Matemáticas III
Tema 5
Integrales de línea

Rodríguez Sánchez, F.J.
Muñoz Ruiz, M.L.
Merino Córdoba, S.

Índice

1. Integral de línea

1.1. Integrales de línea de campos escalares

Definición. Sea C una curva parametrizada regular a trozos en el plano con parametrización $\alpha(t)$ con $t \in [a,b]$. Sea el campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de forma que $C \subseteq U$ y f es continuo en C. La integral de línea de f a lo largo de la curva C se define como el número

$$\int_C f\, dC = \int_a^b f(\alpha(t))\, \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Otras notaciones habituales para la integral de línea del campo f en C son $\displaystyle\int_C f\, ds$ o $\displaystyle\int_C f\, dr$.
Si C es una curva cerrada se suele representar la integral de línea como $\displaystyle\oint_C f\, dC$. A veces, a la integral de línea de un campo escalar se le suele llamar *integral de línea respecto a la longitud de arco*.

Igualmente se define la integral de línea de campos escalares de dimensión tres.

Proposición. La integral de línea de campos escalares es independiente de la parametrización elegida para la curva.

Efectivamente, sea $\beta = \alpha \circ \varphi$ con $\varphi\colon [a', b'] \to [a, b]$ una reparametrización de la curva C (con $\phi'(u) \neq 0$). Entonces

$$I = \int_{a'}^{b'} f(\beta(u)) \, \|\beta'(u)\| \, du = \int_{a'}^{b'} f(\alpha(\varphi(u)) \, \|\alpha'(\varphi(u))\varphi'(u)\| \, du$$

y haciendo el cambio de variable $t = \varphi(u)$ $(dt = \varphi'(u) \, du)$, tenemos

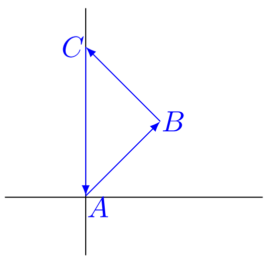
$$I = \int_{\varphi(a')}^{\varphi(b')} f(\alpha(t)) \, \|\alpha'(t)\| \frac{|\varphi'(u)|}{\varphi'(u)} \, dt$$

Si $\varphi' > 0$, tenemos $\varphi(a') = a$ y $\varphi(b') = b$, de donde $I = \int_a^b f(\alpha(t)) \, \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_C f \, dC$ y si $\varphi' < 0$, tenemos $\varphi(a') = b$ y $\varphi(b') = a$, de donde $I = \int_b^a f(\alpha(t)) \, \|\alpha'(t)\|(-1) \, dt = \int_C f \, dC$.

Propiedades. Sean dos campos escalares $f, g\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuos en U y $C \subseteq U$ una curva parametrizada regular a trozos.

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ entonces $\displaystyle\int_C (\lambda f + \mu g) \, dC = \lambda \int_C f \, dC + \mu \int_C g \, dC$.
2. Si para todo $(x, y) \in C$ se verifica que $f(x, y) \leq g(x, y)$ entonces $\displaystyle\int_C f \, dC \leq \int_C g \, dC$.
3. Si $C = C_1 \cup C_2$, definida en dos tramos, entonces $\displaystyle\int_C f \, dC = \int_{C_1} f \, dC + \int_{C_2} f \, dC$.
4. La longitud de la curva C es la integral de línea a lo largo de C del campo escalar constante igual a 1.

Ejemplo. Calculemos la integral del campo escalar $f(x, y) = \operatorname{sen}(x+y)$ a lo largo del triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 2)$. Al ser una curva regular a trozos calculamos la integral en cada uno de los segmentos:



C_1 parametrizado $\alpha_1(t) = (1 - t)A + tB = (t, t)$, con $0 \leq t \leq 1$
C_2 parametrizado $\alpha_2(t) = (1 - t)B + tC = (1 - t, 1 + t), 0 \leq t \leq 1$
C_3 parametrizado $\alpha_3(t) = (1 - t)C + tA = (0, 2 - 2t), con 0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}
\int_C f \, dC &= \int_0^1 \operatorname{sen}(2t)\sqrt{2} \, dt + \int_0^1 \operatorname{sen} 2\sqrt{2} \, dt + \int_0^1 2 \operatorname{sen}(2 - 2t) \, dt = \\
&= \left[-\frac{\cos 2t}{\sqrt{2}} \right]_0^1 + \left[\sqrt{2} t \operatorname{sen} 2 \right]_0^1 + \left[\cos(2 - 2t) \right]_0^1 = \\
&= \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sen} 2 - \left(2 + \sqrt{2}\right) \cos 2 + \sqrt{2} + 2}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Calculemos la masa de un alambre de forma helicoidal $\alpha(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$, que tiene una función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, entre los puntos $t = 0$ y $t = 2\pi$.

Solución: Tenemos que $\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a\cos t, b)$, luego

$$
\begin{aligned}
M &= \int_C \rho\, dC = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2a^2\sqrt{a^2 + b^2}\pi + b^2\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi} t^2\, dt = \\
&= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}\left(8\pi^3 b^2 + 6\pi a^2\right)}{3}
\end{aligned}
$$

1.2. Integrales de línea de campos vectoriales

Sea C una curva parametrizada regular a trozos en el plano con parametrización $\alpha(t)$ con $t \in [a, b]$. Sea el campo vectorial $F\colon U \subseteq R^2 \to \mathbb{R}$ de forma que $C \subseteq U$ y F es continuo en C. La integral de línea de F (o *circulación* de F) a lo largo de la curva C se define como el número

$$\int_C F \cdot dC = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$

Se acostumbra expresar la curva como $C = (x, y)$ y a su derivada $dC = (dx, dy)$ y al campo vectorial con sus coordenadas $F = (P, Q)$. De esta forma la integral de línea se expresa

$$\int_C F \cdot dC = \int_C P\, dx + Q\, dy$$

Si C es una curva cerrada entonces se denota la integral de línea como $\oint_C F \cdot dC$.

Igualmente se puede definir para campos vectoriales en el espacio, $\displaystyle\int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

Proposición. El valor de la integral de línea depende únicamente de la orientación de la parametrización tomada para C, es decir, es independiente salvo por la orientación.

Efectivamente, sea $\beta = \alpha \circ \varphi$ con $\varphi\colon [a', b'] \to [a, b]$ una reparametrización de la curva C (con $\phi'(u) \neq 0$). Entonces

$$I = \int_{a'}^{b'} F(\beta(u)) \cdot \beta'(u)\, du = \int_{a'}^{b'} F(\alpha(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\alpha'(\varphi(u))\, du$$

y haciendo el cambio de variable $t = \varphi(u)$ $(dt = \varphi'(u)\, du)$, tenemos

$$I = \int_{\varphi(a')}^{\varphi(b')} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt & \text{si } \varphi' > 0 \\ \displaystyle\int_b^a F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt & \text{si } \varphi' < 0 \end{cases} = \pm \int_C F \cdot dC$$

Propiedades. Sean dos campos vectoriales $F, G\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continuos en U y $C \subseteq U$ una curva parametrizada regular a trozos.

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ entonces $\displaystyle\int_C (\lambda F + \mu G) \cdot dC = \lambda \int_C F \cdot dC + \mu \int_C G \cdot dC$.

2. Si $-C$ representa la misma curva que C parametrizada en sentido contrario, se verifica que $\displaystyle\int_{-C} F \cdot dC = -\int_C F \cdot dC$.

3. Si $C = C_1 \cup C_2$, definida en dos tramos, entonces $\displaystyle\int_C F \cdot dC = \int_{C_1} F \cdot dC + \int_{C_2} F \cdot dC$.

Ejemplo. Calculemos el trabajo (integral de línea) de una partícula dentro del campo de fuerzas $F(x, y) = (x + y, xy^2)$ que se mueve por la curva cerrada determinada por la parábola $x = y^2$ entre el punto $A(1, 1)$ y el punto $B(1, -1)$ y un segmento recto hasta al punto A.

Solución: El tramo de la parábola queda parametrizado como $\alpha(t) = (t^2, -t)$ con $t \in [-1, 1]$ y el tramo recto como $\beta(t) = (1, 2t - 1)$ con $t \in [0, 1]$. Luego

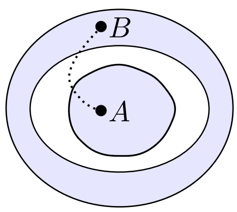
$$\begin{aligned}\oint_C F \cdot dC &= \oint_C (x + y, xy^2) \cdot (dx, dy) = \oint_C (x + y)\, dx + xy^2\, dy = \\ &= \int_{-1}^{1} (t^2 - t)2t\, dt + t^2(-t)^2(-1)\, dt + \int_0^1 2t \cdot 0\, dt + (2t - 1)^2 \cdot 2\, dt = \\ &= \left[\frac{2t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{(2t - 1)^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{26}{15} + \frac{2}{3} = \\ &= -\frac{16}{15}\end{aligned}$$

2. Campos conservativos. Potencial y rotacional.

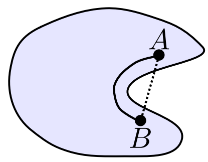
Conjuntos conexos y conjuntos convexos

Un conjunto U de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ se dice *conexo* si para cualquier par de puntos suyos existe un camino (curva parametrizada regular a trozos) interior a U que los une.

Se dice que el conjunto U es *convexo* si el segmento que une a cualquier par de puntos de U está contenido en U. Evidentemente, si U es convexo entonces U es conexo.



(a) Conjunto que no es conexo



(b) Conjunto conexo, pero no convexo

Ejemplo. El conjunto $\mathbb{R}^2$ es, obviamente, convexo, pero si le quitamos un punto (por ejemplo el origen de coordenadas) ya no es convexo, aunque sigue siendo conexo. Si a $\mathbb{R}^2$ le quitamos una recta, por ejemplo uno de los ejes coordenados, deja de ser convexo y también deja de ser conexo.

Ejemplo Si consideramos el conjunto $\mathbb{R}^3$ menos uno de sus ejes coordenados no es convexo pero si es conexo. ¿Qué quitarías a $\mathbb{R}^3$ para que deje de ser conexo?

Componentes conexas. Los conjuntos no conexos se pueden considerar como una unión de conjuntos que sí son conexos. A cada uno de ellos se le denomina *componente conexa*.

2.1. Campo conservativo y potencial

Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo en un conjunto U conexo. Se dice que F es *conservativo* en U si para todo par de puntos $A, B \in U$ las integrales de línea a lo largo de todos los caminos contenidos en U que tienen a A como punto inicial y a B como punto final dan el mismo resultado. En ese caso puede escribirse, $\displaystyle\int_C F \cdot dC = \int_A^B F \cdot dC$.

Potencial de un campo vectorial. Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo en un conjunto U conexo y abierto. Se dice que F *deriva de un potencial* en U si existe un campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (llamado *potencial* de F en U) de clase C^1 que verifique $\nabla f = F$ en U.

Las anteriores definiciones son válidas para campos vectoriales en el espacio.

Ejemplo. El campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ está definido en el conjunto conexo y abierto $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y deriva del siguiente potencial $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

Regla de Barrow para integrales de linea. Sea $F\colon U \subseteq R^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo en un conjunto U conexo y abierto. Si F deriva de un potencial f en U entonces F es conservativo en U y además

$$\int_A^B F \cdot dC = f(B) - f(A)$$

para todo potencial f suyo.

Teorema fundamental de la integal de linea. Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo en un conjunto U conexo y abierto. Si F es conservativo en U entonces F deriva de un potencial en U y además el campo

$$f(x,y) = \int_A^{(x,y)} F \cdot dC$$

es un potencial suyo.

Condiciones equivalentes de campo conservativo. Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo en un conjunto U conexo y abierto. Son equivalentes:

1. F es conservativo en U.

2. F deriva de un potencial en U.

3. Para todo camino cerrado C contenido en U ocurre que $\displaystyle\oint_C F \cdot dC = 0$.

Ejemplo. El siguiente campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ deriva de un potencial, por tanto es conservativo. Su integral sobre una línea cerrada, por ejemplo la circunferencia $\mathbb{S}^1$, es siempre nula.

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbb{S}^1} F\cdot dS &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, d(\cos t) + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\, d(\operatorname{sen} t) = \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos t \operatorname{sen} t\, dt + \operatorname{sen} t \cos t\, dt = 0\end{aligned}$$

Cálculo del potencial de un campo conservativo

Si un campo vectorial $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido en un abierto y conexo U es conservativo, podemos calcular un potencial del cual derivan de dos formas distintas:

Método 1. Utilizando el teorema fundamental de la integral de línea a lo largo de un camino C conveniente desde un punto $A(a_1,a_2)$ al punto (x,y). Por ejemplo, el camino formado por los segmentos $\overline{(a_1,a_2),(x,a_2)}$ y $\overline{(x,a_2),(x,y)}$.

$$f(x,y) = \int_A^{(x,y)} F\cdot dC$$

Método 2. Integrando por separada cada coordenada del campo vectorial F.

$$\nabla f = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) \Rightarrow f(x,y) = \int F_1(x,y)\, dx + \phi(y)$$

Derivando respecto de la variable y tenemos

$$\begin{aligned} f_y(x,y) = F_2(x,y) &= \frac{\partial \int F_1(x,y)\, dx}{\partial y} + \phi'(y) \Rightarrow \\ \phi(y) &= \int \left[F_2(x,y) - \frac{\partial \int F_1(x,y)\, dx}{\partial y}\right] dy\end{aligned}$$

de donde se calcula $f(x,y)$.

Análogamente se calcula el potencial haciendo $f(x,y) = \int F_2\, dy + \phi(x)$ y razonando del mismo modo.

Ejemplo. Calculemos el potencial de $F(x,y) = (xy^2 + x + 1, x^2y - 2)$ por ambos métodos.

Método 1. Como está definida en todo $\mathbb{R}^2$, consideramos el segmento C desde $(0,0)$ a $(x,0)$: $\alpha(t) = (t,0)$, con $0 \le t \le x$ y el segmento desde $(x,0)$ a (x,y): $\beta(t) = (x,t)$ con $0 \le t \le y$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x,y)) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} F\cdot dC = \int_0^x (t+1)\, dt + \int_0^y (x^2t - 2)\, dt = \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^2y^2}{2} - 2y + C\end{aligned}$$

Método 2. Integrando respecto de x tenemos

$$\begin{aligned} f(x,y) = \int (xy^2 + x + 1)\, dx &= \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + x + \phi(y) \\ x^2y - 2 = x^2y + \phi'(y) \Rightarrow \phi'(y) &= -2 \Rightarrow \phi(y) = -2y + C\end{aligned}$$

luego

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + x - 2y + C$$

2.2. Rotacional de un campo vectorial

Rotacional en el plano

Sea $F = (F_1, F_2)$ un campo vectorial de dos dimensiones de clase C^1 en el abierto U. El rotacional del campo F es un campo escalar definido de la forma

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Condición necesaria de campo conservativo. Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto U conexo y abierto. Si F es conservativo en U entonces F es irrotacional en U ($\operatorname{rot}(F) = 0$ en todo U).

Condición equivalente de campo conservativo para regiones convexas. Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto U convexo y abierto. El campo F es conservativo en U si, y sólo si, F es irrotacional en U.

Nota. Todos los conceptos y resultados anteriores son aplicables a campos vectoriales en el espacio, pero en ese caso hay que tener en cuenta que el concepto de rotacional varía, siendo éste ahora un campo vectorial. Más concretamente:

2.2.1. Rotacional en el espacio.

Si $F = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial de tres dimensiones de clase C^1 en el abierto U, entonces se define el rotacional del campo F en U como un nuevo campo vectorial dado por

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

3. Cálculo vectorial en el plano: Teorema de Green.

3.1. Conjuntos simplemente conexos en el plano

Teorema de la curva de Jordan. Recordemos que una *curva de Jordan* es un camino cerrado simple. Toda curva cerrada simple del plano divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior.

Región simplemente conexa

Se dice que la región $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es *simplemente conexa* si es conexa y la región encerrada por cualquier curva de Jordan trazada en U está también contenida en U.

Si una región conexa no es simplemente conexa se denomina *múltiplemente conexa.*

Ejemplo. Una región conexa plana a la que se le suprime un punto o más del interior es una región multiplemente conexa. Así $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, si bien $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ya no lo es.

(c) Simplemente conexa. (d) Multiplemente conexa.

Figura 1: Regiones simplemente conexa y multiplemente conexa en el plano.

3.2. Teorema de Green

Teorema de Green para regiones simplemente conexas. Sea C una curva de Jordan y D la región encerrada por ella. Si $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial plano de clase C^1 en el abierto U de forma que $D \subseteq U$ entonces:

$$\iint_D \operatorname{rot} F \, dxdy = \oint_{C^+} F \cdot dC,$$

donde C^+ representa la curva de Jordan orientada positivamente. Si $F = (P, Q)$ la igualdad anterior la podemos escribir también como

$$\iint_D (Q_x - P_y) \, dxdy = \oint_{C^+} P \, dx + Q \, dy$$

Ejemplo. Calculemos la integral $\displaystyle\oint_C y \, dx + x^2 \, dy$ siendo C las siguientes curvas cerradas:

1. la curva que rodea el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

$$\oint_C y \, dx + x^2 \, dy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} (2x-1) \, dxdy = \int_0^1 (2x-1) \, dx = 0$$

2. La circunferencia de radio 1 centrada en el origen.

$$\oint_C y \, dx + x^2 \, dy = \iint_D (2x-1) \, dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (2r\cos\theta - 1) r \, dr d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}\cos\theta - \frac{1}{2} \right) d\theta = \left[\frac{2}{3} \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\theta \right]_0^{2\pi} = -\pi$$

El teorema de Green nos puede facilitar también el cálculo de integrales en recintos acotados bordeados por curvas conocidas.

Ejemplo. Calculemos el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ usando el teorema de Green.

En este caso usamos cualquier campo vectorial $F = (P, Q)$ que cumpla $Q_x - P_y = 1$, por ejemplo $F = (0, x)$, así

$$A = \iint_D 1 \, dxdy = \oint_{C^+} x \, dy$$

y parametrizando la elipse como $\alpha(t) = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$, con $0 \le t \le 2\pi$, tenemos

$$A = \int_0^{2\pi} a\cos t \, b \cos t \, dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = 2ab\beta\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right) = \pi ab$$

Condición equivalente de campo conservativo para regiones simplemente conexas. Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto U simplemente conexo y abierto. El campo F es conservativo en U si, y sólo si, F es irrotacional en U.

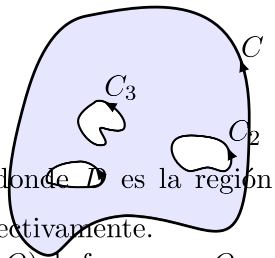
Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas. Si $C, C_1, \ldots, C_p$, son curvas de Jordan de forma que $C_1, \ldots, C_p$ C_1 verifican las siguientes condiciones:

1. todas están contenidas en la región encerrada por C,
2. son disjuntas dos a dos,
3. ninguna está contenida en la región encerrada por otra de ellas.

Sea D la región encerrada por la curva C que es exterior a las curvas $C_1, \ldots, C_p$. Si $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 en el abierto U de forma que $D \subseteq U$ entonces:

$$\iint_D \operatorname{rot} F\, dxdy = \oint_{C^+} F \cdot dC - \sum_{i=1}^{p} \oint_{C_i^+} F \cdot dC_i$$

donde C^+, C_i^+ representan la curvas de Jordan orientadas positivamente.



Ejemplo. Calculamos $\iint_D (x+y)\, dydy$, usando el anterior teorema, donde D es la región comprendida entre los círculos concéntricos al origen de radio 1 y 2, respectivamente.

Para aplicar el teorema de Green buscamos un campo vectorial $F = (P, Q)$ de forma que $Q_x - P_y = x + y$, por ejemplo $F(x, y) = (-xy, xy)$. Si representamos por C y C_1 las circunferencias de radio 2 y radio 1, respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)\, dxdy &= \oint_{C^+} -xy\, dx + xy\, dy - \oint_{C_1^+} -xy\, dx + xy\, dy = \\
&= \int_0^{2\pi} -2\cos t \cdot 2\operatorname{sen} t\, (-2\operatorname{sen} t)\, dt + 2\cos t \cdot 2\operatorname{sen} t\, (2\cos t)\, dt - \\
&\quad - \int_0^{2\pi} -\cos t \cdot \operatorname{sen} t\, (-\operatorname{sen} t)\, dt + \cos t \cdot \operatorname{sen} t\, (\cos t)\, dt = \\
&= 7\int_0^{2\pi} \cos t \operatorname{sen}^2 t\, dt + 7\int_0^{2\pi} \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt = 0
\end{aligned}$$

4. Ecuaciones difenciales exactas

Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial continuo en un conjunto conexo $U \subseteq \mathbb{R}^2$, diremos que una ecuación diferencial de la forma $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ o equivalentemente $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ es una *ecuación diferencial exacta* si el campo vectorial $F = (P, Q)$ deriva de un potencial.

Solución de una ecuación diferencial exacta. Si la ecuación diferencial

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

es exacta f es de clase C^1 en U es una función potencial del correspondiente campo vectorial $F = (P, Q)$ entonces la solución general de dicha ecuación diferencial viene dada por $f(x, y) = cte.$

Ejemplo. La ecuación diferencial $y\,y' = x$ es exacta y tiene por soluciones $\frac{1}{2}(y^2 - x^2) = cte$. ¿Cuáles son las soluciones que verifican $y(0) = 1$?

Factor integrante. Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial continuo en un conjunto conexo $U \subseteq \mathbb{R}^2$, diremos que una función $\mu(x, y)$ continua en U es un factor integrante de la ecuación diferencial $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ cuando, al multiplicar por $\mu(x, y)$, la ecuación resultante $\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)y' = 0$ es una ecuación diferencial exacta.

Caracterización del factor integrante en regiones simplemente conexas. Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo $U \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces $\mu(x, y)$ es un factor integrante de $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ si, y sólo si,

$$\mu_y P - \mu_x Q = (Q_x - P_y)\mu. \tag{1}$$

Factor integrante que sólo depende de una variable. Un caso sencillo, pero interesante es cuando el factor integrante depende de una sola variable, por ejemplo de x, esto es $\mu(x, y) = \delta(x)$. En este caso la igualdad (1) se transforma en

$$-\delta\,' Q = (Q_x - P_y)\delta$$

Es más, la igualdad la igualdad (1) nos garantiza que el factor integrante $\mu(x, y)$ sólo dependen de x, si y sólo si, el cociente

$$\frac{Q_x(x, y) - P_y(x, y)}{-Q(x, y)}$$

es una función, llamémosla g, que sólo depende de x. Para obtener un factor integrante con esta propiedad, basta resolver la ecuación diferencial $\delta' = g(x)\delta$, que es de variables separadas. En concreto, $\frac{\delta'}{\delta} = g(x)$, con lo que el factor integrante es $\delta(x) = e^{\int g(x)\,dx}$.

Un resultado análogo se puede obtener para factores integrantes que sólo dependen de la variable y. En este caso obtenemos que si

$$\frac{Q_x(x, y) - P_y(x, y)}{P(x, y)}$$

es una función, llamémosla h, que sólo depende de y, entonces un factor integrante de la correspondiente ecuación diferencial viene dado por $\delta(y) = e^{\int h(y)\,dy}$.

Ejemplo. La ecuación diferencial $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ no es exacta, si bien, llamando $P(x, y) = y(1 + xy)$ y $Q(x, y) = -x$, tenemos

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = -\frac{2}{y} \iff \delta(y) = y^{-2}$$

De donde la ecuación diferencial $\dfrac{1 + xy}{y}\,dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy = 0$ es exacta.

En el ejercicio **??** se muestran como se pueden encontrar factores integrantes que verifican otras condiciones.