Matemáticas III
Tema 4
Integrales múltiples

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

Función Gamma

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\, dt \text{ para } p > 0$$

Propiedades

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$.
3. $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.
4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Ejemplo

Así, tenemos que

- $\Gamma(5) = 4! = 24$.
- $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$.

Función Beta

Relacionada con la función Γ aparece la función β, que se define, para cada par de reales postivos, $p, q \in \mathbb{R}^+$, como

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

Propiedades

1. $\beta(p,q) = \beta(q,p)$.
2. $\beta(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\,dt$.
3. $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
4. $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^a t \cos^b t \, dt = \frac{1}{2} \beta\left(\tfrac{a+1}{2}, \tfrac{b+1}{2}\right)$$

Ejemplo

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t \, dt = \frac{1}{2}\beta\left(3, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{8}{15}$
2. Usando la simetría y la paridad de la función coseno tenemos
$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 t \, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \, dt = -\frac{1}{2}\beta\left(\tfrac{1}{2}, 3\right) = -\frac{8}{15}$$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t \, dt = ???$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t \, dt = ???$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^a t \cos^b t \, dt = \frac{1}{2} \beta \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2} \right)$$

Ejemplo

1. $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t \, dt = \frac{1}{2} \beta \left(3, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{8}{15}$$
2. Usando la simetría y la paridad de la función coseno tenemos
$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 t \, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \, dt = -\frac{1}{2} \beta \left(\tfrac{1}{2}, 3\right) = -\frac{8}{15}$$
3. $$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t \, dt = 0$$
4. $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t \, dt = ???$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^a t \cos^b t \, dt = \frac{1}{2}\beta\left(\tfrac{a+1}{2}, \tfrac{b+1}{2}\right)$$

Ejemplo

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 t \, dt = \frac{1}{2}\beta\left(3, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{8}{15}$
2. Usando la simetría y la paridad de la función coseno tenemos
$\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 t \, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \, dt = -\frac{1}{2}\beta\left(\tfrac{1}{2}, 3\right) = -\frac{8}{15}$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t \, dt = 0$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t \cos^4 t \, dt = \frac{4}{35}$

Integral doble de un campo escalar sobre un rectángulo

Si $f: R \to \mathbb{R}$ es un c. e. de dos variables continuo sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ entonces se define la **integral doble de f sobre R** como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \sum_{k=1}^{nm} f(x_k, y_k).$$

que, **en caso de ser f positiva, coincide con el volumen de la región delimitada por la gráfica de f y por el rectángulo R**.

Integrales iteradas de un campo escalar sobre un rectángulo

Se definen

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

y

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

Teorema (de Fubini sobre rectángulos)

Si $f : R \to \mathbb{R}$ *es un campo escalar continuo en el rectángulo* $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ *entonces ambas integrales iteradas coinciden*

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

y, además coinciden con la integral doble sobre el rectángulo, es decir,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(x, y)\, dxdy$$

Ejemplo

Consideremos el campo escalar $f(x, y) = x^2 - xy$. Comprobamos el teorema de Fubini en el rectángulo $[-2, 1] \times [0, 2]$.

$$\int_0^2 \left[\int_{-2}^1 x^2 - xy \, dx \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=-2}^1 dy = \int_0^2 \frac{3y}{2} + 3 \, dy =$$

$$= \left[\frac{3y^2}{4} + 3y \right]_0^2 = 9$$

Ejemplo

Consideremos el campo escalar $f(x,y) = x^2 - xy$. Comprobamos el teorema de Fubini en el rectángulo $[-2,1] \times [0,2]$.

$$\int_{-2}^{1} \left[\int_{0}^{2} x^2 - xy \, dy \right] dx = \int_{-2}^{1} \left[x^2\, y - \frac{x\, y^2}{2} \right]_{y=0}^{2} dx = \int_{-2}^{1} 2x^2 - 2x \, dx =$$

$$= \left[\frac{2\,x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^{1} = 9$$

Ejemplo

Consideremos el campo escalar $f(x,y) = x^2 - xy$. Comprobamos el teorema de Fubini en el rectángulo $[-2,1] \times [0,2]$.

$$\int_0^2 \left[\int_{-2}^1 x^2 - xy\, dx \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=-2}^1 dy = \int_0^2 \frac{3y}{2} + 3\, dy =$$

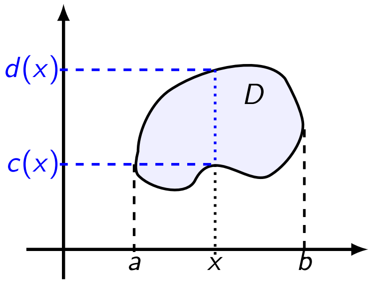
$$= \left[\frac{3y^2}{4} + 3y \right]_0^2 = 9$$

$$\int_{-2}^1 \left[\int_0^2 x^2 - xy\, dy \right] dx = \int_{-2}^1 \left[x^2\, y - \frac{x\, y^2}{2} \right]_{y=0}^2 dx = \int_{-2}^1 2x^2 - 2x\, dx =$$

$$= \left[\frac{2\, x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^1 = 9$$

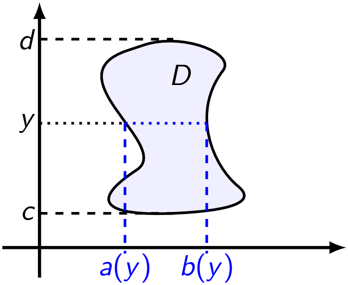
Región proyectable en el plano

Región *X-proyectable D*



$\{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)]\}$

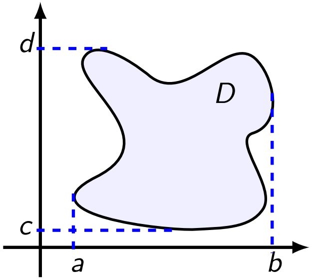
Región *Y-proyectable D*



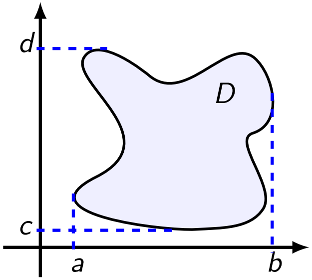
$\{(x, y) : y \in [c, d], x \in [a(y), b(y)]\}$

Existen regiones que son *X-proyectables* e *Y-proyectables* (ambas cosas).

Existen regiones que no son proyectables:



Existen regiones que no son proyectables:



Ejemplo

La región circular $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ es tanto X-proyectable como Y-proyectable.

$$D = \left\{(x,y) : x \in [-a,a], -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\right\}$$
$$D = \left\{(x,y) : y \in [-a,a], -\sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}\right\}$$

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre la región X-proyectable D. La integral doble en D se define como

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Igualmente, si el campo escalar f es continuo en la región Y-proyectable D entonces se define la integral doble como

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Teorema (de Fubini sobre regiones proyectables)

Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un campo continuo sobre la región D la cual es X-proyectable y también Y-proyectable, es decir que puede escribirse como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y \in [c(x), d(x)]\} = \\ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], x \in [a(y), b(y)]\}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right] dy$$

Ejemplo

Sea D el disco de radio 1 centrado en el origen. Calculemos la siguiente integral doble:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad \iint_D xy^2\, dA$$

SOLUCIÓN: Considerando D como Y-proyectable, tenemos

$$\iint_D xy^2\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} 0\, dy = 0$$

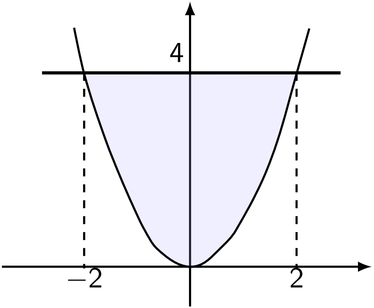
Igualmente

$$\iint_D xy^2\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\, dy\, dx = \ldots$$

Andalucía Tech

Ejemplo

Calculemos $\iint_D (x+y)\,dA$ con $D \equiv \begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 4 \end{cases}$.



$$\iint_D (x+y)\,dA = \int_{-2}^{2} \left(\int_{x^2}^{4} (x+y)dy \right)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=4} dx =$$

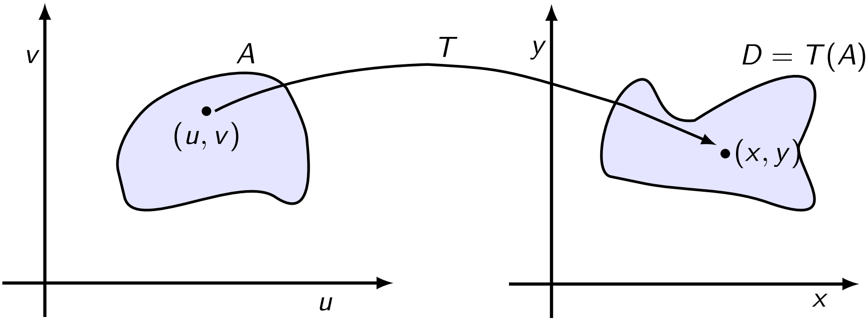
$$= \int_{-2}^{2} \left(4x + 8 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \left[2x^2 + 8x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_{x=-2}^{x=2} = \frac{128}{5}$$

Propiedades de la integral doble

1. Linealidad:
$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\, dxdy = \alpha \iint_D f\, dxdy + \beta \iint_D g\, dxdy$$
2. Aditividad: si $D = D_1 \dot{\cup} D_2$
$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy$$
3. Monotonía: Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, entonces
$$\iint_D f(x,y)\, dxdy \leq \iint_D g(x,y)\, dxdy.$$
4. $\left| \iint_D f(x,y)\, dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\, dxdy.$
5. $vol(V) = \iint_D |f|\, dxdy$
6. $área(D) = \iint_D dxdy$

Una transformación o cambio de variables, $T: A \to D$ es **uno a uno** si es inyectiva y $T(A) = D$ (y, por tanto, $A = T^{-1}(D)$).



$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \text{ o bien } \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Teorema (del cambio de variables para integrales dobles)

Sea el c. e. $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continuo en* D *conjunto cerrado y acotado.*

Sea $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ *un cambio de variables que transforma uno a uno la región* A *en la región* D*. Si dicho cambio de variables es de clase* C^1 *en un abierto que contenga a la región* A *en el cual, salvo un cantidad finita de puntos y el jacobiano* $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$*, entonces*

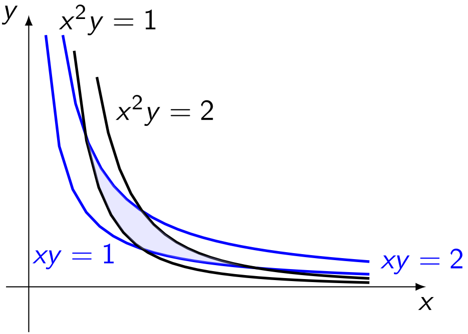
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_A f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Nota: El jacobiano del cambio de variables actúa como factor de dilatación o de compresión del área al pasar de A a D mediante la transformación dada.

Ejemplo

Calculemos $\iint_D (x^2y^2)\, dxdy$ siendo D la región del plano limitada por $1 \leq xy \leq 2$, y por $1 \leq x^2y \leq 2$.

Efectuando el cambio de variable
$$\begin{cases} u = xy \\ v = x^2y \end{cases}$$



$$\iint_D (x^2y^2)\, dxdy = \iint_R u^2 \frac{1}{v}\, dudv = \frac{7}{3} \ln 2$$

Algunos de los cambios de variables más utilizados en el plano son:

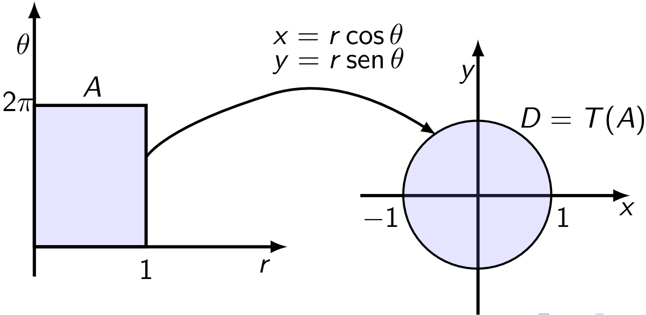
1. Cambio a coordenadas polares: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ con $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Jacobiano $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.
2. Cambio a coordenadas polares trasladadas al punto (a, b): $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$. Jacobiano es $J = r$.
3. Cambio a coordenadas elípticas de semiejes $a, b > 0$: $\begin{cases} x = a\,r\cos\theta \\ y = b\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$. Jacobiano $J = abr$

Ejemplo

Calculemos $\iint_D xy^2\, dxdy$ siendo D el círculo de radio 1.

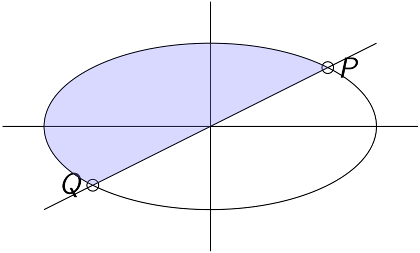
$$\iint_D xy^2\, dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r\cos\theta \cdot r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot r\, dr \right] d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \left[\int_0^1 r^4\, dr \right] d\theta = \frac{1}{5}\left[\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$



Ejemplo

Vamos a calcular $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ siendo D la región limitada por la elipse $x^2+4y^2=4$ y la recta $2y=x$.



$$P\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } Q\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$P(r=1,\theta=\tfrac{\pi}{4}) \text{ y } Q(r=1,\theta=\tfrac{5\pi}{4})$$

De aquí

$$\iint_D x\,dxdy = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_{r=0}^{1} 2r\cos\theta\cdot 2r\,drd\theta = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Integral triple de un campo escalar sobre un paralelepípedo

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right]\,dy\right]\,dz$$

El teorema de Fubini para paralelepípedos garantiza que si f es un campo escalar continuo sobre el paralelepípedo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ entonces la integral triple se puede calcular como una integral iterada en cualquier orden de las variables.

Región proyectable en el espacio.

Sea $V \subseteq \mathbb{R}^3$ una región en el espacio. Se dice que V es XY-proyectable si existe una región del plano D cerrada y acotada, y existen dos campos escalares $a_3(x,y)$ y $b_3(x,y)$ continuos en D tales que

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, z \in [a_3(x,y), b_3(x,y)]\}$$

Igualmente se pueden definir regiones XZ-proyectables y regiones YZ-proyectables.

Sea $f: V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre la región XY-proyectable V, con $(x, y) \in D$ y $z \in [a_3(x, y), b_3(x, y)]\}$. La integral triple en V se define como

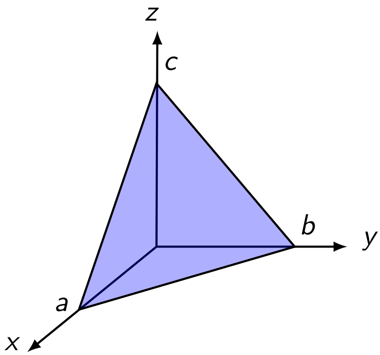
$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_D \left[\int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dxdy.$$

Igualmente se definen las integrales triples para regiones XZ-proyectables y regiones YZ-proyectables.

Además, el teorema de Fubini para regiones proyectables en el espacio garantiza que si la región V puede describirse como región proyectable de más de una forma entonces las integrales triples aplicadas en cada caso obtienen el mismo resultado.

Volumen de una región del espacio

$$vol(V) = \iiint_V dxdydz.$$



$$z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$$

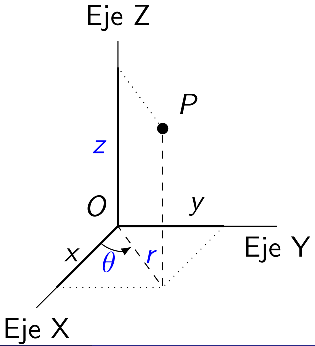
$$\iint_D \left[\int_{z=0}^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dz \right] dxdy = \iint_D \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dxdy$$

$$\int_{x=0}^{a} \left[\int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dy \right] dx = \int_0^a \frac{bc(x-a)^2}{2a^2} dx = \frac{abc}{6}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{con } r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R}$$

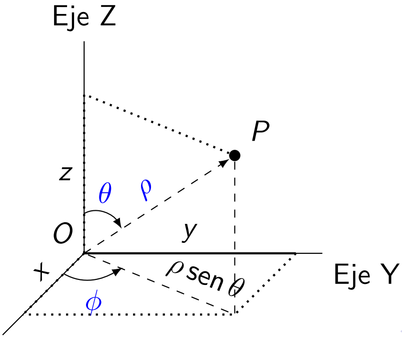
El jacobiano de este cambio es $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$



Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \quad \text{con } \rho > 0,\ \theta \in [0,\pi]\,,\ \phi \in [0, 2\pi)$$

Su jacobiano es $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta.$



Ejemplo

1. Calculemos el volumen del cilindro V de radio R y altura h. Para ello usaremos, obviamente, coordenadas cilíndricas.

$$\iiint_V dxdydz = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} |J|\, dzd\theta dr = \pi R^2 h$$

2. Calculemos el volumen de la esfera de radio R. Usaremos, claro está, coordenadas esféricas.

$$\iiint_V dxdydz = \int_{\rho=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi dr =$$

$$= \int_0^R 4\pi\rho^2\, d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3$$

OCW UMA

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

2014.