Matemáticas III
Tema 4
Integrales múltiples

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.


# Índice



# 0. Preliminares. Funciones Beta y Gamma

## Función Beta

Relacionada con la función $\Gamma$ aparece la función $\beta$, que se define, para cada par de reales postivos, $p, q \in \mathbb{R}^+$, como

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

**Propiedades.**

1. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$. **Demostración:** Evidente.
2. $\beta(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\,dt.$

   **Demostración:** Haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$.
3. $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$. **Demostración:** Evidente a partir de la propiedad 2.

## Función Gamma

La función $\Gamma$ extiende el concepto de factorial. Se define como $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt$ para $p > 0$. Se puede probar que estas integrales convergen y tienen las siguientes propiedades:

**Propiedades.**

1. $\Gamma(1) = 1$. **Demostración:** $\Gamma(1) = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t}\,dt = \lim_{N\to\infty} \left(-e^{-N} + e^0\right) = 1$.
2. $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$, si $p > 1$.
   **Demostración:** Usando integración por partes.
3. $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. **Demostración:** Evidente a partir de las anteriores.

**Relación entre las funciones Gamma y Beta.**

1. $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. **Demostración:** Se omite.
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. **Demostración:** A partir de la propiedad 4 de la función $\beta$ y de la anterior.

**Ejemplos.** Así, tenemos que $\Gamma(5) = 4! = 24$ y $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$.

**Propiedades.**

1. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$.
2. $\beta(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\,dt$.
3. $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
4. $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$.

**Aplicaciones.** De la propiedad 2. se deduce que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^a t \cos^b t\,dt = \frac{1}{2}\,\beta\left(\tfrac{a+1}{2}, \tfrac{b+1}{2}\right)$$

que nos permite resolver, de forma cómoda ciertos tipos de integrales trigonométricas. A veces hacemos uso de la simetría y/o paridad de las funciones trigonométricas.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t\,dt = \frac{1}{2}\beta\left(3,\tfrac{1}{2}\right) = \frac{8}{15}$
2. Usando la simetría y la paridad de la función coseno tenemos
   $$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 t\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,dt = -\frac{1}{2}\beta\left(\tfrac{1}{2},3\right) = -\frac{8}{15}$$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t\,dt = 0$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t\,dt = 2\frac{1}{2}\beta\left(2,\tfrac{5}{2}\right) = \frac{4}{35}$

# 1. Integrales dobles

## 1.1. Integral doble de un campo escalar sobre un rectángulo

Sea el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y $f$ un campo escalar positivo y continuo sobre $R$. Dadas una partición equidistante $\{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y otra $\{y_0, \ldots, y_m\}$ del intervalo $[c, d]$, se define la partición $P = \{R_1, \ldots, R_N\}$ de $R$ en $nm$ subrectángulos iguales de la forma $[x_{p-1}, x_p] \times [y_{q-1}, y_q]$ con $p = 1, \ldots, n$ y $q = 1, \ldots, m$. La norma $\|P\|$ de la partición $P$ es la medida de la diagonal de dichos subrectángulos.

Todos los subretángulos de la partición $P$ tiene el mismo área $\frac{(b-a)(d-c)}{nm}$. Si en cada uno de los subrectángulos $R_k = [x_{p-1}, x_p] \times [y_{q-1}, y_q]$ con $k = 1, \ldots, nm$ se selecciona el vértice $(x_k, y_k) = (x_p, y_q)$ entonces el volumen del paralelepípedo de base $R_k$ y altura $f(x_k, y_k)$ es una aproximación del volumen encerrado por la gráfica de $f$ sobre $R_k$. La suma de los volúmenes de todos estos paralelepípedos formados sobre los subrectángulos ofrece una aproximación del volumen encerrado por $f$ sobre el rectángulo $R$.

Si $f \colon R \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de dos variables continuo sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ entonces se define la *integral doble de $f$ sobre $R$* como el número

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \sum_{k=1}^{nm} f(x_k, y_k).$$

que, en caso de ser $f$ positiva, coincide con el volumen de la región delimitada por la gráfica de $f$ y por el rectángulo $R$.

### 1.1.1. Integral iterada de un campo escalar sobre un rectángulo

Sea el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y $f \colon R \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en $R$. Se define *la integral iterada de $f$ en $R$ primero respecto de $x$ y luego respecto de $y$* como

$$\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

Igualmente, se define la *integral iterada de $f$ en $R$ primero respecto de $y$ y luego respecto de $x$* como

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

**Teorema de Fubini sobre rectángulos.** Si $f \colon R \to \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces ambas integrales iteradas coinciden

$$\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

y, además coinciden con la integral doble sobre el rectángulo, es decir,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

**Ejemplo.** Consideremos el campo escalar $f(x, y) = x^2 - xy$. Comprobamos el teorema de Fubini en el rectángulo $[-2, 1] \times [0, 2]$.

$$\int_0^2 \left[ \int_{-2}^1 x^2 - xy\, dx \right] dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=-2}^1 dy = \int_0^2 \frac{3y}{2} + 3\, dy = \left[ \frac{3y^2}{4} + 3y \right]_0^2 = 9$$

$$\int_{-2}^1 \left[ \int_0^2 x^2 - xy\, dy \right] dx = \int_{-2}^1 \left[ x^2\, y - \frac{x\, y^2}{2} \right]_{y=0}^2 dx = \int_{-2}^1 2x^2 - 2x\, dx = \left[ \frac{2\, x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^1 = 9$$

## 1.2. Integral doble de un campo escalar sobre una región proyectable

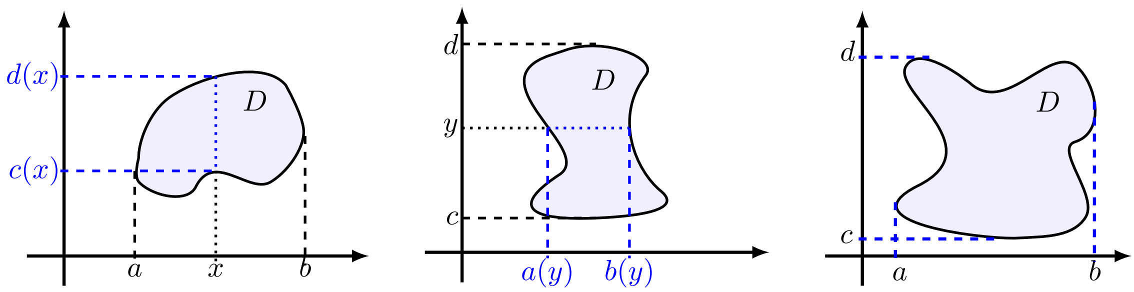
**Región proyectable en el plano.** Una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice $X$-*proyectable* si existe un intervalo $[a, b]$ y dos funciones $c(x), d(x)$ continuas en dicho intervalo tales que

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)] \right\}.$$

Igualmente, se dice que $D$ es $Y$-*proyectable* si existe un intervalo $[c, d]$ y dos funciones $a(y), b(y)$ continuas en dicho intervalo tales que

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], x \in [a(y), b(y)] \right\}.$$

Existen regiones que son X-proyectables e Y-proyectables y también existen regiones que no son proyectables (figura 1(c)).




(a) Región $X$-proyectable (b) Región $Y$-proyectable (c) Región no proyectable

Figura 1: Regiones proyectables.

**Ejemplo.** La región circular $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ es tanto $X$-proyectable como $Y$-proyectable.

$$D = \left\{ (x, y) : x \in [-a, a], -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$$
$$D = \left\{ (x, y) : y \in [-a, a], -\sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2} \right\}$$

**Integración.** Sea $f \colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre la región $X$-proyectable $D$. La integral doble en $D$ se define como

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[ \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

Igualmente, si el campo escalar $f$ es continuo en la región $Y$-proyectable $D$ entonces se define la integral doble como

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

**Nota.** Los rectángulos son regiones $X$-proyectables e $Y$-proyectables. Es fácil comprobar que si aplicamos la anterior definición a los rectángulos coincide con la definición de integral vista anteriormente en 1.1.1.

**Teorema de Fubini sobre regiones proyectables.** Si $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo continuo sobre la región $D$ la cual es $X$-proyectable y también $Y$-proyectable, es decir que puede escribirse como

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [c(x), d(x)]\big\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], x \in [a(y), b(y)]\big\}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

**Ejemplo.** Sea $D$ el disco de radio 1 centrado en el origen. Calculemos la siguiente integral doble:

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad \iint_D xy^2\,dA \tag{1}$$

Solución: Considerando $D$ como $Y$-proyectable, tenemos

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,dxdy = \int_{-1}^1 0\,dy = 0$$

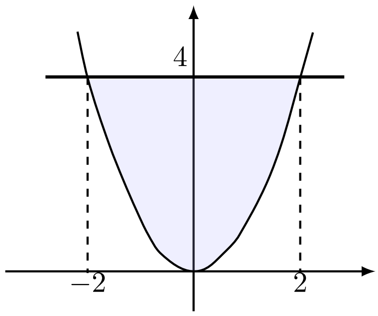
Calcula la misma integral considerando el disco $D$ como $X$-proyectable.

**Ejemplo.** Calculemos $\iint_D (x+y)\,dA$ con $D \equiv \begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 4 \end{cases}$.

Solución: Como podemos ver $D$ como una región $X$-proyectable, ya que:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ x^2 \leq y \leq 4\}$$

y por tanto:




$$\iint_D (x+y)\,dA = \int_{-2}^2 \left(\int_{x^2}^4 (x+y)dy\right) dx = \int_{-2}^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=4} dx$$

$$= \int_{-2}^2 \left(4x + 8 - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left[2x^2 + 8x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_{x=-2}^{x=2} = \frac{128}{5}$$

**Ejercicio.** Comprueba que la región $D$ anterior es $Y$-proyectable y calcula la misma integral $\iint_D (x+y)\,dA$ en este caso.

**Propiedades de la integral doble.** Sea $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre la región $D$ cerrada y acotada. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Linealidad: si $g$ es otro campo escalar también continuo sobre $D$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\,dxdy = \alpha \iint_D f\,dxdy + \beta \iint_D g\,dxdy$$

2. Aditividad: si $D = D_1 \cup D_2$ de forma que $D_1$ y $D_2$ son regiones cerradas y acotadas con, a lo más, algún punto frontera en común, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

   **Nota**: Esta propiedad nos permite calcular la integral doble en regiones acotadas no proyectables descomponiendo dicha región como unión de otras que si son proyectables.

3. Monotonía: Si $g$ es otro campo escalar continuo definido en $D$ y $f(x,y) \le g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D g(x,y)\,dxdy.$$

4. $\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy.$

5. Volumen: el volumen $V$ encerrado por la gráfica de $f$ sobre la región $D$ se calcula como

$$vol(V) = \iint_D |f|\,dxdy$$

6. Área: el área encerrada por la región D se calcula como la integral en la región del campo unidad $f(x,y) = 1$

$$\acute{a}rea(D) = \iint_D dxdy$$

## 2. Cambio de variables. Coordenadas polares

**Transformación uno a uno a uno de regiones.** Se dice que una transformación o cambio de variables, $T\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2$ es *uno a uno* si es *inyectiva* y $T(A) = D$ (y, por tanto, $A = T^{-1}(D)$). Representamos $(u,v)$ los elementos de $A$ y $(x,y)$ los elementos de $D$, así

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \text{ o bien } \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

**Teorema del cambio de variables para integrales dobles.** Sea el campo escalar $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuo en $D$ conjunto cerrado y acotado. Sea $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ un cambio de variables que transforma uno a uno la región $A$ en la región $D$. Si dicho cambio de variables es de clase $C^1$

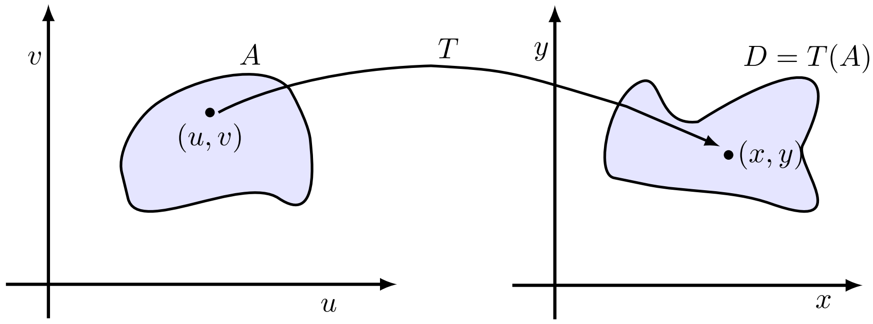



Figura 2: Un cambio de variables transforma la región $A$ en la $D$.

en un abierto que contenga a la región $A$ en el cual, salvo un cantidad finita de puntos y el jacobiano $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, entonces

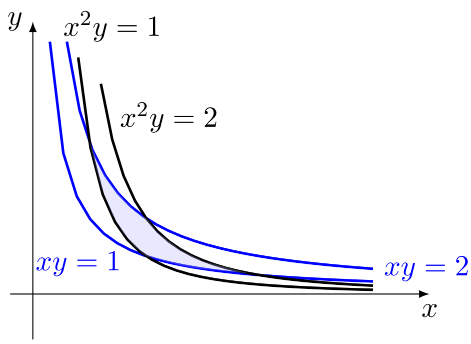
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_A f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

**Nota**: El jacobiano del cambio de variables actúa como factor de dilatación o de compresión del área al pasar de $A$ a $D$ mediante la transformación dada.

**Ejemplo.** Calculemos $\displaystyle\iint_D (x^2y^2)\,dxdy$ siendo $D$ la región del plano limitada por $1 \leq xy \leq 2$, y por $1 \leq x^2y \leq 2$.

Efectuando el cambio de variable $\begin{cases} u = xy \\ v = x^2y \end{cases}$

tenemos $\begin{cases} x = \frac{v}{u} \\ y = \frac{u^2}{v} \end{cases}$, y la nueva región de integración $R$, es el rectángulo $R = [1,2] \times [1,2]$.




Por lo tanto, el jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \\[2ex] \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v} - \frac{2}{v} = -\frac{1}{v}$$

y, teniendo en cuenta que $v$ es positiva, $\left| \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \dfrac{1}{v}$. Luego:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2y^2)\,dxdy &= \iint_R u^2 \frac{1}{v}\,dudv = \int_1^2 u^2 \left( \int_1^2 \frac{1}{v}\,dv \right) du \\ &= \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{u=1}^2 [\ln v]_{v=1}^2 = \frac{7}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

## 2.1. Cambios de variables más habituales en el plano

Algunos de los cambios de variables más utilizados en el plano son:

1. Cambio a coordenadas polares: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ con $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

   Su jacobiano es $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.

2. Cambio a coordenadas polares trasladadas al punto $(a,b)$: $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$.

   Su jacobiano es $J = r$.

3. Cambio a coordenadas elípticas de semiejes $a, b > 0$: $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\operatorname{sen}\theta \end{cases}$.

   Su jacobiano es $J = abr$

## 2.2. Ejemplos

1. La integral doble (1) en página 5 se puede también resolver usando un cambio de variables a coordenadas polares. Observe que la región $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es la imagen del rectángulo $R = \{((r,\theta) : r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]\}$, por la transformación $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta$.

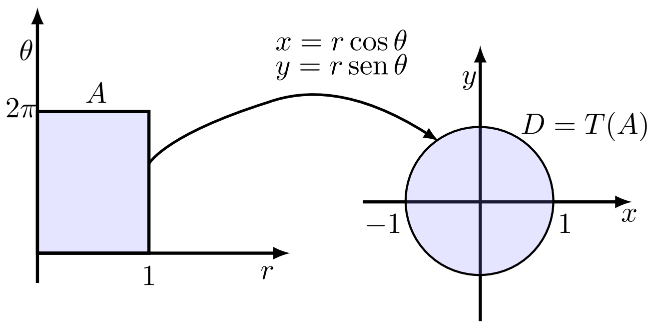
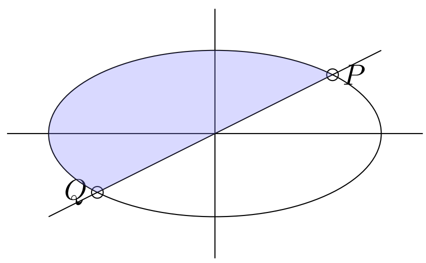



Figura 3: El cambio de variables a coordenadas polares.

$$\iint_D xy^2\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 r\cos\theta\cdot r^2\operatorname{sen}^2\theta\cdot r\,dr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\left[\int_0^1 r^4\,dr\right]d\theta$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

2. Vamos a calcular $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ siendo $D$ la región superior limitada por la elipse $x^2+4y^2 = 4$ y la recta $2y = x$.

   La recta y la elipse se cortan en los puntos $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $Q\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   Consideramos el cambio de variables $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ de donde $P(r = 1, \theta = \frac{\pi}{4})$ y $Q(r = 1, \theta = \frac{5\pi}{4})$.
   De aquí



$$\iint_D x\,dxdy = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_{r=0}^{1} 2r\cos\theta \cdot 2r\,drd\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 4\cos\theta \int_{r=0}^{1} r^2\,drd\theta =$$

$$= \frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta = \frac{4}{3}\left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

# 3. Integrales triples

## 3.1. Integral triple de un campo escalar sobre un paralelepípedo

Sea el paralelepípedo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ y sea $f\colon R \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre $R$. La integral triple sobre $R$ se define como el número

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_3}^{b-3}\left[\int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right]dy\right]dz$$

El teorema de Fubini para paralelepípedos garantiza que si $f\colon R \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo sobre el paralelepípedo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ entonces la integral triple se puede calcular como una integral iterada en cualquier orden de las variables.

**Región proyectable en el espacio.** Sea $V \subseteq \mathbb{R}^3$ una región en el espacio. Se dice que V es $XY$-proyectable si existe una región del plano $D$ cerrada y acotada, y existen dos campos escalares $a_3(x,y)$ y $b_3(x,y)$ continuos en $D$ tales que

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, z \in [a_3(x,y), b_3(x,y)]\right\}$$

Igualmente se pueden definir regiones $XZ$-proyectables y regiones $YZ$-proyectables.

## 3.2. Integral triple de un campo escalar sobre una región proyectable

Sea $f\colon V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre la región $XY$-proyectable $V$, con $(x,y) \in D$ y $z \in [a_3(x,y), b_3(x,y)]\}$. La integral triple en V se define como

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left[\int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dxdy.$$

Igualmente se definen las integrales triples para regiones $XZ$-proyectables y regiones $YZ$-proyectables. Además, el teorema de Fubini para regiones proyectables en el espacio garantiza que si la región $V$ puede describirse como región proyectable de más de una forma entonces las integrales triples aplicadas en cada caso obtienen el mismo resultado.

**Propiedades de las integrales triples.** Las integrales triples verifican las mismas propiedades de linealidad, aditividad y monotonía que las integrales dobles. Además satisface que el volumen encerrado por la región $V \subseteq \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$vol(V) = \iiint_V dxdydz.$$

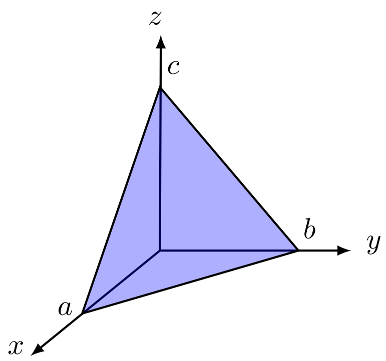



Figura 4: Tetraedro.

**Ejemplo.** Vamos a calcular el volumen de un tetraedro encerrado por el plano que se apoya a una distancia positiva $a$, $b$ y $c$ del origen sobre los ejes $x$, $y$ y $z$, respectivamente, y los tres planos coordenados (figura 4).

Observamos que la región es $XY$-proyectable con recinto $D$ que es el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(a,0,0)$ y $(0,b,0)$. También calculamos la ecuación del plano mencionado, que tiene por vectores directores $(-a,0,c)$ y $(-a,b,0)$:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ -a & 0 & c \\ -a & b & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bcx + acy + abz = abc \Rightarrow z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$$

Por tanto, el volumen será

$$\iint_D \left[ \int_{z=0}^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dz \right] dxdy = \iint_D \left( c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dxdy$$

Como la regíon $D$ en el plano $XY$ es $X$-proyectable, delimitada por la recta $\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b}$. Por tanto, la anterior integral doble queda

$$\int_{x=0}^{a} \left[ \int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} \left( c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dy \right] dx = \int_0^a \frac{bc(x-a)^2}{2a^2}\, dx = \frac{abc}{6}$$

# 4. Cambios de variables. Coordenadas cilíndricas y esféricas.

El teorema del cambio de variables puede enunciarse también para integrales triples.

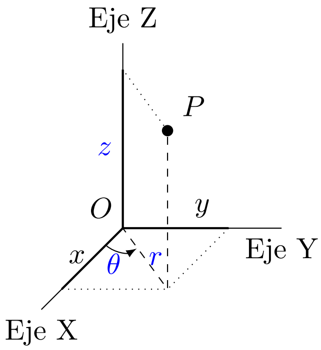
Algunos de los cambios de variables más utilizados en el espacio son:

- **Coordenadas cilíndricas**: Se representa un punto $(x,y,z)$ en el espacio mediante las coordenadas en polares $(r,\theta)$ de su proyección sobre el plano OXY y su coordenada $z$, de forma que $r > 0$, $\theta \in [0,2\pi)$ y $z \in \mathbb{R}$. Las ecuaciones del cambio son

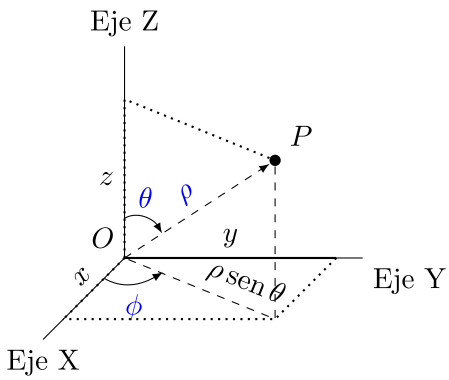
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \qquad \text{con } r > 0,\ \theta \in [0,2\pi),\ z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

  El cambio consiste en tomar la región como $XY$-proyectable y aplicar un cambio a coordenadas polares en la integral doble sobre la proyección en el plano $XY$.

  El jacobiano de este cambio es $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$.




(a) Coordenadas cilíndricas.




(b) Coordenadas esféricas.

- **Coordenadas esféricas**: Se representa un punto $(x, y, z)$ mediante la distancia $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ al origen, el ángulo $\theta$ (colatitud) que forma su radio vector con la parte positiva del eje OZ y el ángulo azimutal $\phi$ de la proyección del radio vector sobre el plano OXY, de forma que $\rho > 0$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Las ecuaciones del cambio son

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{con } \rho > 0,\ \theta \in [0, \pi]\,,\ \phi \in [0, 2\pi)$$

Su jacobiano es $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\theta$.

- **Cambio a coordenadas esféricas trasladadas** a un punto $(a, b, c)$:

$$\begin{cases} x = a + \rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta \\ y = b + \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = c + \rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{con } \rho > 0,\ \theta \in [0, \pi]\,,\ \phi \in [0, 2\pi)$$

Su jacobiano es $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\theta$.

**Ejemplos.**

1. Calculemos el volumen del cilindro $V$ de radio $R$ y altura $h$. Para ello usaremos, obviamente, coordenadas cilíndricas.

$$\iiint_V dxdydz = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} |J|\, dzd\theta dr = \pi\, R^2 h$$

2. Calculemos el volumen de la esfera de radio $R$. Usaremos, claro está, coordenadas esféricas.

$$\iiint_V dxdydz = \int_{\rho=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi dr = \int_0^R 4\pi\rho^2\, d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3$$