Matemáticas III
Relación de ejercicios Tema 4

Ejercicios

Ej. 1 — Calcula las siguientes integrales dobles sobre rectángulos.

1. $\displaystyle\iint_{[1,2]\times[0,3]} (xy+x)\,dxdy$
2. $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \cos(x+y)\,dxdy$
3. $\displaystyle\iint_{[1,3]\times[-1,1]} (x^2y+xe^y)\,dxdy$
4. $\displaystyle\iint_{[1,2]\times[1,2]} (x^2+y^2+xy-3x)\,dxdy$

Ej. 2 — Calcula las siguientes integrales dobles.

1. $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$, donde D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,2)$.
2. $\displaystyle\iint_D 2xydxdy$, donde D es la región encerrada entre las curvas $y=x^2$ e $y=x^3$.
3. $\displaystyle\iint_D (x-y)\,dxdy$, donde D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.
4. $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$, donde D es la región del primer cuadrante donde $x\geq y^2$ y $x+y\leq 2$.
5. $\displaystyle\iint_D x^3y^3\,dxdy$, donde D es la región del primer cuadrante encerrada por las curvas $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=2$, $x^2-y^2=1$ y $x^2-y^2=2$.
6. $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$ siendo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 2x,\ x^2+y^2\leq 2y\}$.

Ej. 3 — Resuelve las siguientes integrales dobles.

1. $\displaystyle\int_0^1\left[\int_x^1 e^{y^2}\,dy\right]dx$
2. $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{\operatorname{arc\,sen} y}^{\frac{\pi}{2}y} x\,dx\right]dy$
3. $\displaystyle\int_0^1\left[\int_{y^2}^1 \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x\,dx\right]dy$
4. $\displaystyle\int_0^3\left[\int_1^{\sqrt{4-x}} \frac{\operatorname{sen}(\pi y)}{2-y}\,dy\right]dx$

Ej. 4 — Utiliza un cambio de variables para resolver las siguientes integrales dobles.

1. $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, donde D es el paralelogramo encerrado por las rectas $y=2x$, $y=2x-2$, $y=x$ e $y=x+1$.

2. $\displaystyle\iint_D x^3y^3\,dxdy$, donde D es la región del primer cuadrante encerrada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 2$.
3. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
4. $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, x^2 + y^2 \leq 2x\}$.
5. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x}\,dxdy$, donde D es la región del primer cuadrante exterior a la curva cardioide $r = 1 + cos\theta$ e interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 3x$.
6. $\displaystyle\iint_D \ln(x^2 + y^2)\,dxdy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x, y \geq 0\}$.
7. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{xy}\,dxdy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x,\ x, y \geq 0\}$.
8. $\displaystyle\iint_D x^2y^2\,dxdy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2, x \leq y \leq 4x,\ x, y \geq 0\}$.

Ej. 5 — Halla el área de las siguientes regiones del plano.

1. El área de una elipse de semiejes $a, b > 0$.
2. El área de la región

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x + y \leq 2, y \leq x, x^2 - y^2 \leq 1\right\}.$$

3. El área encerrada por la cardioide $r = 3 + 2\cos\theta$.
4. El área de la región del primer cuadrante encerrada por las siguientes curvas $x^2 - y^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 1$, $x + y = 1$ y $x + y = 2$.

Ej. 6 — Calcula las siguientes integrales triples sobre paralelepípedos.

1. $\displaystyle\iiint_{[-1,2]\times[0,2]\times[1,2]} (x + y + z)\,dxdydz$.
2. $\displaystyle\iiint_{[0,1]\times[1,3]\times[-1,2]} (xy + 2z)\,dxdydz$.
3. $\displaystyle\iiint_{[1,4]\times[-2,2]\times[0,3]} (x^2z)\,dxdydz$.

Ej. 7 — Halla las siguientes integrales triples.

1. $\displaystyle\iiint_V x\,dxdydz$, donde V es la región del octante positivo interior al paraboloide $x^2+y^2 = z$ y con $z \leq 2$.
2. $\displaystyle\iiint_V z\,dxdydz$, donde V es el sólido acotado superiormente por el elipsoide $x^2+4y^2+z^2 = 9$ e inferiormente por el paraboloide $z + 3 = x^2 + 4y^2$.
3. $\displaystyle\iiint_V (1 + x)\,dxdydz$, donde V es el sólido con $z \geq 0$ acotado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ e inferiormente por el cono de ecuación $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Ej. 8 — Calcula las siguientes integrales triples usando algún cambio de variables.

1. $\displaystyle\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz$, donde
$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x+y+z\le 2,\ 0\le x+y\le 2,\ 0\le x\le 1\}$$

2. $\displaystyle\iiint_V \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, donde
$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y,z\le 0,\ 0\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$$

3. $\displaystyle\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, donde V es el trozo de la esfera unidad limitado por el cono de ecuación $z^2=(x-1)^2+y^2$ en el octante positivo.
4. $\displaystyle\iiint_V \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 dxdydz$, donde $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in[0,2], x^2+y^2\le z^2\right\}$.
5. $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, donde
$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 2y,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\right\}.$$

6. $\displaystyle\iiint_V xy\,dxdydz$, donde $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4x^2+2y^2\ge z, 2x^2+y^2\le 1, x,y,z\ge 0\right\}$.

Ej. 9 — Halla el volumen de los siguientes sólidos.
1. El sólido del primer octante interior al cilindro $y^2+z^2=1$ encerrado entre los planos $x+y=1$ y $x+y=3$.
2. $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2(x^2+y^2)\le z\le 4\right\}$.
3. El sólido del primer octante que es interior al cilindro $x^2+y^2=2y$ y exterior al cono $z^2=x^2+y^2$.
4. $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2y, x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$.
5. La esfera de radio $a>0$.
6. $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le z^2, x^2+y^2+z^2\le 9\right\}$.
7. El sólido acotado por los paraboloides $x^2+2y^2=z$ y $2x^2+y^2=12-z$.
8. $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1, |y|\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$.
9. $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2y, 0\le z\le x^2+y^2\right\}$.
10. El sólido acotado entre dos esferas y un cono en el semiespacio superior,
$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2,\ x^2+y^2\le z^2, z\ge 0\right\}.$$

Soluciones

Solución (Ej. 1) —

1. $\dfrac{45}{4}$ 2. 0 3. $4\,e-4\,e^{-1}$ 4. $\dfrac{29}{12}$

Solución (Ej. 2) —

1. $\dfrac{4}{3}$
2. $\dfrac{1}{24}$
3. $\dfrac{-2}{3}$
4. $\dfrac{5}{12}$
5. $\dfrac{7}{16}$
6. $\dfrac{\pi-2}{2}$

Solución (Ej. 3) —

1. $\dfrac{e-1}{2}$
2. $\dfrac{12-\pi^2}{12}$
3. $\operatorname{sen} 1 - \cos 1$
4. $-\dfrac{7}{\pi}$

Solución (Ej. 4) —

1. 7
2. $\dfrac{7}{16}$
3. $\dfrac{4-\sqrt{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}{6\sqrt{2}}$
4. $\dfrac{3\,\pi-8}{12}$
5. $\ln\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{4\pi}{3}$
6. $\dfrac{\pi a^2\left(\ln a^2-1\right)+\pi b^2\left(1-\ln b^2\right)}{4}$
7. $\ln^2 2$
8. $\dfrac{7}{3}\ln 2$

Solución (Ej. 5) —

1. πab
2. $\dfrac{\ln 2}{2}$
3. 11π
4. $\ln 2$

Solución (Ej. 6) —

1. 18.
2. 12.
3. 378.

Solución (Ej. 7) —

1. 0.
2. $\dfrac{125\pi}{24}$.
3. $\dfrac{12\,\pi}{25}$

Solución (Ej. 8) — 1. 3.

2. $\dfrac{1}{2}$.
3. $\dfrac{2}{75}$.
4. $\dfrac{\left(2^4\sqrt{2}-8\right)\,\pi}{3}$.
5. $\dfrac{\left(2^5\sqrt{2}-43\right)\,\pi}{20\sqrt{2}}$
6. $-\dfrac{1}{12}$.

Solución (Ej. 9) — 1. $\dfrac{\pi}{2}$. 2. 4π. 3. $\dfrac{16}{9}$. 4. $\dfrac{48\pi - 64}{9}$. 5. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.
6. $18(2-\sqrt{2})\pi$. 7. 24π. 8. $\dfrac{2\left(8\pi - 3\sqrt{3}\pi - 2\right)}{3}$. 9. $\dfrac{3\pi}{2}$. 10. $\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\dfrac{b^3-a^3}{3}\right)\pi$