Matemáticas III
Soluciones a la primera prueba de Evaluación
Diferenciación

Debe tener en cuenta que los métodos de resolución son variados, por tanto, los ejercicios pueden estar correctamente resueltos aunque no se hagan como aquí se expone.

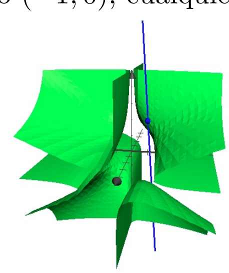
Solución (Ejercicio 1) — Considerando $z = z(x,y)$ donde es posible y derivando, respectivamente, la expresión respecto de las variables x e y tenemos:

$$6xz + 3x^2\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy^2 + 6z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}},$$

$$3x^2\frac{\partial z}{\partial y} - 2x^2y + 6z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 3z + 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}}$$

Solución (Ejercicio 2) —

1. Definiendo $F(x,y,z) = xyz^3 - x^3z - 2$, vemos que $F_z(x,y,z) = 3xyz^2 - x^3$, y $F_z(-1,0,2) = 1 \neq 0$. Por tanto, alrededor de $(-1,0,2)$ podemos despejar $z = z(x,y)$.
   Por otro lado, derivando con respecto a x tenemos
   $$\left(3xyz^2 - x^3\right) z_x + yz^3 - 3x^2z = 0 \implies z_x(-1,0) = 6$$
   análogamente, derivando respecto a y tenemos
   $$\left(3xyz^2 - x^3\right) z_y + xz^3 = 0 \implies z_y(-1,0) = 8$$
   Luego el gradiente de z en el punto $(-1,0)$ es $\nabla z(-1,0) = (6,8)$.
2. La dirección donde la derivada direccional de z en un punto es máxima es la dirección del gradiente en dicho punto. Por tanto, haciendo $\vec{u} = \dfrac{\nabla z}{\|\nabla z\|} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ y calculando la derivada direccional $D_{\vec{u}}z(-1,0) = (6,8)\cdot\vec{u} = 10$, tenemos que el vector tangente es $v = (3/5, 4/5, 10)$ y, junto al punto $(-1,0)$, cualquier ecuación de esta recta es válida.



Solución (Ejercicio 3) — La función de Lagrange es $L(x,y,\lambda) = 3x^2 + y^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 9)$. Imponiendo la condición $\nabla L(x,y,\lambda) = 0$ llegamos al sistema

$$\begin{cases} 6x + 2\lambda x = 0, \\ 3y^2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Resolviéndolo, se obtienen los puntos críticos (x_0, y_0) siguientes:

$$(0,3),\ (0,-3),\ (3,0),\ (-3,0),\ (\sqrt{5},2), (-\sqrt{5},2).$$

Para determinar su carácter en este caso es suficiente con evaluar f en dichos puntos, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} &f(0,3) = f(3,0) = f(-3,0) = 27, \\ &f(0,-3) = -27, \\ &f(\sqrt{5},2) = f(-\sqrt{5},2) = 23. \end{aligned}$$

Por tanto, el máximo absoluto de $f(x,y) = 3x^2 + y^3$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ es 27 y el mínimo absoluto es -27.

Solución (Ejercicio 4) —

1. Tenemos que $\nabla f(x,y) = (2x, -2y+2)$. Como los puntos críticos son aquéllos que anulan el vector gradiente, el único punto crítico es el $(0,1)$. Para determinar su carácter recurrimos a la matriz hessiana,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

   que en este caso es constante, luego coincide con $Hf(0,1)$. Su determinante vale -4, que es negativo, y por tanto el punto $(0,1)$ es un punto de silla de la función.
2. En este caso $\nabla f(x,y) = (4x^3, -2y+2)$. El único punto crítico es de nuevo el $(0,1)$. La matriz hessiana de esta función es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

   que evaluada en el punto crítico vale

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Como el determinante de ésta vale 0, el criterio de la hessiana no nos permite determinar el carácter del punto crítico. Aún así, el "parecido" de esta función con la función del apartado anterior nos hace intuir que el punto crítico es de nuevo un punto de silla. Esto se puede comprobar fácilmente escribiendo la función en la forma $f(x,y) = x^4 - (y-1)^2$. Vemos entonces que $f(x,1) = x^4 \geq 0 = f(0,1)$ para todo x, en particular para los cercanos a 0, mientras que $f(0,y) = -(y-1)^2 \leq 0 = f(0,1)$ para todo y, en particular para los valores de y cercanos a 1. Por tanto, tan cerca de $(0,1)$ como queramos existen puntos en los que la función es mayor que en $(0,1)$, y también puntos en los que es menor, por lo que es un punto de silla.

Solución (Ejercicio 5) —

1. El punto dado de la superficie es $P = r(7,9) = (-32, 567, 94)$ y las derivadas parciales son $r_u(u,v) = (2u, 9v, 7)$ y $r_v(u,v) = (-2v, 9u, 5)$, luego los vectores tangentes de dicho punto P son $v_1 = r_u(7,9) = (14, 81, 7)$ y $v_2 = r_v(7,9) = (-18, 63, 5)$.
   El plano que pasa por P y tiene como vectores directores v_1 y v_2 es

$$\boxed{9\,x + 49\,y - 585\,z + 27495 = 0}$$

2. Parametrizando trivialmente la superficie como $\Phi(x,y) = (x, y, x^2+7y^2+5x)$ con $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\Phi_x = (1, 0, 2x+5), \Phi_y = (0, 1, 14y)$$

y para $x = 1, y = 0$ tenemos la primera forma fundamental

$$E = 50; \quad F = 0; \quad G = 1$$

Por otro lado, también para $x = 1, y = 0$

$$N = \frac{\Phi_x \times \Phi_y}{\sqrt{\Phi_x \times \Phi_y}} = \left(-\frac{7}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$$

y la segunda forma es:

$$e = N \cdot \Phi_{xx} = \left(-\frac{7}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \cdot (0,0,2) = \frac{\sqrt{2}}{5}$$
$$f = N \cdot \Phi_{xy} = \left(-\frac{7}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \cdot (0,0,0) = 0$$
$$g = N \cdot \Phi_{yy} = \left(-\frac{7}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \cdot (0,0,14) = \frac{7\sqrt{2}}{5}$$

Por tanto, $\boxed{K = \frac{7}{625}}$.

Solución (Ejercicio 6) — Tenemos $r(t) = (10\cos t, 9\,\mathrm{sen}\, t, 8t)$, derivando

$$r'(t) = (-10\,\mathrm{sen}\, t, 9\cos t, 8) \text{ y } r''(t) = (-10\cos t, -9\,\mathrm{sen}\, t, 0),$$

luego

$$r'(t) \times r''(t) = (72\,\mathrm{sen}\, t, -80\cos t, 90).$$

Aplicando la fórmula de la curvatura

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{1216\cos^2 t + 13284}}{\sqrt{164 - 19\cos^2 t}^3},$$

y por tanto

$$\kappa(\pi/2) = \frac{9}{164}.$$

Para calcular la torsión necesitamos la derivada tercera

$$r'''(t) = (10\,\mathrm{sen}\, t, -9\cos t, 0),$$

así que

$$r'(t) \times r''(t) \cdot r'''(t) = 720.$$

Aplicando la fórmula de la torsión

$$\tau(t) = \frac{r'(t) \times r''(t) \cdot r'''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2} = \frac{720}{1216\cos^2 t + 13284},$$

por lo que

$$\tau(\pi/2) = \frac{20}{369}.$$