Matemáticas III
Relación de ejercicios Tema 5

Ejercicios

Ej. 1 — Calcula las siguientes integrales de línea para campos escalares.

1. $\oint_C x^2 y\, dC$, donde C es la circunferencia unidad.
2. $\oint_C (x+y)\, dC$, donde C es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.
3. $\oint_C 2xy\, dC$, donde C es la curva cerrada formada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$.
4. $\oint_C (ye^z + xz)\, dC$ donde $C \equiv \left\{ \begin{matrix} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ y = 0 \end{matrix} \right\}$.
5. $\int_C z\, dC$, donde C es el tramo de la hélice cónica $(t\cos t, t \operatorname{sen} t, t)$ con $t \in [0, 6\pi]$.

Ej. 2 — Calcula las siguientes integrales de línea para campos vectoriales.

1. $\int_C (-y, x) \cdot dC$, donde C es el tramo de la circunferencia unidad con $y \geq 0$ y punto inicial en el $(1,0)$.
2. $\oint_C 2xy\, dx + (y^2 - x^2)\, dy$, donde C es la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ orientada negativamente.
3. $\int_C (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy) \cdot dC$, donde C es el arco de parábola $y = x^2$ que parte de $(-1,1)$ y termina en $(1,1)$.
4. $\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$, donde C es la curva $\left\{ \begin{matrix} x+y = 2 \\ x^2+y^2+z^2 = 2(x+y) \end{matrix} \right\}$ orientada negativamente cuando se observa desde el origen.
5. $\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$, donde C es la curva $\left\{ \begin{matrix} xy = z \\ x^2+y^2 = 1 \end{matrix} \right\}$ orientada positivamente cuando se observa desde el $(0,0,1)$.

Ej. 3 — Sea F el campo vectorial

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

1. Encuentra el máximo abierto U donde F es de clase C^1.
2. Demuestra que F es irrotacional en U.

3. Calcula la integral de línea de F en la circunferencia unidad orientada positivamente.
4. ¿Es F conservativo en U?

Ej. 4 — ¿Cuáles de los siguientes campos son conservativos en todo su dominio? Encuentra, para aquéllos que lo sean, un potencial.

1. $F(x,y) = (y, -x)$.
2. $F(x,y) = (3x^2y, x^3)$.
3. $F(x,y) = (2xy, x^2+1)$.
4. $F(x,y) = (x + \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x, y + \cos x + x \cos y)$.
5. $F(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y)$.
6. $F(x,y,z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2)$.

Ej. 5 — Sea el campo plano

$$F(x,y) = \left(\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy) + by, x^2\cos(xy) + \int_0^x e^{at^2}\, dt\right)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Encuentra $a, b \in \mathbb{R}$ para que F sea conservativo en todo su dominio.
2. Para los casos en que sea posible determina un potencial del campo.
3. Calcula la integral de línea $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(\pi,1)} F \cdot dC$ para los casos en los que F sea conservativo.

Ej. 6 — Sea $F(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$ un campo vectorial.

1. Prueba que F es conservativo y halla un potencial suyo en $\mathbb{R}^3$.
2. Construye el campo escalar $G(x,y,z)$ que determine la circulación de F desde el origen al punto (x,y,z).
3. Calcula el punto de la curva C, intersección del cilindro $x^2+y^2 = y$ con el plano $z+y = 1$, donde G alcanza el valor máximo.

Ej. 7 — Comprobar el teorema de Green para los siguientes casos:

1. Para $F(x,y) = (-y, x)$ con C la elipse de semiejes $a, b > 0$ centrada en el origen.
2. Para $F(x,y) = (y^2, 3xy)$ con C la frontera de la región encerrada entre las circunferencias $x^2+y^2 = 1$ y $x^2+y^2 = 4$ en el primer cuadrante.

Ej. 8 — Sea $F(x,y) = (x^2+y^2-y, 2xy)$ y la región plana

$$D = \{(x,y)) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \geq 0\}$$

Determina la integral doble $\iint_D \operatorname{rot}(F)\, dxdy$ de las siguientes formas:

1. directamente,
2. usando el teorema de Green.

Ej. 9 — Calcular las siguientes integrales de línea usando el teorema de Green.

1. $\displaystyle\int_C (e^x \cos y + xy^2)\, dx - (e^x \operatorname{sen} y + x^2y)\, dy$ donde C es el arco de lemniscata $r^2 = \cos(2\theta)$ en el primer cuadrante con punto final el origen de coordenadas.

2. $\oint_C \left(2y + \sqrt{9+x^3}\right) dx + \left(5x + e^{y^2}\right) dy$ donde C es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ orientada positivamente.

Ej. 10 — Prueba que si D es una región plana encerrada por una curva de Jordan C entonces

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \oint_C -y\,dx + x\,dy$$

Aplica la fórmula anterior para calcular el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ej. 11 — Sea el campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\cos(2xy) - 2xy\,\mathrm{sen}(2xy) + 2xye^{x^2y}, -2x^2\,\mathrm{sen}(2xy) + x^2e^{x^2y}\right)$$

Sea la curva de Jordan $C = C_1 \cup C_2$ orientada positivamente con

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \leq 0\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ y \geq 0\}$$

1. ¿Es F conservativo en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, halla una función potencial de F en $\mathbb{R}^2$.
2. Cacula directamente la integral
$$\oint_C (F+G) \cdot dC$$
donde $G(x,y) = (x^2 + y^2 + 1, y)$
3. Halla la integral anterior usando el teorema de Green.

Ej. 12 — Comprueba que las siguientes ecuaciones son exactas y encuentra su solución general:

1. La ecuación $2x^3 + 3y + (3x + y - 1)y' = 0$.
2. La ecuación $(4x^3y - 12x^2y^2 + 5x^2 + 3x)y' + 6x^2y^2 - 8xy^3 + 10xy + 3y = 0$.

* **Ej. 13 —** Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales encontrando previamente para ellas un factor integrante de la forma que se indica:

1. La ecuación $y + (x^2y - x)y' = 0$, con un factor integrante que sólo depende de x.
2. La ecuación $4xy + 3y^4 + (2x^2 + 5xy^3)y' = 0$, con un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^ny^m$.
3. La ecuación $x^2y + y^3 - xy + x^2y' = 0$, con un factor integrante que depende de $x + y$.
4. La ecuación $y^3 + xy^2 + y + (x^3 + x^2y + x)y' = 0$, con un factor integrante que depende de xy.
5. La ecuación $y + (2x + 3y)y' = 0$, con un factor integrante que depende de una sola variable.

Soluciones

Solución (Ej. 1) —

1. 0. 2. $1+\sqrt{2}$. 3. $\dfrac{25\sqrt{5}+1}{30}$. 4. 0. 5. $\dfrac{\left(36\,\pi^2+2\right)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}}{3}$

Solución (Ej. 2) —

1. π. 2. 5π. 3. $-\dfrac{14}{15}$. 4. $-2\sqrt{2}\pi$. 5. $-\pi$.

Solución (Ej. 3) — F es irrotacional pero no es conservativo.

Solución (Ej. 4) —

1. No es conservativo. 2. $f(x,y)=x^3y+cte.$ 3. $f(x,y)=x^2y+y+cte.$
4. $f(x,y)=x\operatorname{sen}y+y\cos x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+cte.$
5. $f(x,y,z)=xz-yz+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}+cte.$
6. $f(x,y,z)=xz^2+x^2yz-2z-2xy^2+x+cte.$

Solución (Ej. 5) —

1. $a=0$, $b=1$. 2. $f(x,y)=x\sin(xy)+xy+cte.$ 3. π.

Solución (Ej. 6) —

1. $f(x,y,z)=x^2yz+cte.$ 2. $G(x,y,z)=x^2yz.$ 3. Los puntos $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Solución (Ej. 7) — 1. $2\pi ab$. 2. 0.

Solución (Ej. 8) — $\dfrac{1}{2}$.

Solución (Ej. 9) — 1. $\dfrac{11-12e}{12}$. 2. 12π.

Solución (Ej. 11) —

1. $f(x,y)=x\cos(2xy)+e^{x^2y}+cte.$ 2. -4. 3. —.

Solución (Ej. 12) —

1. $\dfrac{y^2+(6x-2)y+x^4}{2}=cte.$ 2. $-4x^2y^3+2x^3y^2+\left(5x^2+3x\right)y=cte.$

Solución (Ej. 13) —

1. $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y}{x} = cte.$
2. $x^3y^2\left(y^3 + x\right) = cte.$
3. —
4. $-\dfrac{1 + (x+y)^2}{2x^2y^2} = cte$
5. $y^3 + xy^2 = cte$