2 es

$$p_2(x, y) = f(x_0, y_0) + df_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} d^2 f_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

El error producido al utilizar el polinomio p_2 anterior como aproximación de f verifica que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - p_2(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|^2} = 0.$$

Ejemplo. Para el campo escalar $f(x, y) = \dfrac{y + 1}{x - 1}$, vamos a calcular los polinomios de Taylor de grado 1 y 2 centrados en el $(0, 0)$.

La diferencial de f es $df = \begin{pmatrix} -\frac{y+1}{(x-1)^2} & \frac{1}{x-1} \end{pmatrix}$, en el punto dado es $df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= f(0, 0) + df_{(0,0)} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} = -1 + \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= -1 - x - y \end{aligned}$$

La difrencial del campo vectorial df nos da la matriz hessiana $d^2 f = \begin{pmatrix} \frac{2(y+1)}{(x-1)^3} & -\frac{1}{(x-1)^2} \\ -\frac{1}{(x-1)^2} & 0 \end{pmatrix}$, en el origen es $d^2 f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, por tanto

$$\begin{aligned} p_2(x,y) &= -1 + \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= -1 - x - y - xy - x^2 \end{aligned}$$

Ejercicio.

1. Calcula el polinomio de Taylor de la función f del ejemplo anterior, centrado en otro punto distinto del $(0,0)$ que pertenezca al interior de su dominio.

2. Prueba algo que es obvio: si $f(x,y)$ es un polinomio de segundo grado, entonces $p_2(x,y) = f(x,y)$, es decir, el polinomio de Taylor de f de segundo grado, centrado en (x_0, y_0), coincide con f.

2.2. Extremos relativos

Definición. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Se dice que f alcanza en un punto interior de U, (x_0, y_0) un *máximo (resp. mínimo) relativo*[1] si existe un entorno de (x_0, y_0) de manera que para todo (x,y) perteneciente a dicho entorno se verifica

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \text{ (resp. } f(x,y) \geq f(x_0,y_0)).$$

Los máximos y mínimos relativos de f se denominan, conjuntamente, *extremos relativos*[2] de f.

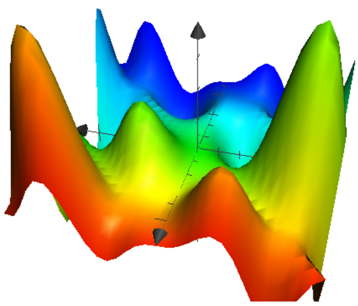

Figura 1: Pueden existir muchos máximos y mínimos relativos en U.

En cada punto correspondiente a un máximo o mínimo relativo el plano tangente es horizontal o lo que es lo mismo el polinomio de Taylor de primer grado se reduce a una constante, lo que equilave que la diferencial en el punto es nula, así

$$p_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = f(x_0,y_0)$$

de donde tenemos la siguiente:

[1]A los máximos y mínimos relativos también se les denominan respectivamente *máximos y mínimos locales*.
[2]También *extemos locales*.

Condición necesaria de la primera derivada. Si $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1 en el abierto U y f alcanza un extremo relativo en $(x_0, y_0) \in U$, entonces $df_{(x_0,y_0)} = (0,0)$.

Los puntos $(x_0, y_0) \in U$ que satisfacen la condición anterior $df_{(x_0,y_0)} = (0,0)$ se denominan *puntos críticos* de f. Es decir, los puntos críticos son las soluciones del sistema

$$df = (0,0)$$

Los puntos críticos de f que no son extremos relativos se denominan *puntos de silla.*

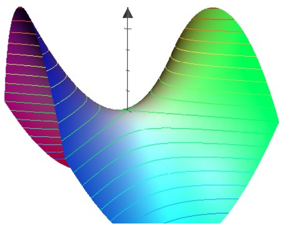

Figura 2: Un punto de silla, no es máximo ni mínimo.

Definición. Un punto (x_0, y_0) del interior de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ que **no** es un punto crítico de f se dice que es un *punto regular* de f. A la imagen de un punto regular, $f(x_0, y_0)$ se le llama *valor regular.*

Condición suficiente de la segunda derivada. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ campo escalar de clase C^3 en un abierto U y $(x_0, y_0) \in U$ un punto crítico de f.

1. Si $d^2f_{(x_0,y_0)}$ es definida positiva entonces f alcanza un mínimo relativo en (x_0, y_0).
2. Si $d^2f_{(x_0,y_0)}$ es definida negativa entonces f alcanza un máximo relativo en (x_0, y_0).
3. Si $d^2f_{(x_0,y_0)}$ es indefinida entonces f tiene un punto de silla en (x_0, y_0).
4. Si $d^2f_{(x_0,y_0)}$ es semidefinida (positiva o negativa) no podemos decidir. Véase ejercicio **??**.

Nota. Los conceptos y resultados anteriores pueden extenderse de forma análoga a campos escalares de tres o más variables.

Ejemplo. Vamos a calcular y clasificar los puntos críticos del campo escalar

$$f(x,y) = (x-y)\, e^{xy} \qquad \text{definido en todo } \mathbb{R}.$$

Calculamos los puntos donde la diferencial es $(0,0)$

$$df = \left(-y^2 + xy + 1, -x\,y + x^2 - 1\right) e^{xy} = (0,0)$$

obtenemos dos puntos críticos:

$$P_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Para saber de que tipo de puntos críticos se tratan, calculamos la segunda diferencial (matriz hessiana)

$$d^2 f = \begin{pmatrix} -y\left(y^2 - x\,y - 2\right) e^{x\,y} & (x-y)\,(x\,y+2)\,e^{x\,y} \\ (x-y)\,(x\,y+2)\,e^{x\,y} & -x\left(x\,y - x^2 + 2\right) e^{x\,y} \end{pmatrix}$$

y de aquí

- En $P_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $H_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}} & -\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{e}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{e}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}} \end{pmatrix}$ indefinida. **Punto de silla.**
- En $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $H_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}} & \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{e}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{e}} & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{e}} \end{pmatrix}$ indefinida. **Punto de silla.**

En la figura 3 se puede apreciar la gráfica de esta función cerca de los puntos de silla.

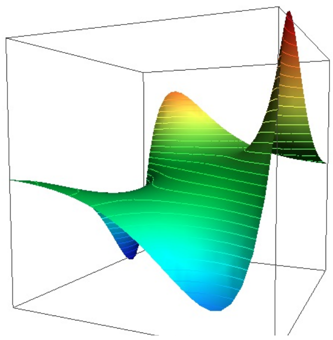

Figura 3: Gráfica de $f(x, y) = (x - y)\, e^{xy}$ con dos puntos de silla.

3. Extremos absolutos de un campo escalar

Definición. Sea el campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se dice que f alcanza un máximo (resp. mínimo) absoluto para U en $(x_0, y_0) \in U$ si para todo $(x, y) \in U$ se verifica que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$). Los máximos y mínimos absolutos de f se denominan, conjuntamente, extremos absolutos de f en U.

Relación entre extremos relativos y absolutos. Si f alcanza un máximo (mínimo) absoluto para U en un punto (x_0, y_0) interior a U entonces f alcanza un máximo (mínimo) relativo en (x_0, y_0).

3.1. Teorema de Weierstrass para campos escalares

Dominios acotados en varias variables. Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice acotado si está contenido en algún entorno del cero.

Teorema. Si $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo en un conjunto U *cerrado y acotado* entonces existen el máximo absoluto y el mínimo absoluto de f en U.

3.2. Búsqueda de los extremos absolutos de un campo escalar

Sea el campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en un abierto que contenga a U. Para encontrar los extremos absolutos de f en U se realizan los siguientes pasos:

1. Garantizar la existencia de los extremos requeridos.
2. Encontrar los puntos críticos contenidos en el interior de U.
3. Encontrar los puntos candidatos a extremo absoluto contenidos en la frontera de U.
4. Evaluar f en todos los puntos seleccionados en los apartados 2 y 3. En los puntos de mayor evaluación se tiene que f alcanza el máximo absoluto en U, y en los de menor evaluación el mínimo absoluto.

Nota. Los conceptos y resultados anteriores pueden extenderse de forma análoga a campos escalares de tres o más variables.

Ejemplo. Comprobemos el teorema de Weierstrass para la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x$ en el conjunto cerrado y acotado que delimita la hipérbola $3x^2 - 2y^2 + 6x = -2$ y la recta $x = \sqrt{3} - 1$.

Para ello encontramos un único punto crítico dentro del recinto

$$df = (2x-1, 2y) = (0,0) \Rightarrow P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

que resulta ser un mínimo relativo (candidato a absoluto), pues la matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es definida positiva.

Analicemos la frontera. Las curvas que definen la frontera se cortan en los puntos $(\sqrt{3}-1, -2)$ y $(\sqrt{3}-1, 2)$. Sustituyendo $x = \sqrt{3}-1$ en $f(x,y)$ tenemos la función $g(y) = y^2 - 3^{\frac{3}{2}} + 5$ definida entre los valores $y = -2$ e $y = 2$. Es fácil ver que alcanza el mínimo en el punto $P_2 = (\sqrt{3}-1, 0)$.

Sustituyendo los puntos de la hipérbola $y^2 = \frac{3x^2+6x+2}{2}$ en la función $f(x,y)$ obtenemos la función $h(x) = x^2 + \frac{3x^2+6x+2}{2} - x$ que alcanza el mínimo en los puntos $P_3 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ y $P_4 = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Calculamos los valores para los candidatos a mínimo absoluto:

- $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, con $f(P_1) = -\frac{1}{4}$.
- $P_2 = \left(\sqrt{3}-1, 0\right)$, con $f(P_2) = 5 - 3\sqrt{3} \approx -0{,}2$.
- P_3 y P_4, $\left(-\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}\right)$, con $f(P_3) = f(P_4) = \frac{3}{5} \approx 0{,}6$.

Luego el **mínimo absoluto se alcaza en el punto** P_1.

Por otro lado, según los cálculos anteriores los candidatos a máximo absolutos están sobre la frontera

- $Q_1 = \left(\sqrt{3}-1, -2\right)$ con $f(Q_1) = 9 - 3\sqrt{3} \approx 3{,}8$
- $Q_2 = \left(\sqrt{3}-1, 2\right)$ con $f(Q_2) = 9 - 3\sqrt{3} \approx 3{,}8$.

Es decir, el **máximo absoluto se alcanza en ambos puntos** Q_1 y Q_2. En el dibujo anterior se pueden ver las curvas de nivel de f.

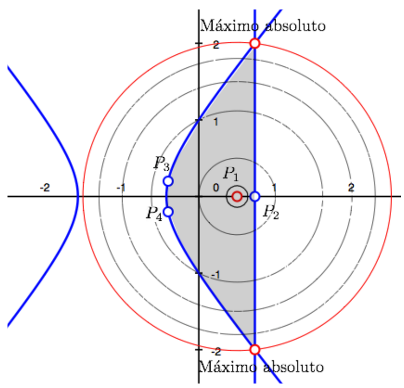

Figura 4: Líneas de nivel del campo f. se aprecia donde se alcanzan los extremos absolutos.

4. Extremos condicionados. Método de los multiplicadores de Lagrange

4.1. Extremos relativos condicionados a una curva en el plano

Sea un campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde U es un conjunto abierto y sea $g(x,y)=0$ una curva en forma implícita definida en U. Sea (x_0,y_0) un punto de la curva, esto es $g(x_0,y_0)=0$. Se dice que f alcanza en (x_0,y_0) un *máximo (resp. mínimo) relativo condicionado* a $g(x,y)=0$ si existe un entorno de (x_0,y_0) de manera que para todo punto (x,y) perteneciente a dicho entorno tal que $g(x,y)=0$ se verifica que $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$). Los máximos y mínimos relativos de f condicionados a g(x,y)=0 se denominan conjuntamente *extremos relativos de f condicionados* a $g(x,y)=0$.

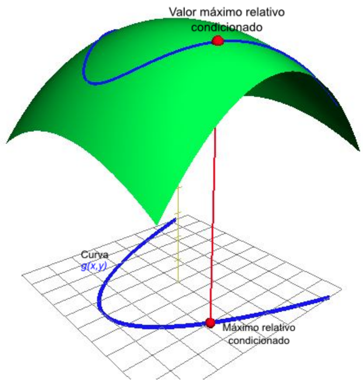

Figura 5: Extremo relativo condicionado a una curva.

Multiplicadores de Lagrange para una ecuación en el plano. Sea un campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en un abierto U y sea $g(x,y)=0$ una curva en forma implícita de manera que g es de clase C^1 en U. Sea $(x_0,y_0)\in U$ un punto de la curva que verifica $dg_{(x_0,y_0)} \neq (0,0)$. Si f alcanza un extremo relativo condicionado a $g(x,y)=0$ en (x_0,y_0) entonces existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$df_{(x_0,y_0)} + \lambda\, dg_{(x_0,y_0)} = 0.$$

Al escalar λ se le denomina *multiplicador de Lagrange*.

Método. Definimos la *función de Lagrange* como $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$. Entonces los extremos relativos condicionados se obtienen entre los puntos que anulan la diferencial $dL_{(x,y,\lambda)} = (0,0,0)$, o lo que es equivalente entre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Si (x_0,y_0,λ_0) es un punto crítico de la función de Lagrange, el signo de la forma cuadrática

$$d^2L_{(x_0,y_0,\lambda_0)} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0)+\lambda_0 g_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)+\lambda_0 g_{xy}(x_0,y_0) & g_x(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0)+\lambda_0 g_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)+\lambda_0 g_{yy}(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) & 0 \end{pmatrix}$$

determina el tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) condicionado.

Nota. Supóngase en el plano que la frontera de un conjunto U puede ser dividida en tramos de curvas representadas implícitamente. Así, pueden entenderse como candidatos a extremos absolutos en un tramo de la frontera aquellos que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} df_{(x,y)} + \lambda\, dg_{(x,y)} = 0 \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

los puntos que anulen el gradiente de g, y los puntos inicial y final del tramo de curva.

Ejemplo. Podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x$ de un método diferente del de la página 7 (véase figura 4).

La recta que delimita el recinto se expresa en forma implícita $g(x,y) = x - \sqrt{3} + 1 = 0$, aplicando los multiplicadores de Lagrange tenemos

$$\begin{cases} 2x - 1 + \lambda = 0 \\ 2y = 0 \\ x - \sqrt{3} + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{3} - 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

de donde obtenemos candidatos a extemos relativos: el punto $P_2 = (\sqrt{3} - 1, 0)$, junto con los extemos de la recta $Q_1 = ((\sqrt{3} - 1, -2)$ y $Q_2 = (\sqrt{3} - 1, 2)$.

Para calcular los candidatos a extremos relativos sobre la hipérbola descrita por la función implícita $g(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + 6x + 2 = 0$, aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} 2x - 1 + \lambda\,(6x + 6) = 0 \\ 2y - \lambda\, 4y = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases}$$

que nos proporciona los puntos $P_3 = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ para $(\lambda = \frac{1}{2})$, $P_4 = (-\frac{3\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}}, 0)$ para $(\lambda = \frac{3\sqrt{3}-2}{6})$ y $P_5 = (-\frac{3\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}}, 0))$ para $(\lambda = -\frac{3\sqrt{3}+2}{6})$. El último punto P_5 queda descartado porque no pertenece a la rama de la hipérbola que encierra el recinto que tratamos. A estos hay que añadir los puntos que anulan el gradiente de g

$$\nabla g(x,y) = (6x + 6, -4y) = (0,0) \iff x = -1, y = 0$$

que nos da un punto que no está en el recinto, junto con los extemos de la curva, los referidos puntos Q_1 y Q_2.

4.2. Extremos relativos condicionados a una superficie en el espacio

Sean $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar donde U es un conjunto abierto y $g(x,y,z) = 0$ una superficie en forma implícita definida en U. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto de la superficie, esto es $g(x_0, y_0, z_0) = 0$. Se dice que f alcanza en (x_0, y_0, z_0) un máximo (resp. mínimo) relativo condicionado a $g(x,y,z) = 0$ si existe un entorno de (x_0, y_0, z_0) de manera que para todo punto (x,y,z) perteneciente a dicho entorno tal que $g(x,y,z) = 0$ se verifica que $f(x,y,z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$ (resp. $f(x,y,z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$). Los máximos y mínimos relativos de f condicionados a $g(x,y,z) = 0$ se denominan conjuntamente extremos relativos de f condicionados a la superficie $g(x,y,z) = 0$.

Multiplicadores de Lagrange para una ecuación en el espacio. Sea un campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en un abierto U y sea $g(x,y,z)=0$ una superficie en forma implícita de manera que g es de clase C^1 en U. Sea $(x_0,y_0,z_0)\in U$ un punto de la superficie que verifica $dg_{(x_0,y_0,z_0)} \neq (0,0,0)$. Si f alcanza un extremo relativo condicionado a $g(x,y,z)=0$ en (x_0,y_0,z_0) entonces existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$df_{(x_0,y_0,z_0)} + \lambda\, dg_{(x_0,y_0,z_0)} = 0.$$

Al escalar λ se le denomina *multiplicador de Lagrange.*

Método. Definimos la *función de Lagrange* como $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$. Entonces los extremos relativos condicionados se obtienen entre los puntos que anulan la diferencial $dL_{(x,y,z,\lambda)}=(0,0,0,0)$, o lo que es equivalente entre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)+\lambda g_x(x,y,z)=0 \\ f_y(x,y,z)+\lambda g_y(x,y,z)=0 \\ f_z(x,y,z)+\lambda g_z(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Si (x_0,y_0,z_0,λ_0) es un punto crítico de la función de Lagrange, el signo de la forma cuadrática $d^2L_{(x_0,y_0,z_0,\lambda_0)}$ (de dimensión 4).

Nota. Supóngase en el espacio que la frontera de un conjunto U puede ser dividida en porciones de superficies representadas implícitamente. Así, pueden entenderse como candidatos a extremos absolutos en cada porción de la forma $g(x,y,z)=0$ los siguientes puntos de dicha porción: los puntos (x,y,z) que verifiquen el sistema

$$\begin{cases} df_{(x,y,z)} + \lambda\, dg_{(x,y,z)} = 0 \\ g(x,y,z)=0, \end{cases}$$

los puntos que anulen el gradiente de g, y los candidatos a ser extremos absolutos situados en el borde de dicha porción. Obsérvese que el borde de cada porción de superficie está formado por tramos de curvas.

4.3. Extremo relativo condicionado a una curva en el espacio

Sea un campo escalar $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ donde U es un conjunto abierto y sea $\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ una curva en forma implícita definida en U. Sea (x_0,y_0,z_0) un punto de la curva, esto es $\begin{cases} g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$. Se dice que f alcanza en (x_0,y_0,z_0) un máximo (resp. mínimo) relativo condicionado a $\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ si existe un entorno de (x_0,y_0,z_0) de manera que para todo punto (x,y,z) perteneciente a dicho entorno tal que $\begin{cases} g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$ se verifica la desigualdad $f(x,y,z)\le f(x_0,y_0,z_0)$ (resp. $f(x,y,z)\ge f(x_0,y_0,z_0)$).

Los máximos y mínimos relativos de f condicionados a $\begin{cases} g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$ se denominan conjuntamente extremos relativos de f condicionados a $\begin{cases} g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$.

Multiplicadores de Lagrange para dos ecuaciones en el espacio. Sea un campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en un abierto U y sean $\left\{ \begin{array}{l} g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{array} \right.$ una curva en forma implícita de manera que g_1, g_2 son de clase C^1 en U. Sea $(x_0,y_0,z_0)\in U$ un punto de la superficie que verifica $dg_{1(x_0,y_0,z_0)}$ y $dg_{2(x_0,y_0,z_0)}$ son linealmente independientes. Si f alcanza un extremo relativo condicionado a $\left\{ \begin{array}{l} g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{array} \right.$ en (x_0,y_0,z_0) entonces existen $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tal que

$$df_{(x_0,y_0,z_0)} + \lambda\, dg_{1(x_0,y_0,z_0)} + \mu\, dg_{2(x_0,y_0,z_0)} = 0.$$

A loa escalares λ y μ se le denomina *multiplicadores de Lagrange*.

Método. Definimos la *función de Lagrange* como $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g_1(x,y,z) + \mu g_2(x,y,z)$. Entonces los extremos relativos condicionados se obtienen entre los puntos que anulan la diferencial $dL_{(x,y,z,\lambda,\mu)} = (0,0,0,0,0)$, o lo que es equivalente entre las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y,z) + \lambda g_{1x}(x,y,z) + \mu g_{2x}(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) + \lambda g_{1y}(x,y,z) + \mu g_{2y}(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) + \lambda g_{1z}(x,y,z) + \mu g_{2z}(x,y,z) = 0 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{array} \right.$$

Si $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ es un punto crítico de la función de Lagrange, el signo de la forma cuadrática $d^2L_{(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}$ (de dimensión 5).

Nota. En el espacio, el borde de cada porción de frontera de un conjunto U puede suponerse dividido en tramos de curvas. Así, los candidatos a extremos absolutos en cada tramo de la forma $\left\{ \begin{array}{l} g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{array} \right.$ son los siguientes puntos de dicho tramo: los puntos (x,y,z) que verifiquen el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} df_{(x,y,z)} + \lambda\, dg_{1(x,y,z)} + \mu\, dg_{2(x,y,z)} = 0 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0, \end{array} \right.$$

los puntos para los cuales $dg_{1(x,y,z)}$ y $dg_{2(x,y,z)}$ son linealmente independientes, y los puntos inicial y final del tramo de curva.

OCW UMA

Rodríguez Sánchez, F.J.y otros
2014. OCW-Universidad de Málaga, http://ocw.uma.es. Bajo licencia Creative Commons Attribution- NonComercial-ShareAlike 3.0 Spain