Matemáticas III
Relación de ejercicios Tema 3

Ejercicios

Ej. 1 — Reparametriza respecto a la longitud de arco la circunferencia de radio r siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha: \quad [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

Ej. 2 — Comprueba que la hélice parametrizada como

$$\alpha(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad s \in \mathbb{R}$$

lo está por longitud de arco.
Calcula el triedro de Frenet y la curvatura y torsión de dicha hélice.

Ej. 3 — Sea la curva parametrizada respecto a la longitud de arco dada por

$$\beta(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s, 1 - \operatorname{sen} s, -\frac{3}{5}\cos s\right)$$

Hállese $\kappa(s)$, $\tau(s)$ y el triedro de Frenet. Demuestra que esta curva es una circunferencia y halle su centro y radio.

Ej. 4 — Demuestra que la curva $x = a\operatorname{sen}^2 t$, $y = a\operatorname{sen} t\cos t$, $z = a\cos t$ está sobre la esfera $\mathbb{S}^2(a)$ y que todos los planos osculadores y normales de esta curva pasan por el origen.

Ej. 5 — Sea β una curva regular parametrizada respecto de la longitud de arco sin puntos de singularidad de orden 1.
La recta normal a β en $\beta(s)$ es la recta que pasa por $\beta(s)$ y tiene vector de dirección $\vec{n}(s)$. Supongamos que todas las rectas normales a β pasan por un punto fijo. ¿Que se puede decir acerca de la curva?

Ej. 6 —

1. Prueba que $\operatorname{arg\,senh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
2. Usa el resultado anterior para parametrizar, respecto a la longitud de arco, la curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ comenzando en $t = 0$.

Ej. 7 — Demuestre que si todas las tangentes a una curva pasan por un punto fijo, dicha curva es una recta.

Ej. 8 — Calcule las ecuaciones de las tres rectas normales a la curva $xy = 4$ que pasan a través del punto $(5, 5)$.

Ej. 9 — El lugar del punto de intersección de la tangente a una curva $\mathcal{C}$ con la perpendicular sobre esta tangente trazado por un punto A, se llama *podaria de* $\mathcal{C}$ *respecto de* A. Hállese la podaria de una circunferencia de centro $(2a, 0)$ y radio $2a$ respecto al punto $A = (0, 0)$.

Ej. 10 — Calcula la longitud de las curvas siguientes:

1. la definida en polares como $\rho = 3 \operatorname{sen} \theta$ con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.
2. la parábola $y = x^2$ entre los puntos $x = 0$ y $x = a$.
3. la espiral logarítmica $\rho = e^{-\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2n\pi$.
4. la curva que se obtiene al intersecar las superficies $y = x^2$ y $z = \frac{2}{3}xy$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(3, 9, 18)$.

Ej. 11 — Calcula la curvatura de las curvas definidas en el problema 10 anterior. Además calcula la torsión de la curva alabeada definida en el ejercicio 10.4.

Ej. 12 — Expresa una parametrización del elipsoide que tiene por ecuación

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$$

Encuentra una base, la ecuación implícita del plano tangente, así como el vector unitario, del elipsoide en el punto $p(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Ej. 13 — Usa algún software tipo CAS (Computer Algebra System) para calcular la primera y la segunda forma fundamental, el operador de Weingarten, las curvaturas de Gauss K y media H, del elipsoide del ejercicio 12 anterior. Comprueba (gráficamente) que todos los puntos son elípticos ($K > 0$).

Ej. 14 — Comprueba que el cono S de ecuación implícita $z^2 = x^2 + y^2$ con $z > 0$ se puede parametrizar de la forma

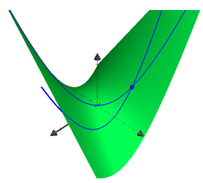
$$\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, \rho)\,, \text{ con } \rho \in (0, \infty),\ \theta \in (0, 2\pi)$$

Comprueba, además, que la imagen de la aplicación de Gauss $N\colon S \to \mathbb{S}^2$ es uno de los paralelos de la esfera, ¿cuál?

Ej. 15 — Comprueba que las curvas definidas en forma paramétrica

$$\alpha(t) = \big(t, 1, t^2 - t\big)$$
$$\beta(t) = \big(t - 1, 1 - t, 2\,t^2 - 4\,t + 2\big)$$

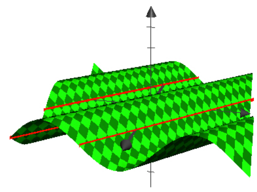
se cortan en un punto y ambas están contenidas en la superficie $z = x(x - y)$.



1. Calcula el coseno del ángulo que forman ambas rectas en el punto de corte.
2. Usa la primera forma fundamental de la superficie dada para encontrar, de otra forma, el coseno del ángulo que forman ambas rectas en su punto de corte.

Ej. 16 — Calcula la curvatura de Gauss y la curvatura media de la superficie $z = x(x - y)$ del problema anterior.

Ej. 17 — Comprueba que los puntos de la superficie $z = \text{sen}(x+y)$ son puntos parabólicos (es decir, $K=0$). Prueba, además, que los que también pertenecen a los planos $x+y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, son puntos llanos ($dN = 0$).



Ej. 18 — Demuéstrese que para todos los planos tangentes a la superficie $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3} = a^{2/3}$, la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos que unen el origen a los puntos de intersección con los ejes coordenados es constante.

Soluciones

Solución (Ej. 1) — Como $s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 \,\text{sen}^t + r^2 \cos^t}\, dt = r\,t$, tenemos que $t(s) = \frac{s}{r}$, luego

$$\beta(s) = (\alpha \circ t)(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \,\text{sen}\, \frac{s}{r} \right)$$

Solución (Ej. 2) — Tenemos $\alpha'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \,\text{sen}\, \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y, puesto que

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{1}{2} \,\text{sen}^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} = 1$$

sabemos que α es una parametrización por arco y $\vec{t} = \alpha'(s)$.
Además $\alpha''(s) = \left(-\dfrac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2} \,\text{sen}\, \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$, de donde la curvatura es $\kappa = \frac{1}{2}$ y el vector normal es $\vec{n} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\text{sen}\, \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. Por último el vector binormal es

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \,\text{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

y su derivada $\vec{b}\,' = -\dfrac{1}{2} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\text{sen}\, \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) = -\dfrac{1}{2}\, \vec{n}$, por tanto la torsión es

$$\tau = \frac{1}{2}$$

Solución (Ej. 3) — Es fácil comprobar que $\beta''(s) = (-\frac{4}{5} \cos(s), \text{sen}(s), \frac{3}{5} \cos(s))$ tiene módulo constante 1, luego la curvatura es $\kappa = 1$. Por otro lado el vector binormal es constante $\vec{b} = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right)$ y de aquí que $\vec{b}\,'(s) = \vec{0}$, luego la torsión es $\tau = 0$ o lo que es lo mismo **la curva es plana**. Una curva plana de curvatura constante es una circunferencia (o un arco de circunferencia) y su radio es $R = 1/\kappa = 1$.

El centro podemos calcularlo haciendo la intersección de dos diámetros. Para $s = 0$ tenemos un diámetro que es la recta $r1 \equiv (4/5 - 4/5\lambda, 1, -3/5 + 3/5\lambda)$ y para $s = \pi/2$ tenemos otro diámetro $r2 \equiv (0, \mu, 0)$. La intersección de ambas es el centro $C = (0, 1, 0)$.

Solución (Ej. 4) — Para ver que la curva está contenida en la esfera $\mathbb{S}^2(a)$, tenemos que ver que la distancia al origen es a

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^4 t + a^2 \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t} = a$$

Por otro lado, derivando y simplificando, obtenemos un vector (no unitario) en la dirección tangente a la curva

$$T = (\sin 2t, \cos 2t, -\sin t)$$

y un normal (unitario) a la curva es el propio vector de posición (porque está en una esfera) y que podemos simplificar,

$$N = \left(\sin^2 t, \cos t\ \sin t, \cos t\right)$$

Por tanto, el plano osculador (determinado por T y N) en un punto es:

$$\begin{vmatrix} x - a \sin^2 t & y - a \cos t \sin t & z - a \cos t \\ \sin 2t & \cos 2t & -\sin t \\ \sin^2 t & \cos t \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \sin 2t & \cos 2t & -\sin t \\ \sin^2 t & \cos t \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 0$$

que, evidentemente, pasa por el origen de coordenadas.
De la misma forma, el vector binormal es proporcional a $T \times N = B(B1, B2, B3)$, por tanto, la ecuación del plano normal (determinado por los vectores N y B) en un punto se puede expresar

$$\begin{vmatrix} x - a \sin^2 t & y - a \cos t \sin t & z - a \cos t \\ \sin^2 t & \cos t \sin t & \cos t \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

que, claramente, pasa por el origen.

Solución (Ej. 5) — Si C es el punto donde se cortan las rectas normales. La curva $\alpha = \beta - C$ cumple $\alpha' = \beta'$ y $\alpha'' = \beta''$, por tanto está parametrizada por longitud de arco y sus rectas normales se cortan en el origen de coordenadas. Esto último nos proporciona la ecuación

$$\alpha(s) = \lambda(s)\alpha''(s)$$

Sea $\kappa = \|\alpha''\|$ la curvatura de α (o de β). Así, tenemos $\alpha \cdot \alpha = \lambda^2\kappa^2$ y, puesto que $\alpha \cdot \alpha' = 0$, derivando

$$\alpha' \cdot \alpha' + \alpha \cdot \alpha'' = 0 \Rightarrow \lambda\kappa^2 = -1 \Rightarrow \lambda = -1/\kappa^2$$

Es decir $\|\alpha\| = 1/\kappa = R$. Derivando tenemos $R' = \frac{d\|\alpha\|}{ds} = \frac{\alpha \cdot \alpha'}{\|\alpha\|} = 0$, que nos prueba que el radio de curvatura es constante.
Por otro lado, si $\vec{b}$ es el vector binormal, sabemos que

$$\vec{b}' = \vec{t} \times \vec{n}' = \alpha' \times \left(\frac{\alpha''}{\kappa}\right)' = \alpha' \times (\kappa\alpha)' = \vec{0}$$

de donde la curva es plana (porque tiene torsión cero).
Es decir, la curva es plana de curvatura constante, por tanto, es **un arco de circunferencia**.

Solución (Ej. 6) —

1. Si $y = \arg\operatorname{senh} x$, entonces $x = \operatorname{senh} y$ y sabemos que

$$\begin{aligned}
&\cosh y = \tfrac{e^y+e^{-y}}{2}, \quad \operatorname{senh} y = \tfrac{e^y-e^{-y}}{2} \\
&\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \\
&e^y = \operatorname{senh} y + \cosh y
\end{aligned}$$

   De aquí se obtiene el resultado.

2. El vector velocidad es $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ de donde la longitud de arco

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\|\, dx = \int_0^t \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2}\, dx = 2 \operatorname{senh} t$$

   luego $t = \arg\operatorname{senh}(s/2) = \ln\left(\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2+4}}{2}\right)$.
   De aquí que la curva parametrizada por longitud de arco es

$$\beta(s) = \left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}, \frac{2}{s+\sqrt{s^2+4}}, \sqrt{2}\, \ln\left(\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2+4}}{2}\right)\right)$$

Solución (Ej. 7) — Podemos suponer (haciendo una traslación) que el punto fijo es el origen de coordenadas y que está parametrizada por longitud de arco, entonces la curva α se puede expresar

$$\alpha(s) = \lambda(s)\alpha'(s)$$

derivando tenemos $\alpha' = \lambda'\alpha' + \lambda\alpha''$ y como $\alpha' \perp \lambda\alpha''$ tenemos

$$\alpha' \cdot (\alpha' - \lambda'\alpha') = 0 \Rightarrow \lambda' = 1 \Rightarrow \lambda = s + cte$$

De lo anterior deducimos que $(s + cte)\alpha''(s) = 0$, luego necesariamente ha de ser $\alpha'' = 0$ que hace que α' sea un vector constante que es equivalente a que α sea una recta.

Solución (Ej. 8) — Si parametrizamos una rama de esta curva como $\alpha(t) = (4t, 1/t)$ con $t > 0$, tenemos que $\alpha'(t) = (4, -1/t^2)$, luego un vector con la dirección normal en cada punto es $(1/t^2, 4)$ que nos da el haz de rectas normales en cada punto

$$N_t(\lambda) \equiv \begin{cases} x = 4t + \frac{\lambda}{t^2} \\ y = \frac{1}{t} + 4\lambda \end{cases}$$

Para encontrar cuáles de ellas pasan por el punto $(5, 5)$ planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4t + \frac{\lambda}{t^2} = 5 \\ \frac{1}{t} + 4\lambda = 5 \end{cases} \iff \lambda = 5t^2 - 4t^3 \text{ y } 16\,t^4 - 20\,t^3 + 5\,t - 1 = 0$$

esta última ecuación polinómica tiene cuatro soluciones $t = 1$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$ y $t = -\frac{1}{2}$.
Obsérvese que la última solución no se corresponde con la rama de la hipérbola elegida ($t > 0$) y además nos da la misma recta normal que $t = \frac{1}{2}$. Por tanto, las tres rectas normales se obtienen

de los puntos $\alpha(t)$ y los vectores de dirección siguientes:

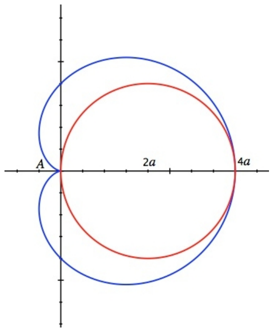
$$
\begin{aligned}
t = 1 &\Rightarrow \alpha(1) = (4,1), \vec{v} = (1,4) \Rightarrow y - 1 = 4(x-4) \\
t = \frac{1}{2} &\Rightarrow \alpha(1/2) = (2,2), \vec{v} = (4,4) \Rightarrow y - 2 = (x-2) \\
t = \frac{1}{4} &\Rightarrow \alpha(1/4) = (1,4), \vec{v} = (16,4) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{4}(x-1)
\end{aligned}
$$

Solución (Ej. 9) — La circunferencia se parametriza como $\mathcal{C} = (2a + 2a\cos t, 2a \operatorname{sen} t)$. Un vector en la dirección tangente es $(-\operatorname{sen} t, \cos t)$. Entonces la recta tangente que pasa por un punto en t es

$$T \equiv \frac{x - 2a\cos t - 2a}{-\operatorname{sen} t} = \frac{y - 2a \operatorname{sen} t}{\cos t} \equiv x\cos t + y \operatorname{sen} t = 2a + 2a\cos t$$

y la recta perpendicular a esta que pasa por el origen de coordenadas es

$$N \equiv x \operatorname{sen} t - y \cos t = 0$$



La intersección de R y N es el lugar geométrico que nos piden que es una curva

$$\alpha(t) = \left(2a\cos t\ (1+\cos t), 2a \operatorname{sen} t\,(1+\cos t)\right)$$

y que se corresponde con una cardioide.

Solución (Ej. 10) —

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\,d\theta = 3\pi$.
2. $\int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arg\,senh}(2\,a)}{4} + \frac{a\,\sqrt{4\,a^2+1}}{2}$
3. $\int_0^{2n\pi} \sqrt{2}\,e^{-t}\,dt = \sqrt{2}\,\left(1 - e^{-2\,n\,\pi}\right)$.
4. Parametrizamos como $\alpha(t) = \left(t, t^2, \frac{2\,t^3}{3}\right)$ que toma los puntos en $t=0$ y $t=3$.

$$\int_0^3 \sqrt{1+4\,t^2+4\,t^4}\,dt = \int_0^3 (2t^2+1)\,dt = 21$$

Solución (Ej. 11) —

1. $\begin{cases} x(\theta) = 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ y(\theta) = 3\operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$, luego $\kappa = \dfrac{|x'y''-y'x''|}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}} = \dfrac{2}{3}$. Es una circunferencia.
2. Una parametrización estándar es $x(t) = t, y(t) = t^2$. Entonces $\kappa = \frac{2}{(4\,t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.
3. Haciendo $x(\theta) = e^{-\theta}\cos\theta$, $y(\theta) = e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta$ tenemos $\kappa = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}}$.
4. Con la parametrización dada en el problema anterior, tenemos

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$

y, como $\alpha'''(t) = (0, 0, 4)$, la torsión es:

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$

Solución (Ej. 12) — Una parametrización $\Phi = (x, y, z)$ es la siguiente:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos u \cos v \\ y = \cos u \operatorname{sen} v \\ z = \sqrt{2}\operatorname{sen} u \end{cases}$$

con $-\pi/2 < u < \pi/2$ y $0 < v < 2\pi$, obteniéndose el punto p con $u = \pi/4, v = 3\pi/4$. Las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} \Phi_u &= \left(-\sqrt{2}\operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \sqrt{2}\cos u\right) \\ \Phi_v &= \left(-\sqrt{2}\cos u \ \operatorname{sen} v, \cos u \ \cos v, 0\right) \end{aligned}$$

Así obtenemos una base del plano tangente en p:

$$\Phi_u\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1\right) \text{ y } \Phi_v\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

luego la ecuación del plano tangente en dicho punto es

$$-\sqrt{2}\,x + 2\,y + 2\,z = 4$$

El vector normal unitario en p es $N = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

Solución (Ej. 13) —

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} 2 - \sin(u)^2 \sin(v)^2 & \cos(u)\ \sin(u)\ \cos(v)\ \sin(v) \\ \cos(u)\ \sin(u)\ \cos(v)\ \sin(v) & \cos(u)^2 \sin(v)^2 + \cos(u)^2 \end{pmatrix}$$

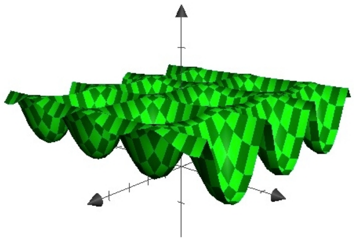
$$N_p = \left(-\frac{\sqrt{2}\cos(u)^2\cos(v)}{\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}, -\frac{2\cos(u)^2\sin(v)}{\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}, -\frac{\sqrt{2}\cos(u)\sin(u)}{\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}\right)$$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \frac{2\cos(u)}{\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\cos(u)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}{\cos(u)^2\sin(v)^2+1} \end{pmatrix}$$

$$dN_p = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(u)\sin(v)^2+\cos(u)}{\left(\cos(u)^2\sin(v)^2+1\right)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}} & \frac{\sin(u)\cos(v)\sin(v)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}{2\cos(u)^4\sin(v)^4+4\cos(u)^2\sin(v)^2+2} \\ \frac{\sin(u)\cos(v)\sin(v)}{\left(\cos(u)^2\sin(v)^2+1\right)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}} & -\frac{\left(\cos(u)^3-\cos(u)\right)\sin(v)^2+2\cos(u)}{\left(\cos(u)^2\sin(v)^2+1\right)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}} \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\left(\cos(u)^2 - 1\right)\sin(v)^4 + \left(-\sin(u)^2\cos(v)^2 + \cos(u)^2 + 1\right)\sin(v)^2 + 2}{2\cos(u)^6\sin(v)^6 + 6\cos(u)^4\sin(v)^4 + 6\cos(u)^2\sin(v)^2 + 2} \tag{1}$$

$$H = \frac{\left(\cos(u)^2\sin(v)^2 + 3\right)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2 + 2\cos(u)^2}}{4\cos(u)^5\sin(v)^4 + 8\cos(u)^3\sin(v)^2 + 4\cos(u)}$$



Solución (Ej. 14) — La comprobación es trivial.
La aplicación de Gauss nos da

$$N(\rho,\theta)=\left(-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}},-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Si parametrizamos la esfera $\mathbb{S}^2$ de la forma

$$\begin{aligned}x(\varphi,\alpha)&=\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha\\ y(\varphi,\alpha)&=\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha\\ z(\varphi,\alpha)&=\cos\varphi\end{aligned}$$

donde $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ nos da los paralelos y $0\leq\alpha<2\pi$ los meridianos, tenemos que $N(\rho,\theta)$ caen en el paralelo de la esfera $\varphi=-\pi/4$ (hemisferio sur, para entendernos).

Solución (Ej. 15) — Las curvas se corten en el punto $p=(-1,1,2)=\alpha(-1)=\beta(0)$. La comprobación de que ambas están contenidas en la superficie es trivial.

1. Tenenos dos vectores del plano tangente determinado por cada una de las curvas

   $$\alpha'(-1)=(1,0,-3),\ \beta'(0)=(1,-1,-4)$$

   que tiene $\cos\theta=\frac{13}{3\sqrt{2}\sqrt{10}}$.
2. Parametrizando la superficie como $\Phi(u,v)=(u,v,u\,(u-v))$, tenemos

   $$\Phi_u(u,v)=(1,0,2u-v),\ \Phi_v(u,v)=(0,1,-u)$$

   Calculamos la primera forma fundamental.

   $$E=(2u-v)^2+1,\ F=-u\,(2u-v)\,,\ G=u^2+1$$

   El punto $p=(-1,1,2)$ se tiene para $u=-1,v=1$, luego la primera forma fundamental en este punto es $E=10,\ F=-3,\ G=2$.
   Por otro lado, la curva α se obtiene de Φ para $u=t,v=1\Rightarrow u'=1,v'=0$. La curva β se obtiene de Φ para $u=t-1,v=1-t\Rightarrow u'=1,v'=-1$ El producto escalar de las curvas en punto es

   $$\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=13$$

   De igual manera se calcula

   $$\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=10\text{ y }\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=18$$

   De donde se obtiene el mismo coseno que en el apartado anterior.

Solución (Ej. 16) — Tenemos la primera forma fundamental, del ejercicio anterior.

$$E = (2u - v)^2 + 1,\ \ F = -u\,(2u - v)\,, G = u^2 + 1$$

De la ecuación implícita de la superficie $x(x - y) - z = 0$ podemos sacar el gradiente

$$\nabla f = (2x - y, -x, -1) = (2u - v, -u, -1)$$

Con este método puede que la orientación del vector normal sea contraria a la buscada, respecto a la base del plano tangente $\{\Phi_u, \Phi_v\}$, comprobamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2u - v \\ 0 & 1 & -u \\ 2u - v & -u & -1 \end{vmatrix} = -(2u - v)^2 - u^2 - 1 < 0$$

luego, invertimos la orientación y normalizamos para obtener la aplicación de Gauss

$$N(u, v) = \left(\frac{v - 2u}{\sqrt{v^2 - 4uv + 5u^2 + 1}}, \frac{u}{\sqrt{v^2 - 4uv + 5u^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4uv + 5u^2 + 1}}\right)$$

(Se podría haber hecho con el producto vectorial $\Phi_u \wedge \Phi_v$.) Las derivadas segundas de Φ son

$$\Phi_{uu} = (0, 0, 2),\ \ \Phi_{uv} = (0, 0, -1),\ \ \Phi_{vv} = (0, 0, 0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \Phi_{uu}\rangle = \frac{2}{\sqrt{v^2 - 4\,u\,v + 5\,u^2 + 1}} \\ f &= \langle N, \Phi_{uv}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{v^2 - 4\,u\,v + 5\,u^2 + 1}} \\ g &= \langle N, \Phi_{vv}\rangle = 0 \end{aligned}$$

La curvatura de Gauss es

$$K = \frac{-1}{\left(v^2 - 4\,u\,v + 5\,u^2 + 1\right)^2}$$

y la curvatura media es

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \left(uv - u^2 + 1\right)\ \sqrt{v^2 - 4uv + 5u^2 + 1}$$

Solución (Ej. 17) — Si parametrimos como $\Phi(x, y) = (x, y, \operatorname{sen}(x + y))$, el endomorfismo de Weingarten, en cada punto es:

$$dN_p = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sen}(y+x)}{(2\cos^2(y+x)+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\operatorname{sen}(y+x)}{(2\cos^2(y+x)+1)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\operatorname{sen}(y+x)}{(2\cos^2(y+x)+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\operatorname{sen}(y+x)}{(2\cos^2(y+x)+1)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Solución (Ej. 18) — Parametrizando $\Phi(u,v) = \left(u^3, v^3, \left(-v^2-u^2+a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$, obtenemos el plano tangente $\sqrt{-v^2-u^2+a^{\frac{2}{3}}}\left(uv^2x+u^2vy-a^{\frac{2}{3}}u^2v^2\right)+u^2v^2z=0.$
Por tanto los puntos de corte de este plano tangente con los tres ejes coordenados son

$$X=(a^{\frac{2}{3}}u,0,0),\ Y=(0,a^{\frac{2}{3}}v,0),\ Z=\left(0,0,a^{\frac{2}{3}}\sqrt{-v^2-u^2+a^{\frac{2}{3}}}\right)$$

de donde la suma de las tres distancias al origen al cuadrado es

$$a^{\frac{4}{3}}u^2+a^{\frac{4}{3}}v^2+a^{\frac{4}{3}}(-v^2-u^2+a^{\frac{2}{3}})=a^2$$